

doi: 10.32620/oikit.2025.106.08

УДК 531.8

Ю. В. Широкий, Ю. О. Сисоєв, Ю. О. Семененко,
О. Д. Семененко, М. П. Ковальов, А. С. Сорока

Дослідження кінематичних характеристик дельта-робота в задачах прямої та зворотної кінематики

*Національний аерокосмічний університет «Харківський авіаційний інститут»,
м. Харків, Україна*

Стаття присвячена кінематичному аналізу дельта-робота з акцентом на розв'язанні прямої та зворотної задачі кінематики. Кінематичний аналіз дельта-робота в основному вивчає взаємозв'язок між вхідними кутами серводвигунів приводних важелів та просторовим положенням виконавчого органу, що визначає точність і ефективність роботи всієї роботизованої системи. Такий аналіз охоплює два ключові аспекти: рішення прямої кінематики та рішення зворотної кінематики. Рішення прямої кінематики дельта-робота полягає у визначенні координат робочого органу, коли відомі кути повороту кожного з приводних суглобів. Ця задача є математично складною через нелінійність рівнянь та геометричні особливості паралельної структури механізму. Навпаки, рішення зворотної кінематики полягає у розрахунку кутів повороту всієї системи приводів для досягнення наперед заданого положення виконавчого органу, що є критично важливим для задач точного позиціонування, маніпулювання та високошвидкісного переміщення. У статті детально розглянуто геометричні моделі дельта-робота, наведено математичний опис кінематичних рівнянь прямої та зворотної задачі кінематики, проаналізовано особливості конфігурації конструкції, що впливають на робочу область, жорсткість та точність позиціонування. Проблема деформативності конструкції стає особливо актуальною у випадках, коли робот працює з високими прискореннями або під дією змінних навантажень. Навіть невеликі відхилення у геометрії ланок можуть призвести до накопичення похибок, що ускладнює досягнення стабільного та повторюваного позиціонування. Для зменшення впливу таких факторів необхідні ретельний аналіз кінематичної моделі, уточнення параметрів жорсткості та застосування методів компенсації в системах керування. Отримані результати дозволяють підвищити точність керування дельта-роботом та оптимізувати його роботу в умовах високих динамічних навантажень, що робить представлені дослідження корисними для інженерів, розробників робототехнічних систем та дослідників у галузі мехатроніки.

Ключові слова: дельта-робот, паралельні механізми, кінематичний аналіз, пряма кінематика, обернена кінематика, математичне моделювання.

Вступ

Сучасні маніпулятори, зокрема дельта-роботи, є ключовими елементами автоматизації в різних галузях промисловості, від сортування дрібних виробів до виконання складних операцій у промисловості. Завдяки паралельній кінематичній структурі, яка базується на використанні паралелограмів, дельта-роботи забезпечують високу швидкість, компактність і точність рухів. Однак їх можливості обмежені робочим простором і характеристиками приводів, що потребує ретельного аналізу кінематичних параметрів для ефективного виконання завдань [8].

Дельта-робот належить до найпоширеніших та найуспішніших типів паралельних маніпуляторів, які активно використовуються у промисловості та різних технічних галузях. Його популярність зумовлена поєднанням простої та надійної конструкції, високої швидкодії та здатності виконувати значну кількість

операцій за короткий час. Порівняно з іншими видами роботів, дельта-маніпулятори вирізняються малою масою рухомих ланок, що дає змогу досягати надзвичайно високих прискорень та забезпечувати ефективну роботу в потокових та фасувальних процесах [12].

Одним із найуспішніших представників паралельних маніпуляторів є дельта-робот, який отримав широке промислове впровадження. Його використовують у авіаційній та аерокосмічній сферах, у логістичних та складських системах, а також у медичній робототехніці, зокрема в хірургічних комплексах. Популярність дельта-роботів зумовлена комбінацією високої швидкості, компактності та малої маси рухомих частин.

Для виготовлення ведених ланок дельта-робота зазвичай застосовують тонкостінні стрижні з вуглецевого волокна, що мають малу вагу та високу міцність. Приводні важелі також найчастіше виконують із карбону або алюмінієвих сплавів. Проте під час роботи на великих швидкостях еластичні деформації цих елементів істотно впливають на точність переміщення виконавчого органу. Використання класичних підходів до динамічного аналізу, які вважають робот абсолютно жорстким, не дає змоги адекватно описати вплив гнучкості стрижнів на кінцеву точність позиціонування. Тому для коректного моделювання необхідно враховувати пружні властивості конструкції та їхній внесок у загальну похибку [11].

Останні тенденції у проектуванні дельта-роботів спрямовані на подальше зменшення маси конструкції для підвищення їхньої швидкодії. Проте надмірне полегшення елементів призводить до зростання деформацій, зниження жорсткості та появи додаткових коливань під час руху. Такі ефекти негативно впливають на точність позиціонування виконавчого органу, що у свою чергу обмежує можливості застосування дельта-роботів у високоточних виробничих процесах.

Однією з ключових задач при проектуванні дельта-роботів є розв'язання прямої та зворотної кінематичних задач. Пряма задача кінематики полягає у визначенні положення кінцевого ефектора за відомими кутами повороту приводів, тоді як зворотна задача передбачає обчислення кутів приводів за заданим положенням ефектора. Ці задачі є основою для синтезу параметрів робота, аналізу його робочого простору та планування траєкторій руху. У цій статті розглядається підхід до визначення кінематичних характеристик дельта-робота на основі рівнянь зв'язку, а також методи розв'язання прямої та зворотної кінематичних задач із застосуванням чисельних методів.

1. Постановка задачі

Роботи з паралельною кінематичною структурою останніми роками стали одними з найпоширеніших у сучасній робототехніці. Це пояснюється їхньою підвищеною конструктивною жорсткістю, високою точністю переміщення, значною вантажопідіймальністю, малою інерційністю руху та відносною простотою розв'язання задачі зворотної кінематики — властивостями, які малодоступні для інших типів роботів. Завдяки таким характеристикам подібні системи ефективно застосовують у галузях, де необхідні висока продуктивність, швидкодія та точність [19].

Дельта-роботи, як представники паралельних кінематичних механізмів, привертають значну увагу дослідників у галузі робототехніки завдяки своїм унікальним характеристикам, таким як висока швидкість, точність і компактність.

Останні дослідження в цій сфері зосереджені на вдосконаленні методів кінематичного аналізу, оптимізації робочого простору та розробці ефективних алгоритмів керування.

У роботах [1–2] розглядаються основи кінематичного моделювання дельта-роботів, зокрема розв'язання прямої та зворотної кінематичних задач. Автори пропонують аналітичні методи для визначення положення кінцевого ефектора, які базуються на рівняннях зв'язку між кутами приводів і координатами платформи. Ці підходи широко застосовуються для аналізу робочого простору та синтезу параметрів маніпуляторів. Однак зазначено, що аналітичні методи можуть бути обмеженими через складність обчислень у реальних умовах із нелінійними обмеженнями.

У [3] досліджується використання чисельних методів для розв'язання зворотної кінематичної задачі, що дозволяє підвищити точність обчислень для дельта-роботів із нестандартними конфігураціями. Особливу увагу приділено ітераційним алгоритмам, які враховують обмеження робочого простору та жорсткість конструкції. У [4] акцент зроблено на моделюванні робочої області дельта-робота, де запропоновано методику оцінки її об'єму та форми залежно від довжини важелів і кутів повороту приводів.

Останні публікації [5, 6] звертають увагу на інтеграцію дельта-роботів у промислові системи автоматизації, зокрема для задач сортування, зварювання та розміщення компонентів. У цих роботах підкреслюється важливість врахування динамічних характеристик, таких як інерція та сили тертя, для підвищення точності рухів. Крім того, у [7] розглядаються сучасні підходи до проектування систем керування дельта-роботами, які включають адаптивні алгоритми та методи машинного навчання для оптимізації траєкторій руху.

У публікації [8] розроблено динамічну модель дельта-робота на основі формалізму Лагранжа та Гамільтона. У дослідженні [9] запропоновано підхід до підвищення точності позиціонування виконавчого органу за рахунок використання зворотного зв'язку від відеокамер. У роботі також подано формулювання прямої та зворотної задач кінематики та створено алгоритм визначення просторових координат точки, у яку має переміститися робочий орган. У статті [10] описано створення математичної моделі дельта-робота, призначеного для сортування побутових відходів. Автори акцентували увагу на розробці універсальної моделі, що дає змогу ефективно розв'язувати зворотну задачу кінематики. У роботі [11] запропоновано методику визначення кінематичних параметрів дельта-робота, виходячи з вимог до робочої зони. Представлена модель дає змогу за заданою геометрією робочої області визначити оптимальні довжини важелів та параметри карданних з'єднань.

На відміну від класичних підходів, у дослідженні [12] розглядається модифікований дельта-робот, який має додаткове телескопічне з'єднання між нерухомою основою та рухомою платформою. Завдяки телескопічному механізму конструкція отримує можливість додаткового обертального руху. У роботі [13] представлено створення експериментальної мобільної платформи з дельта-роботом, призначеної для знищення бур'янів. Система розпізнавання рослин ґрунтується на нейронній мережі RSNN, яка, за даними авторів, забезпечує точність ідентифікації бур'янів на рівні 99,5%.

У статті [14] запропоновано розв'язання зворотної задачі кінематики та описано алгоритм планування руху виконавчого органу під час переміщення об'єктів. Робота [15] містить опис конструкції дельта-робота, аналіз ступеня його

рухомості та приклади застосування в промисловості й побуті. Автори виконали детальний кінематичний аналіз і розв'язали як пряму, так і зворотну задачу кінематики, супроводивши матеріал численними прикладами та варіантами верифікації результатів.

Стаття [16] присвячена дослідженню дволанкового дельта-робота, який працює в одній площині. Для нього розв'язано пряму й зворотну кінематику та проведено моделювання, що показало: відхилення виконавчого органу за умови навантаження 0,2 кг і швидкості 2,618 м/с не перевищує 0,6 мм.

Незважаючи на значний прогрес, у літературі залишаються невирішені питання, пов'язані з урахуванням нелінійних ефектів, таких як деформація елементів конструкції, та розробкою універсальних методів для аналізу робочого простору дельта-роботів із різними конфігураціями. Ця стаття спрямована на поглиблення розуміння кінематичних характеристик дельта-робота шляхом аналізу прямої та зворотної кінематичних задач із використанням чисельних методів.

2. Дослідницька частина

Метою цієї статті є розробка та аналіз методів кінематичного моделювання дельта-робота з фокусом на розв'язання прямої та зворотної кінематичних задач для визначення його кінематичних характеристик залежно від заданої робочої області. Дослідження спрямоване на створення ефективного підходу до синтезу параметрів маніпулятора, що забезпечує точне керування рухами та оптимальне використання робочого простору.

Для досягнення поставленої мети визначено такі задачі:

1. Розробити математичну модель прямої кінематичної задачі для визначення положення кінцевого ефектора дельта-робота за відомими кутами повороту приводів.

2. Запропонувати чисельний метод розв'язання зворотної кінематичної задачі для обчислення кутів приводів за заданими координатами кінцевого ефектора.

3. Провести аналіз робочої області дельта-робота шляхом моделювання її об'єму та форми залежно від конструктивних параметрів, таких як довжина важелів і кути повороту.

4. Оцінити вплив кінематичних обмежень на точність і швидкість руху маніпулятора.

5. Розробити рекомендації щодо проектування системи керування дельта-робота на основі отриманих кінематичних характеристик.

Ці задачі спрямовані на поглиблення розуміння кінематичних особливостей дельта-роботів та забезпечення їх ефективного застосування в автоматизованих промислових системах.

3. Результати розрахунків

У цій роботі як об'єкт дослідження використовується дельта-робот з паралельною структурою WSC-800DJ фірми WARSONCO (Рис. 1) [22].

Дельта-робот складається з нерухомо закріпленої основи - 1, трьох приводних важелів - 2, і трьох ведених штанг - 3, рухомий платформи - 4.

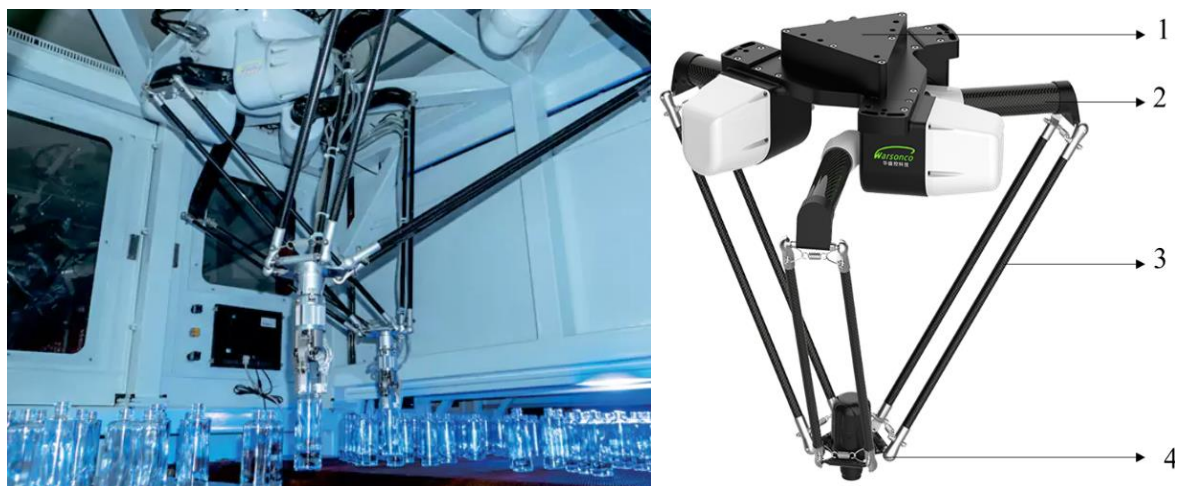


Рис. 1. Дельта-робот WSC-800DJ фірми WARSONCO [22]

Геометричні параметри дельта-робот з паралельною структурою наведені на (Рис. 2) [22]. Між основою і рухомою платформою розташовані три кінематичні ланцюги, включаючи приводний паралелограма. Привідний важіль з'єднується з приводним двигуном, закріпленим на підставі, через пару, що обертає, а ведена штанга з'єднується з рухомою платформою через сферичний шарнір. Три набори паралелограмних механізмів обмежують напрямок руху рухомої платформи. Рухомою платформа рухається паралельно до основи, при цьому обертання рухомої платформи обмежене таким чином, щоб рухомою платформа дельта-робота могла здійснювати поступальний рух у напрямках глобальних осей X , Y і Z .

При фактичному використанні лише поступальні ступені свободи у трьох напрямках X , Y та Z часто не можуть задовольнити виробничі потреби. У цьому випадку необхідно додати до виконавчого органу робота обертальний ступінь свободи в нормальному напрямку рухомої платформи. Існує два способи реалізації обертання виконавчого органу:

- На рухомій платформі основного механізму робота встановлюється висувний вал, що обертається. Кінці висувного валу з'єднуються з рухомою платформою та основою відповідно за допомогою шарнірів Гука для реалізації обертання виконавчого органу навколо нормалі рухомої платформи.
- На рухомій платформі механізму робота встановлюється компактний двигун, що забезпечує обертання виконавчого органу навколо нормалі до рухомої платформи.

Створення системи координат дельта-робота

Принципова схема механізму дельта робота показана на (Рис. 3) на схемою використані такі позначення: O – центр основи, P – центр рухомої платформи. R – радіус описаного кола основи, r – радіус описаного кола рухомої платформи. Трикутники $\triangle A_1, A_2, A_3$ і $\triangle B_1, B_2, B_3$ є рівносторонніми трикутниками [18].

Позитивний напрямок осі X вибирається паралельним осі приводного важеля 1 у його вихідному положенні, позитивна вісь Z перпендикулярна основі та спрямована вертикально вгору. Позитивний напрямок осі Y визначається відповідно до правила правосторонньої системи координат.

З метою розуміння просторового становища дельта-робота та вивчення кінематики його руху, до середин верхньої та нижньої сторін кожного набору

замкнутих контурів паралелограма умовно додається віртуальний сполучний стрижень, як показано на (Рис. 3).

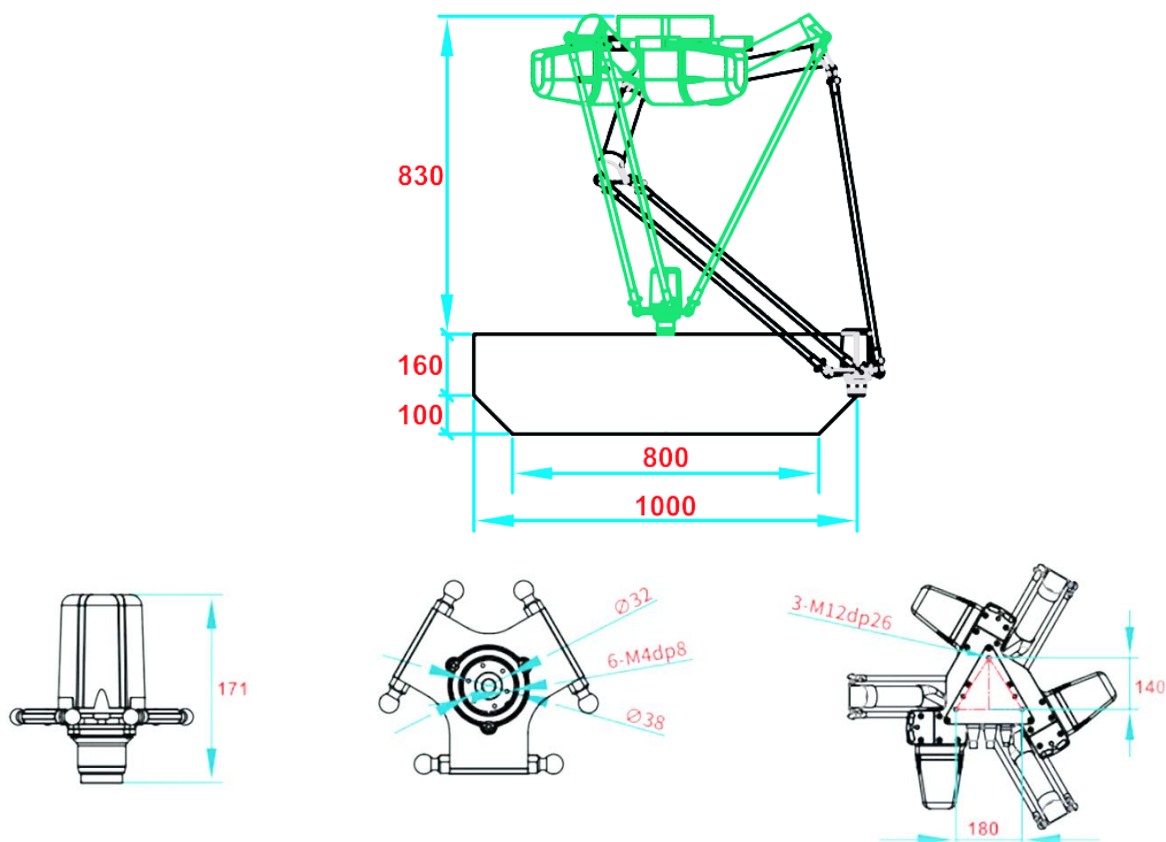


Рис. 2. Розміри дельта-робота WSC-800DJ фірми WARSONCO [22]

Якщо не враховувати обертальний рух четвертої осі, рухома платформа має лише поступальний ступінь свободи та її орієнтація фіксована щодо основи. Паралелограмні механізми у всіх розгалужених ланцюгах є плоскі чотирикутники, які не спотворюються у просторові чотирикутники. Таким чином, рух лівої та правої сторін паралелограма збігається з рухом віртуальної середньої лінії з'єднання між верхньою та нижньою сторонами паралелограма. Дане уявлення дозволяє використовувати при виконанні кінематичного аналізу принципову схему механізму, показану на (Рис. 4).

Конструктивними параметрами роботизованої системи є: R – відстань між центральною точкою обертальної пари приводного важеля та центральною точкою системи координат O , L_1 – довжина приводного важеля, L_2 – довжина веденої штанг, r – відстань між центральною точкою рухомою платформи P і центральною точкою кінця веденої штанг, θ – кут між приводним важелем та віссю X .

При спрощенні моделі приводного важеля цього типу дельта-робота приводний важіль розглядається як пряма A_iC_i , тобто як лінія, що з'єднує центральне положення обертальної пари приводного важеля з центром шарового шарніра. Відповідно до структурних характеристик приводного важеля при вирішенні зворотного завдання кінематики для отримання істинного положення приводного важеля необхідно з кута руху приводного важеля θ_i

відняти кут φ (конкретне значення φ становить 9.76^0), а при вирішенні прямого завдання кінематики – додавати кут φ .

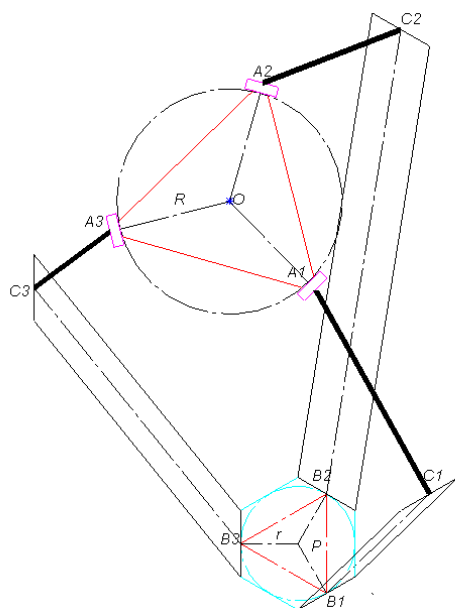


Рис. 3. Принципова кінематична схема дельта-робота з віртуальними стрижнями

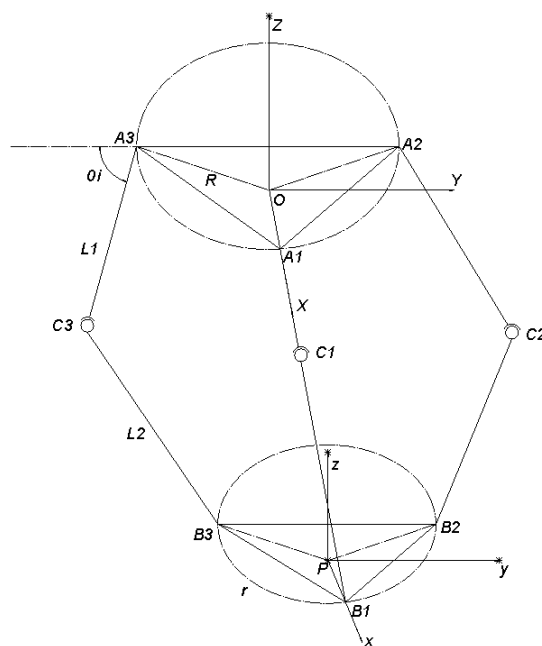


Рис. 4. Принципова схема механізму дельта-робота

Зворотне завдання кінематики

Зворотне завдання кінематики полягає у визначенні кутів повороту трьох приводних двигунів дельта-робота для досягнення необхідного положення (x , y , z) центральної точки P рухомої платформи. Створення моделі зворотної кінематики та вирішення зворотної задачі кінематики дельта-робота є основою

для планування траєкторії руху та управління рухом ланок у суглобовому просторі Дельта-робота. Точне та надійне керування кінцевим виконавчим пристроєм робота вимагає точного розрахунку кутів повороту кожного приводного шарніра дельта-робота [15].

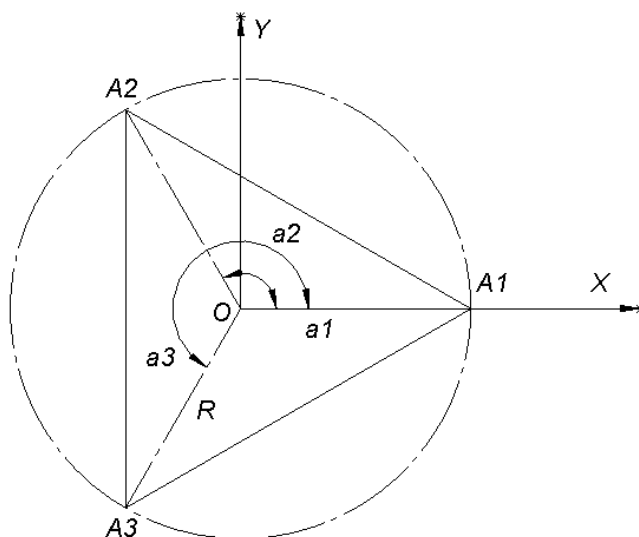


Рис. 5. Вигляд зверху на основу дельта-робота

Вид зверху на основу дельта-робота показаний на (Рис. 5) на якому демонстровано геометричний взаємозв'язок між статичною системою координат та нерухомою основою. Вісь Z розташована в точці O і спрямована перпендикулярно до площини малюнка в наш бік.

Припустимо, що кут між сполучним відрізком OA_i від початку координат O основи до кожної вершини A_i основи та віссю X статичної системи координат дорівнює α_i . Тоді координати положення точки A_i статичній системі координат O-XYZ рівні:

$$\begin{bmatrix} X_{Ai} \\ Y_{Ai} \\ Z_{Ai} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} R \cos \alpha_i \\ R \sin \alpha_i \\ 0 \end{bmatrix} \quad (1)$$

де R – радіус описаного кола основи; $\alpha_i = \frac{2\pi}{3}i - \frac{2\pi}{3}$ ($i = 1, 2, 3$).

Вид зверху на рухому платформу дельта-робота показаний на (Рис. 6).

Аналогічно, координати вектора $\overrightarrow{PB_i}$ кінцевої точки веденої штанг системі координат p -хуз рухомий платформи також можуть бути отримані в вигляді:

$$\overrightarrow{PB_i} = \begin{bmatrix} X_{Bi} \\ Y_{Bi} \\ Z_{Bi} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} r \cos \alpha_i \\ r \sin \alpha_i \\ 0 \end{bmatrix} \quad (2)$$

де r – радіус описаного кола рухомий платформи; $\alpha_i = \frac{2\pi}{3}i - \frac{2\pi}{3}$ ($i = 1, 2, 3$).

Координати вектора $\overrightarrow{A_iC_i}$ ($i = 1, 2, 3$) можуть бути виражені як:

$$\overrightarrow{A_i C_i} = \begin{bmatrix} L_1 \cos \theta_i \cos \alpha_i \\ L_1 \cos \theta_i \sin \alpha_i \\ -L_1 \sin \theta_i \end{bmatrix} \quad (3)$$

де L_1 – довжина приводного важеля; θ_i – кут повороту приводного шарніра.

Відповідно до геометричного співвідношення вектор $\overrightarrow{OC_i}$ у статичній системі координат O -XYZ може бути отриманий як:

$$\overrightarrow{OC_i} = \overrightarrow{OA_i} + \overrightarrow{A_i C_i} = \begin{bmatrix} (R + L_1 \cos \theta_i) \cos \alpha_i \\ (R + L_1 \cos \theta_i) \sin \alpha_i \\ -L_1 \sin \theta_i \end{bmatrix} \quad (4)$$

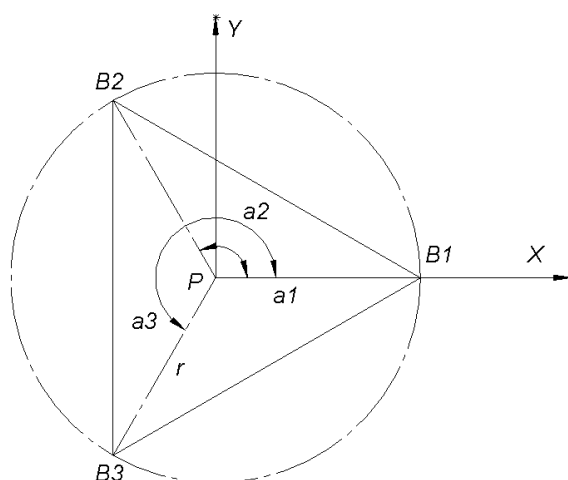


Рис. 6. Вид зверху на рухому платформу дельта-робота

Координати вектора $\overrightarrow{OP}$ центральної точки P рухомої платформи базової системі координат O -XYZ дорівнюють $[x \ y \ z]^T$, тоді вектор $\overrightarrow{OB_i}$ точки B_i у базовій системі координат O -XYZ дорівнює:

$$\overrightarrow{OB_i} = \overrightarrow{OP} + \overrightarrow{PB_i} = \begin{bmatrix} x + r \cos \alpha_i \\ y + r \sin \alpha_i \\ z \end{bmatrix} \quad (5)$$

Виходячи з цього, векторний вираз $\overrightarrow{B_i C_i}$ може бути отриманий у вигляді:

$$\overrightarrow{B_i C_i} = \overrightarrow{OC_i} - \overrightarrow{OB_i} = \begin{bmatrix} (R - r + L_1 \cos \theta_i) \cos \alpha_i - x \\ (R - r + L_1 \cos \theta_i) \sin \alpha_i - y \\ -L_1 \sin \theta_i - z \end{bmatrix} \quad (6)$$

Оскільки $|\overrightarrow{B_i C_i}| = L_2$, одноланцюгове обмежене рівняння паралельного механізму може бути отримано з геометричного співвідношення у вигляді:

$$\begin{aligned} & [(R - r + L_1 \cos \theta_i) \cos \alpha_i - x]^2 + [(R - r + L_1 \cos \theta_i) \sin \alpha_i - y]^2 + \\ & + [-L_1 \sin \theta_i - z]^2 = L_2^2 \end{aligned} \quad (7)$$

Помістимо $\alpha_i = \frac{2\pi}{3}i - \frac{2\pi}{3}$ ($i = 1, 2, 3$) відповідно до наведеної вище формули,

щоб отримати такі вирази:

$$\begin{cases} [(R-r+L_1 \cos \theta_1)-x]^2 + y^2 + [L_1 \sin \theta_1 + z]^2 = L_2^2 \\ \left[-\frac{1}{2}(R-r+L_1 \cos \theta_2)-x \right]^2 + \left[\frac{\sqrt{3}}{2}(R-r+L_1 \cos \theta_2)-y \right]^2 + \\ [L_1 \sin \theta_2 + z]^2 = L_2^2 \\ \left[-\frac{1}{2}(R-r+L_1 \cos \theta_3)-x \right]^2 + \left[-\frac{\sqrt{3}}{2}(R-r+L_1 \cos \theta_3)-y \right]^2 + \\ [L_1 \sin \theta_3 + z]^2 = L_2^2 \end{cases} \quad (8)$$

Нехай $t_i = \tan\left(\frac{\theta_i}{2}\right)$ ($i = 1, 2, 3$) використовуємо універсальні формули

тригонометричної функції $\sin \theta_i = \frac{2t}{1+t^2}$, $\cos \theta_i = \frac{1-t^2}{1+t^2}$ для заміни $\sin \theta_i$ та $\cos \theta_i$ у наведеній вище формулі, а також спростимо наведену вище формулу, ми можемо отримати квадратне рівняння однієї змінної щодо θ_i :

$$A_i t_i^2 + B_i t_i + C_i = 0 \quad (9)$$

де

$$\begin{aligned} A_1 &= \frac{(x^2 + y^2 + z^2) - 2x(R-r) + (R-r)^2 + (L_1^2 - L_2^2)}{2L_1} - (R-r-x) \\ B_1 &= 2z \\ C_1 &= \frac{(x^2 + y^2 + z^2) - 2x(R-r) + (R-r)^2 + (L_1^2 - L_2^2)}{2L_1} + (R-r-x) \\ A_2 &= \frac{(x^2 + y^2 + z^2) + (x - \sqrt{3}y)(R-r) + (R-r)^2 + (L_1^2 - L_2^2)}{L_1} - 2(R-r) - (x - \sqrt{3}y) \\ B_2 &= 4z \\ C_2 &= \frac{(x^2 + y^2 + z^2) + (x - \sqrt{3}y)(R-r) + (R-r)^2 + (L_1^2 - L_2^2)}{L_1} + 2(R-r) + (x - \sqrt{3}y) \\ A_3 &= \frac{(x^2 + y^2 + z^2) + (x + \sqrt{3}y)(R-r) + (R-r)^2 + (L_1^2 - L_2^2)}{L_1} - 2(R-r) - (x + \sqrt{3}y) \\ B_3 &= 4z \\ C_3 &= \frac{(x^2 + y^2 + z^2) + (x + \sqrt{3}y)(R-r) + (R-r)^2 + (L_1^2 - L_2^2)}{L_1} + 2(R-r) + (x + \sqrt{3}y) \end{aligned}$$

Коли відомі координати центральної точки $p(x, y, z)$ рухомої платформи, наведена вище, формула 9 являє собою квадратне рівняння щодо t_i . Відповідно до кореневої формули квадратного рівняння, ми можемо отримати:

$$t_i = \frac{-B_i \pm \sqrt{B_i^2 - 4A_i C_i}}{2A_i} \quad (10)$$

Отже, коли задані координати центральної точки рухомої платформи

Дельта-робота, кут повороту приводного важеля $\theta_i (i=1,2,3)$ можна розрахувати за наведеною вище формулою 10, тобто:

$$\theta_i = 2 \arctan(t_i) \quad (11)$$

З формули 10 видно, що значення t_i відповідне кожній групі приводного важеля, має два рішення, та відповідний кут повороту θ_i приводного важеля також має два значення. Три набори приводних важелів разом мають загалом $2^3 = 8$ наборів рішень, як показано на (Рис. 7).

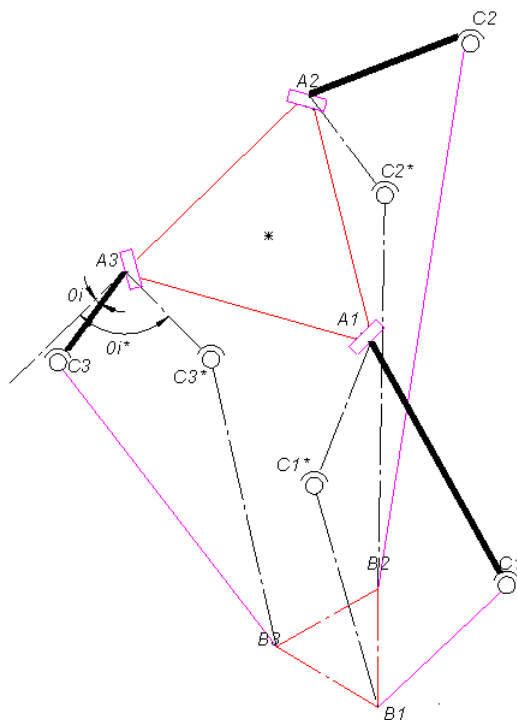


Рис. 7. Принципова схема рішення зворотної кінематики дельта-робота

З геометричних характеристик дельта-робота видно, що коли положення приводного важеля знаходиться на внутрішній стороні основи, кут повороту приводного важеля $\theta_i > 90^\circ$, між стрижнями дельта-робота виникає перешкода, що призводить до пошкодження робота. Отже, коли зворотна кінематика видає кілька рішень, слід вибирати набір рішень, приводні важелі яких розташовані поза основою, тобто вибирається набір рішень із малими значеннями кутів, тобто кут θ_i повинен бути гострим. З монотонності функції арктангенсу видно, що чим менше значення t_i , тим менше значення θ_i . Оскільки вісь Z базової системи координат $O-XYZ$ спрямована вертикально вниз, значення Z є негативним, тому всі значення $-B_i$ є позитивними. Коли формула приймає знак мінус, θ_i - це гострий кут, а коли формула приймає знак плюс, θ_i - це тупий кут. Таким чином, значення θ_i визначається як:

$$\theta_i = 2 \arctan \left(\frac{-B_i - \sqrt{B_i^2 - 4A_iC_i}}{2A_i} \right) \quad (i=1,2,3) \quad (12)$$

Таким чином, якщо відоме положення (x у z) центральної точки P рухомої платформи, кут повороту трьох приводних двигунів Дельта-робота може бути

визначений за допомогою описаного вище методу зворотного розв'язання кінематики.

Пряме завдання кінематики

Пряме завдання кінематики Дельта робота полягає в тому, що відомі вхідні кути $\theta_1, \theta_2, \theta_3$, трьох приводних важелях та обчислення координат центра рухомої платформи в базовій системі координат. Тільки за точного керування обертанням приводних важелів може бути гарантована точність управління рухом центрального становища рухомої платформи. На теперішній час методи дослідження прямої задачі кінематики паралельних роботів в основному включають чисельні методи, аналітичні методи та геометричні методи. У існуючій літературі більша частина моделювання прямого кінематичного завдання використовує чисельні рішення [19].

Чисельний метод полягає у вирішенні виразів у зворотній кінематичній моделі, тобто нелінійної системи рівнянь. Цей метод підходить для більшості паралельних механізмів та має універсальну застосовність, але у нього є проблема складного процесу виведення та компромісу між значеннями у процесі рішення. Чисельні рішення громіздкі і займають багато часу, що не сприяє управлінню паралельними роботами у реальному часі. Однак дельта-паралельний механізм є просторово-симетричним механізмом із замкнутим контуром, який можна легше вирішити, використовуючи метод просторової геометрії [15]. Цей метод не тільки робить процес виведення простим і зрозумілим, але і дозволяє уникнути проблеми вибору між декількома рішеннями. Тому в цій роботі використовується метод геометричного аналізу для вирішення прямої задачі кінематики Дельта-робота.

Як показано на (Рис. 8) це схематична діаграма спрощеної моделі дельта-робота. Для полегшення відстеження та розрахунку веденої ланки C_iB_i ($i=1,2,3$) переміщуються поступово вздовж $\overline{B_iP}$ ($i=1,2,3$) відповідно. Три вектори після переміщення перетинаються центральною точці P описаного кола рухомої платформи, і виходить новий вектор $\overline{D_iP}$. Знаючи вхідні кути трьох приводних важелях, можна обчислити координати трьох точок $C1, C2, C3$ і отримати вектор переміщення $\overline{B_iP}$ ($i=1,2,3$). Оскільки вектор $\overline{B_iP}$ паралельний вектору $\overline{C_iD_i}$ має той самий напрямок, вектор $\overline{OC_i}$ ($i=1,2,3$) можна додати до вектора переміщення $\overline{B_iP}$ ($i=1,2,3$). Звідси ми можемо отримати координати трьох точок D_1, D_2, D_3 у базовій системі координат $O-XYZ$ після переходу трьох точок $C1, C2, C3$.

За рахунок вищевикладеного спрощення модель прямої кінематики дельта-робота перетворюється на завдання знаходження координат вершини P трикутної піраміди $P-D_1, D_2, D_3$. Знаючи координати вершин базового трикутника $\triangle D_1, D_2, D_3$ трикутної піраміди та довжини всіх сторін, неважко знайти координати вершини P базової системи координат $O-XYZ$.

Відповідно до геометричного співвідношення вектор $\overline{OC_i}$ у статичній системі координат $O-XYZ$ може бути отриманий як:

$$\overline{OC_i} = \overline{OA_i} + \overline{A_iC_i} = \begin{bmatrix} (R + L_1 \cos \theta_i) \cos \alpha_i \\ (R + L_1 \cos \theta_i) \sin \alpha_i \\ -L_1 \sin \theta_i \end{bmatrix} \quad (13)$$

Вектор переміщення $\overrightarrow{B_iP}$ ($i = 1, 2, 3$) можна виразити як:

$$\overrightarrow{B_iP} = \begin{bmatrix} -r \cos \alpha_i \\ -r \sin \alpha_i \\ 0 \end{bmatrix} \quad (14)$$

де $\alpha_i = \frac{2\pi}{3}i - \frac{2\pi}{3}$ ($i = 1, 2, 3$), r – радіус описаного кола рухомий платформи.

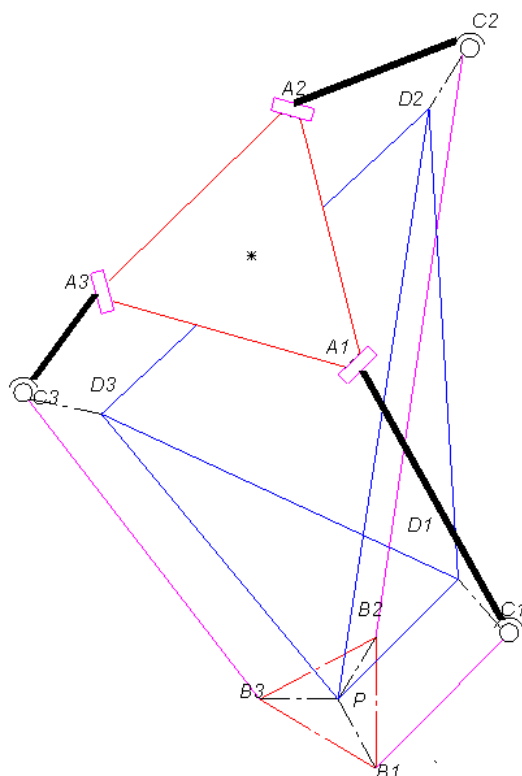


Рис. 8. Спрощена модель віртуальної трикутної піраміди дельта-робота

Вектор $\overrightarrow{OD_i}$ можна виразити як:

$$\overrightarrow{OD_i} = \overrightarrow{OC_i} + \overrightarrow{CD_i} = \overrightarrow{OC_i} + \overrightarrow{B_iP} = \begin{bmatrix} (R-r+L_1 \cos \theta_i) \cos \alpha_i \\ (R-r+L_1 \cos \theta_i) \sin \alpha_i \\ -L_1 \sin \theta_i \end{bmatrix} \quad (15)$$

Як показано на (рис. 9) у трикутній піраміді $P-D_1, D_2, D_3$ припустимо, що точка E є центром описаного кола трикутника $\Delta D_1, D_2, D_3$, і з'єднаємо PE . У той же час встановимо точку F як середню точку D_1, D_2 . Оскільки $\Delta PD_1, D_2$ та $\Delta ED_1, D_2$ є рівнобедреними трикутниками, а точка F є серединою D_1, D_2 , існують $EF \perp D_1D_2$ та $PF \perp D_1D_2$. У той же час можна отримати, що D_1, D_2 перпендикулярно до площини, де розташований ΔPEF , тому $PF \perp D_1D_2$. Аналогічно, можна довести, що $PE \perp D_1D_3$ та $PE \perp D_2D_3$. Так що можна зробити такий висновок: $PE \perp \Delta D_1D_2D_3$ та точка E – ортоцентр трикутника $\Delta D_1, D_2, D_3$.

Щоб знайти координати центральної точки P рухомої платформи у базовій

системі координат $O\text{-}XYZ$, скористаємося співвідношенням:

$$\overrightarrow{OP} = \overrightarrow{OE} + \overrightarrow{EP} \quad (16)$$

Де

$$\overrightarrow{OE} = \overrightarrow{OF} + \overrightarrow{FE}$$

$$\overrightarrow{OF} = (\overrightarrow{OD_1} + \overrightarrow{OD_2}) / 2$$

Далі ми знаходимо вектор $\overrightarrow{FE}$, який може бути виражений як:

$$\overrightarrow{FE} = \varepsilon_{FE} |\overrightarrow{FE}| \quad (17)$$

де ε_{FE} – вектор напрямку $\overrightarrow{FE}$, $|\overrightarrow{FE}|$ – модуль $\overrightarrow{FE}$.

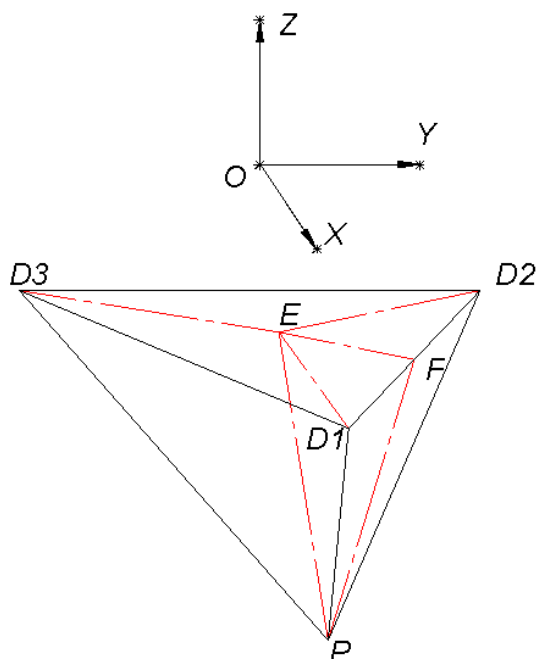


Рис. 9. Еквівалентна кінематична модель дельта-робота

З геометричного співвідношення видно, що, оскільки $\triangle D_1EF$ є прямокутним трикутником, довжина за модулем вектора $\overrightarrow{FE}$ дорівнює:

$$|\overrightarrow{FE}| = \sqrt{|\overrightarrow{D_1E}|^2 - |\overrightarrow{D_1F}|^2} \quad (18)$$

Оскільки координати точки D_1 та точки F відомі, можна отримати довжину по модулю $|\overrightarrow{D_1F}|$. Також відомо, що точка E є центром описаного кола $\triangle D_1, D_2, D_3$, тоді довжина за модулем $|\overrightarrow{D_1E}|$ вектора $\overrightarrow{D_1E}$ дорівнює радіусу її описаного кола. Згідно з формулою радіуса описаного кола трикутника можна бачити, що довжина модуля $|\overrightarrow{D_1E}|$ показана формулою:

$$R = \frac{abc}{4S} \quad (19)$$

де a, b, c – довжина кожної сторони трикутника, S – площа трикутника, тобто:

$$S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$$

$$p = (a+b+c)/2. \quad (20)$$

$$|\overrightarrow{D_1E}| = \frac{|\overrightarrow{D_1D_2}| \cdot |\overrightarrow{D_1D_3}| \cdot |\overrightarrow{D_2D_3}|}{4\sqrt{p(p-|\overrightarrow{D_1D_2}|)(p-|\overrightarrow{D_1D_3}|)(p-|\overrightarrow{D_2D_3}|)}} \quad (21)$$

$$\text{Де } p = (|\overrightarrow{D_1D_2}| + |\overrightarrow{D_1D_3}| + |\overrightarrow{D_2D_3}|) / 2$$

Підставляючи наведену вище формулу в $|\overrightarrow{FE}| = \sqrt{|\overrightarrow{D_1E}|^2 - |\overrightarrow{D_1F}|^2}$, можна отримати $|\overrightarrow{FE}|$.

Припустимо, що кут між D_1, D_2 та D_2, D_3 дорівнює β . Відповідно до принципу скалярного добутку та формули зворотної тригонометричної функції можна отримати:

$$\beta = \arccos\left(\frac{|\overrightarrow{D_1D_2} \cdot \overrightarrow{D_2D_3}|}{|\overrightarrow{D_1D_2}| |\overrightarrow{D_2D_3}|}\right) \quad (22)$$

Відповідно до формули векторного добутку, можна побачити, що одиничний вектор ε_{FE} з $\overrightarrow{FE}$ може бути виражений як:

$$\varepsilon_{FE} = \frac{|\overrightarrow{D_1D_2} \cdot \overrightarrow{D_2D_3} \cdot \overrightarrow{D_1D_2}|}{|\overrightarrow{D_1D_2}| |\overrightarrow{D_2D_3}| |\overrightarrow{D_1D_2}| \sin \beta} \quad (23)$$

Вектор $\overrightarrow{EP}$ може бути виражений як:

$$\overrightarrow{EP} = \varepsilon_{EP} |\overrightarrow{EP}| \quad (24)$$

де ε_{EP} – вектор напрямку $\overrightarrow{EP}$, а $|\overrightarrow{EP}|$ – довжина за модулем вектора $\overrightarrow{EP}$.

Згідно з формулою векторного зовнішнього добутку, ε_{EP} може бути виражено як:

$$\varepsilon_{EP} = \frac{|\overrightarrow{D_1D_2} \cdot \overrightarrow{D_2D_3}|}{|\overrightarrow{D_1D_2}| |\overrightarrow{D_2D_3}| \sin \beta} \quad (25)$$

Відповідно до теореми Піфагора, довжина за модулем $|\overrightarrow{EP}|$ вектора $\overrightarrow{EP}$ дорівнює:

$$|\overrightarrow{EP}| = \sqrt{|\overrightarrow{D_1P}|^2 - |\overrightarrow{D_1E}|^2} \quad (26)$$

У результаті ми отримали вирішення прямого завдання кінематики дельта-робота геометричним методом. Якщо відомі кути повороту приводних важелів, то центральне положення рухомої платформи дельта-робота може бути отримано за допомогою рішення прямого завдання кінематики. З геометричного рішення моделі прямої кінематики дельта-робота можна дізнатися, що: геометричний метод може безпосередньо дати правильне рішення без складного процесу обчислень. Він має характеристиками високу точність рішення та високу швидкість і може відповідати вимогам системи управління рухом дельта-робота в реальному часі [18].

Перевірка прямих та зворотних рішень кінематики дельта-робота

відповідно до обраних нами параметрів дельта-робота наведена в таблиці 1. Розв'язання прямого та зворотного завдання кінематики проводиться у програмному забезпеченні Mathcad [12]. Чисельні значення прямого та зворотного рішення положення наведено в таблицях 1 та 2.

Таблиця 1

Чисельні значення зворотного рішення положення дельта-робота

Положення центру важкості рухомої платформи (мм)	Кут приводу двигуна q_1 (градуси)	Кут приводу двигуна q_2 (градуси)	Кут приводу двигуна q_3 (градуси)
(0, 0, -897.9045)	30	30	30
(200,-200,-800)	0.6796	41.0077	12.7038
(30,50,-750)	-2.7179	-2.4904	8.8276

Таблиця 2

Чисельні значення прямого рішення для положення дельта-робота

Кут приводу двигуна q_1 (градуси)	Кут приводу двигуна q_2 (градуси)	Кут приводу двигуна q_3 (градуси)	Положення центру важкості рухомої платформи (мм)
30	30	30	(0, 0, -897.9045)
0.6796	41.0077	12.7038	(200, -200.0002, -800)
-2.7179	-2.4904	8.8276	(30,50,-749.9998)

З таблиць 1 і 2 видно, що коли встановлено положення рухомої платформи, кут повороту, що відповідає кожному з'єднанню, виходить зворотним рішенням. Підставляючи кут повороту в алгоритм прямого рішення, отримуємо положення рухомої платформи майже таке ж, як у таблиці 1, тому можна довести, що наведений вище процес виведення кінематичного моделювання повністю коректний.

Висновки

У цій роботі було проведено аналіз Дельта-робота WSC-800DJ від компанії WARSONCO як об'єкта дослідження. Описано його структуру та задані геометричні параметри, що дозволило створити моделі прямої та зворотної кінематики на основі методу просторової геометрії. Цей підхід забезпечує ефективне розв'язання кінематичних задач без використання складних матричних операцій, що спрощує обчислення та підвищує точність моделювання. Правильність запропонованої моделі підтверджено шляхом чисельного розв'язання задач прямої та зворотної кінематики в обраних положеннях робочої області.

Застосування методу просторової геометрії для моделювання кінематики Дельта-робота надає ряд переваг, зокрема можливість швидкого та точного розрахунку траєкторій руху, що є критичним для оптимізації роботи в промислових умовах. Це рішення дозволяє легко адаптувати модель до робіт з іншими геометричними параметрами (наприклад, зміна довжини ланок, радіусів бази чи платформи), тим самим розширюючи сферу застосування таких систем.

Наприклад, за допомогою цього методу можна проектувати варіанти Дельта-роботів для вирішення більш широкого кола промислових завдань, таких як високошвидкісне сортування в харчовій чи фармацевтичній галузях, автоматизоване пакування в логістиці або точне маніпулювання в електроніці. Крім того, простота методу полегшує інтеграцію з програмним забезпеченням для симуляції та керування, сприяючи розвитку гнучких роботизованих систем. Подальші дослідження можуть бути спрямовані на врахування динамічних аспектів та інтеграцію з системами машинного зору для підвищення автономності роботів.

Список літератури

1. Конструювання промислових роботів [Текст]: навч. посіб. / Г. І. Костюк, О. О. Баранов, Ю. В. Широкий. — Харків: Нац. аерокосм. ун-т ім. М. Є. Жуковського «Харків. авіац. ін-т», 2020. — 136 с.
2. Mishra, S. K., Kumar, C. S. A novel flexure-based Delta micromanipulator with low parasitic motions [Text] / S. K. Mishra, C. S. Kumar // *Sādhanā*. — 2023. — Vol. 48. — № 1. <https://doi.org/10.1007/s12046-022-02067-y>.
3. Cretescu, N., Neagoe, M., Saulescu, R. Dynamic Analysis of a Delta Parallel Robot with Flexible Links and Joint Clearances [Text] / N. Cretescu, M. Neagoe, R. Saulescu // *Applied Sciences*. — 2023. — Vol. 13, № 11.
4. Grabiec, J., Pajor, M., Dunaj, P. Finite Element Modeling of Dynamic Properties of the Delta Robot with Base Frame [Text] / J. Grabiec, M. Pajor, P. Dunaj // *Materials*. — 2022. — Vol. 15, № 19. <https://doi.org/10.3390/ma15196797>.
5. Kansal, S., Mukherjee, S. Vision-based kinematic analysis of the Delta robot for object catching [Text] / S. Kansal, S. Mukherjee // *Robotica*. — 2022. — Vol. 40, Issue 6, pp. 2010-2030. <https://doi.org/10.1017/S0263574721001491>.
6. Kuo, Y.-L. Mathematical modeling and analysis of the Delta robot with flexible links [Text] / Y.-L. Kuo // *Computers & Mathematics with Applications*. — 2016. — Vol. 71, pp. 1973-1989. <https://doi.org/10.1016/j.camwa.2016.03.018>.
7. Wu, M., Mei, J., Zhao, Y., Niu, W. Vibration reduction of delta robot based on trajectory planning [Text] / M. Wu, J. Mei, Y. Zhao, W. Niu // *Mechanism and Machine Theory*. — 2020. — Vol. 153. <https://doi.org/10.1016/j.mechmachtheory.2020.104004>.
8. Kermanian, A., Kamali, E. A., Taghvaeipour, A. Dynamic analysis of flexible parallel robots via enhanced co-rotational and rigid finite element formulations [Text] / A. Kermanian, E. A. Kamali, A. Taghvaeipour // *Mechanism and Machine Theory*. — 2019. — Vol. 139. <https://doi.org/10.3390/app13116693>.
9. Automated navigation system for a marking machine. / Ruslan Avdeev, Yurii Shyrokyi, Irina Romanova // 14th International Doctoral Students Workshop on Logistics. 22 June 2021 Magdeburg. Institute of Logistics and Material Handling Systems — 2021. — p. 7–11.
10. Li, Y., Shang, D., Fan, X., Liu, Y. Motion reliability analysis of the Delta parallel robot considering mechanism errors [Text] / Y. Li, D. Shang, X. Fan, Y. Liu // *Mathematical Problems in Engineering*. — 2019. <https://doi.org/10.1155/2019/3501921>.
11. Development of a manipulator for fully automated the process of charging electric vehicles [Текст] / I. Myglovets, N. Rudenko, Iur. Sysoiev, Y. Shyrokyi // Відкриті інформаційні та комп'ютерні інтегровані технології. — 2023. — Вип. 97. — С. 80-93. <https://doi.org/10.32620/oikit.2023.97.05>.
12. Конструювання устаткування для автоматизованого виробництва.

Захватні пристрої промислових роботів [Текст] : навч. посіб. / Ю. В. Широкий, Т. О. Постельник — Харків : Нац. аерокосм. ун-т ім. М. Є. Жуковського «Харків. авіац. ін-т», 2021. — 88 с.

13. Brodtmann, N. Kinematics of Serial Robotics - Algorithms for simplified calculation of Direct & Inverse Kinematics in a Consistent Coordinate Reference system / N. Brodtmann, D. Schilberg. — Emerging Technologies and Future of Work. AHFE (2023) International Conference : New York, USA. — 2023. — Vol. 117. — p. 34-38.

14. Wu Y., Yang Z., Fu Z. et al. Kinematics and dynamics analysis of a novel five-degrees-of-freedom hybrid robot // Int. J. Adv. Rob. Sys. 2017. V. 14. № 3.

15. Design of the manipulator control system for charger complex for electric vehicles / Ihor Myhlovets, Yurii Shyrokyi, Nataliya Rudenko // 15th International Doctoral Students Workshop on Logistics (2022) Magdeburg, 2022, — P.50.

16. Corke, P. I. A Simple and Systematic Approach to Assigning Denavit–Hartenberg Parameters / P. I. Corke // IEEE Transactions on Robotics. — 2007. — Vol. 23, Iss. 3. — pp. 590-594.

17. Martínez, O. Comparing Methods Using Homogeneous Transformation Matrices for Kinematics Modeling of Robot Manipulators / O. Martínez, R. Campa. — Multibody Mechatronic Systems : Springer, Cham. — 2021. — Vol 94. — p. 127-136.

18. Robotic bicycle parking with autonomous electric power system / N. Rudenko, Y. Shyrokyi // Відкриті інформаційні та комп'ютерні інтегровані технології, збірник наукових праць — Харків: Нац. аерокосм. ун-т "ХАІ", 2021. — Вип. 91 С.150-159. <https://doi.org/10.32620/oikit.2021.91.11>.

19. Математичні основи робототехнічних систем [Текст] : навч. посіб. / О. О. Баранов, Н. В. Руденко, Ю. В. Широкий. — Харків : Нац. аерокосм. ун-т ім. М. Є. Жуковського "Харків. авіац. ін-т", 2021. — 224 с.

20. Аналіз можливості керування дельта-роботом за допомогою PID-регулятора [Текст] / Семененко Ю.О. Семененко О.Д. / Тези 38-ї міжнародної науково-практичної конференції «Інформаційно-керуючі системи на залізничному транспорті». — 9-10 жовтня УкрДУЗТ, 2025 р., м. Харків. Р 2-3.

21. Diagnostics Laboratory Automation – Archiving Vacuum Tubes Using a Low-Cost Gantry Robot / R. P. Badiger; V. N. Patil; S. Marathe; N. Ananya. — International Conference on Control, Automation and Robotics (ICCAR) : Orchard District, Singapore. — 2024. — p. 159-165.

22. <https://www.warsonco-robot.com/delta-robot/#benefits>

References

1. Construction of Industrial Robots [Text]: textbook / H. I. Kostiuk, O. O. Baranov, Yu. V. Shyrokyi. — Kharkiv: National Aerospace University named after M. Ye. Zhukovsky "Kharkiv Aviation Institute", 2020. — 136 p.

2. Mishra, S. K., Kumar, C. S. A novel flexure-based Delta micromanipulator with low parasitic motions [Text] / S. K. Mishra, C. S. Kumar // Sādhanā. — 2023. — Vol. 48. — № 1. <https://doi.org/10.1007/s12046-022-02067-y>.

3. Cretescu, N., Neagoe, M., Saulescu, R. Dynamic Analysis of a Delta Parallel Robot with Flexible Links and Joint Clearances [Text] / N. Cretescu, M. Neagoe, R. Saulescu // Applied Sciences. — 2023. — Vol. 13, № 11.

4. Grabiec, J., Pajor, M., Dunaj, P. Finite Element Modeling of Dynamic Properties of the Delta Robot with Base Frame [Text] / J. Grabiec, M. Pajor, P. Dunaj // Materials. — 2022. — Vol. 15, № 19. <https://doi.org/10.3390/ma15196797>.

5. Kansal, S., Mukherjee, S. Vision-based kinematic analysis of the Delta robot

for object catching [Text] / S. Kansal, S. Mukherjee // Robotica. – 2022. – Vol. 40, Issue 6, pp. 2010-2030. <https://doi.org/10.1017/S0263574721001491>.

6. Kuo, Y.-L. Mathematical modeling and analysis of the Delta robot with flexible links [Text] / Y.-L. Kuo // Computers & Mathematics with Applications. – 2016. – Vol. 71, pp. 1973-1989. <https://doi.org/10.1016/j.camwa.2016.03.018>.

7. Wu, M., Mei, J., Zhao, Y., Niu, W. Vibration reduction of delta robot based on trajectory planning [Text] / M. Wu, J. Mei, Y. Zhao, W. Niu // Mechanism and Machine Theory. – 2020. – Vol. 153.

<https://doi.org/10.1016/j.mechmachtheory.2020.104004>.

8. Kermanian, A., Kamali, E. A., Taghvaeipour, A. Dynamic analysis of flexible parallel robots via enhanced co-rotational and rigid finite element formulations [Text] / A. Kermanian, E. A. Kamali, A. Taghvaeipour // Mechanism and Machine Theory. – 2019. – Vol. 139. <https://doi.org/10.3390/app13116693>.

9. Automated navigation system for a marking machine. / Ruslan Avdeev, Yurii Shyrokyi, Irina Romanova // 14th International Doctoral Students Workshop on Logistics. 22 June 2021 Magdeburg. Institute of Logistics and Material Handling Systems – 2021. – p 7-11.

10. Li, Y., Shang, D., Fan, X., Liu, Y. Motion reliability analysis of the Delta parallel robot considering mechanism errors [Text] / Y. Li, D. Shang, X. Fan, Y. Liu // Mathematical Problems in Engineering. – 2019. <https://doi.org/10.1155/2019/3501921>.

11. Development of a manipulator for fully automated the process of charging electric vehicles [Текст] / I. Myglovets, N. Rudenko, Iur. Sysoiev, Y. Shyrokyi // Відкриті інформаційні та комп'ютерні інтегровані технології. – 2023. – Вип. 97. – С. 80-93. Doi: <https://doi.org/10.32620/oikit.2023.97.05>.

12. Design of Equipment for Automated Production. Gripping Devices of Industrial Robots [Text]: textbook / Yu. V. Shyrokyi, T. O. Postelnyk. – Kharkiv: National Aerospace University named after M. Ye. Zhukovsky "Kharkiv Aviation Institute", 2021. – 88 p.

13. Brodtmann, N. Kinematics of Serial Robotics - Algorithms for simplified calculation of Direct & Inverse Kinematics in a Consistent Coordinate Reference system / N. Brodtmann, D. Schilberg. – Emerging Technologies and Future of Work. AHFE (2023) International Conference : New York, USA. – 2023. – Vol. 117. – p. 34-38.

14. Wu Y., Yang Z., Fu Z. et al. Kinematics and dynamics analysis of a novel five-degrees-of-freedom hybrid robot // Int. J. Adv. Rob. Sys. 2017. V. 14. № 3.

15. Design of the manipulator control system for charger complex for electric vehicles / Ihor Myhlovets, Yurii Shyrokyi, Nataliya Rudenko // 15th International Doctoral Students Workshop on Logistics (2022) Magdeburg, 2022. – P.50.

16. Corke, P. I. A Simple and Systematic Approach to Assigning Denavit–Hartenberg Parameters / P. I. Corke // IEEE Transactions on Robotics. – 2007. – Vol. 23, Iss. 3. – pp. 590-594.

17. Martínez, O. Comparing Methods Using Homogeneous Transformation Matrices for Kinematics Modeling of Robot Manipulators / O. Martínez, R. Campa. – Multibody Mechatronic Systems : Springer, Cham. – 2021. – Vol 94. – p. 127-136.

18. Robotic Bicycle Parking with an Autonomous Electric Power System / N. Rudenko, Y. Shyrokyi // Open Information and Computer Integrated Technologies. – Kharkiv: National Aerospace University "KhAI". – 2021. – Issue 91. – pp. 150–159.

19. Mathematical Foundations of Robotic Systems [Text]: textbook / O. O. Baranov, N. V. Rudenko, Yu. V. Shyrokyi. – Kharkiv: National Aerospace University named after M. Ye. Zhukovsky "Kharkiv Aviation Institute", 2021. – 224 p.

20. Analysis of the Possibility of Controlling a Delta Robot Using a PID Controller [Text] / Semenenko Yu. O., Semenenko O. D. // Proceedings of the 38th International Scientific and Practical Conference "Information and Control Systems in Railway Transport". – October 9–10, Ukrainian State University of Railway Transport, 2025, Kharkiv. – pp. 2–3.

21. Diagnostics Laboratory Automation – Archiving Vacuum Tubes Using a Low-Cost Gantry Robot / R. P. Badiger; V. N. Patil; S. Marathe; N. Ananya. – International Conference on Control, Automation and Robotics (ICCAR) : Orchard District, Singapore. – 2024. – p. 159-165.

22. <https://www.warsonco-robot.com/delta-robot/#benefits>

Надійшла до редакції 27.10.2025, розглянута на редколегії 10.11.2025

Investigation of the kinematic characteristics of a delta robot in forward and inverse kinematics problems

The article is devoted to the kinematic analysis of a delta robot, with a focus on solving the forward and inverse kinematics problems. The kinematic analysis of a delta robot primarily examines the relationship between the input angles of the servo-driven actuator arms and the spatial position of the end effector, which determines the accuracy and efficiency of the entire robotic system. Such analysis covers two key aspects: the solution of forward kinematics and the solution of inverse kinematics. The forward kinematics problem of a delta robot involves determining the coordinates of the end effector when the rotation angles of each actuated joint are known. This task is mathematically complex due to the nonlinearity of the equations and the geometric features of the parallel mechanism structure. Conversely, the inverse kinematics problem consists in calculating the rotation angles of all actuators required to achieve a predefined position of the end effector, which is critically important for tasks requiring precise positioning, manipulation, and high-speed movements.

The article provides a detailed examination of the geometric model of the delta robot, presents the mathematical description of the kinematic equations for both forward and inverse kinematics, and analyzes the structural configuration features that affect the workspace, stiffness, and positioning accuracy. The issue of structural deformability becomes especially relevant in cases where the robot operates with high accelerations or under varying loads. Even small deviations in the geometry of the links may lead to accumulated errors, complicating the achievement of stable and repeatable positioning. To minimize the impact of such factors, thorough analysis of the kinematic model, refinement of stiffness parameters, and the application of compensation methods in control systems are required. The obtained results contribute to improving the accuracy of delta-robot control and optimizing its performance under high dynamic loads, making the presented research valuable for engineers, developers of robotic systems, and researchers in the field of mechatronics.

Keywords: Delta robot, parallel mechanisms, kinematic analysis, forward kinematics, inverse kinematics, mathematical modeling.

Відомості про авторів:

Широкий Юрій Вячеславович – к.т.н., доцент, кафедра теоретичної механіки, машинознавства та роботомеханічних систем, Національний аерокосмічний університет «Харківський авіаційний інститут» м. Харків, Україна;

i.shyrokyi@khai.edu; ORCID: <https://orcid.org/0000-0002-4713-0334>.

Сисоєв Юрій Олександрович – д.т.н., старший науковий співробітник, професор, кафедра теоретичної механіки, машинознавства та роботомеханічних систем, Національний аерокосмічний університет «Харківський авіаційний інститут», м. Харків, Україна; i.sysoiev@khai.edu; ORCID: <https://orcid.org/0000-0001-5006-8546>.

Семененко Юрій Олександрович – к.т.н., доцент, кафедра електроенергетики, електротехніки та електромеханіки, Український державний університет залізничного транспорту, м. Харків, Україна; semenenko_jo@kart.edu.ua. ORCID: <https://orcid.org/0000-0001-9422-3528>.

Семененко Ольга Діонісіївна – асистент, кафедра теоретичної механіки, машинознавства та роботомеханічних систем, Національний аерокосмічний університет «Харківський авіаційний інститут», o.semenenko@khai.edu, ORCID: <https://orcid.org/0009-0001-8425-562X>.

Сорока Анастасія Сергіївна – студентка, кафедра теоретичної механіки, машинознавства та роботомеханічних систем, Національний аерокосмічний університет «Харківський авіаційний інститут», м. Харків, Україна, a.soroka@student.khai.edu. ORCID: <https://orcid.org/0009-0005-3166-4621>.

Ковальов Микита Павлович – студент, кафедра теоретичної механіки, машинознавства та роботомеханічних систем, Національний аерокосмічний університет «Харківський авіаційний інститут», м. Харків, Україна, m.p.kovalov@student.khai.edu. ORCID: <https://orcid.org/0009-0009-2631-9638>.

About the authors:

Yurii Shyrokyi – Doctor of Philosophy, Assistant-Professor of Department of Theoretical Mechanics, Engineering and Robomechanical Systems, National Aerospace University “Kharkiv Aviation Institute”, Kharkiv, Ukraine; i.shyrokyi@khai.edu; ORCID: <https://orcid.org/0000-0002-4713-0334>.

Yurii Sysoiev – Doctor of Technical Sciences, Professor of Department of Theoretical Mechanics, Engineering and Robotic Systems, National Aerospace University “Kharkiv Aviation Institute”, Kharkiv, Ukraine, e-mail: i.sysoiev@khai.edu, ORCID: <https://orcid.org/0000-0001-5006-8546>, Scopus Author ID: 55886163000.

Yurii Semenko – Doctor of Philosophy, Associate Professor of the Department of Electrical Power Engineering, Electrical Engineering and Electromechanics, Ukrainian State University of Railway Transport, Kharkiv, Ukraine; semenenko_jo@kart.edu.ua. ORCID iD: <https://orcid.org/0000-0001-9422-3528>.

Olha Semenko – Assistant at the Department of Theoretical Mechanics, Machine Science and Robotic Mechanical Systems, National Aerospace University “Kharkiv Aviation Institute”, o.semenenko@khai.edu. ORCID: <https://orcid.org/0009-0001-8425-562X>.

Anastasiya Soroka – Student of the Department of Theoretical Mechanics, Mechanical Engineering and Robotic Mechanical Systems, National Aerospace University “Kharkiv Aviation Institute”, Kharkiv, Ukraine, a.soroka@student.khai.edu. ORCID: <https://orcid.org/0009-0005-3166-4621>.

Mykyta Kovalov – Student of the Department of Theoretical Mechanics, Mechanical Engineering and Robotic Mechanical Systems, National Aerospace University “Kharkiv Aviation Institute”, Kharkiv, Ukraine, m.p.kovalov@student.khai.edu. ORCID: <https://orcid.org/0009-0009-2631-9638>.