

Аналіз напружено-деформованого стану консольного перфорованого шару з циліндричною врізаною опорою

Національний аерокосмічний університет «Харківський авіаційний інститут»

У статті представлено аналіз напружено-деформованого стану (НДС) консольного перфорованого шару, що контактує з жорсткою циліндричною врізаною опорою. Такі елементи конструкцій широко застосовуються в авіаційній, аерокосмічній техніці та загальному машинобудуванні для зменшення ваги, забезпечення доступу або виконання специфічних функціональних завдань. Наявність отворів та опор суттєво змінює НДС, призводячи до локальної концентрації напружень, що може стати причиною передчасного руйнування. Для дослідження розроблено математичну модель на основі тривимірних рівнянь теорії пружності. Для розв'язання крайової задачі застосовано узагальнений метод Фур'є, який дозволяє з високою точністю задовольнити граничні умови на всіх поверхнях (площинах шару, поверхнях отворів та на межі контакту з опорою). Задоволення змішаних граничних умов призводить до нескінченної системи інтегро-алгебраїчних рівнянь відносно невідомих коефіцієнтів. Шляхом аналітичних перетворень ця система зводиться до нескінченної системи лінійних алгебраїчних рівнянь другого роду, до якої застосовується метод редукції, що гарантує високу точність результатів. В рамках роботи проведено детальне чисельне дослідження для конкретної конфігурації: шару з ABS пластику з п'ятьма паралельними циліндричними порожнинами, одна з яких виконує роль жорсткого закріплення. Розглянуто випадок дії локалізованого нормального навантаження на верхній поверхні шару. Проаналізовано детальні картини розподілу всіх компонент тензора напружень. Результати демонструють складний тривимірний характер НДС, що виникає внаслідок суперпозиції ефектів від згину, розтягу/стиску та значного взаємного впливу концентраторів напружень. Встановлено, що розподіл напружень є суттєво асиметричним як відносно поверхонь шару, так і для кожної порожнини індивідуально, що підкреслює неможливість застосування спрощених моделей. Виявлено зони максимальної концентрації напружень, які є критично важливими з точки зору оцінки міцності. Розроблений аналітико-чисельний підхід дозволяє з високою точністю отримувати надійні дані про розподіл напружень та переміщень, що є важливим для верифікації результатів, отриманих за допомогою чисельних методів. Робота має значну практичну цінність для інженерів-проектувальників, надаючи ефективний інструмент для розрахунку міцності, оптимізації конструкцій та забезпечення їх експлуатаційної надійності.

Ключові слова: напружено-деформований стан; рівняння Ламе; узагальнений метод Фур'є; шар з циліндричними порожнинами;

Вступ

Сучасний розвиток авіаційної та аерокосмічної техніки, а також загального машинобудування, нерозривно пов'язаний із застосуванням просторових елементів конструкцій, що містять різного роду концентратори напружень. Перфоровані елементи, зокрема, є невід'ємною частиною силових конструкцій, таких як крила, фюзеляжі літальних апаратів, корпуси ракет та елементи двигунів [1]. Вони використовуються для зменшення ваги конструкції, забезпечення доступу для технічного обслуговування, прокладання комунікацій або для виконання специфічних функціональних завдань, наприклад, охолодження. Наявність отворів та вирізів суттєво змінює напружено-деформований стан (НДС) елемента, призводячи до локальної концентрації напружень, що може стати

причиною передчасного руйнування конструкції.

Точний аналіз НДС таких елементів є ключовою задачею на етапі проєктування, що забезпечує їх надійність, довговічність та безпеку експлуатації. Для визначення механічних характеристик матеріалів та оцінки їх поведінки під навантаженням використовуються стандартні методики механічних випробувань [2, 3]. Розрахункові дослідження НДС проводяться з використанням як чисельних, так і аналітичних методів. Найбільшого поширення набув метод скінченних елементів [4], реалізований у багатьох програмних комплексах, таких як Ansys [5]. Метод скінченних елементів дозволяє моделювати конструкції складної геометрії та враховувати різноманітні фізичні ефекти. Разом з тим, цей метод має ряд відомих недоліків (складність створення відповідної сітки скінчених елементів, точного визначення граничних умов, вибір типу скінчених елементів, тощо). Тож результати методу скінченних елементів є лише наближеними і мають бути верифіковані за допомогою експериментальних даних або аналітичних розрахунків, коли це можливо.

Для певних класів задач, що мають канонічну або близьку до неї форму, перевагу мають аналітичні [6 – 9] та аналітико-чисельні методи [10 – 12]. Вони дозволяють отримати розв'язок у загальному вигляді, що дає змогу проводити параметричний аналіз та глибше зрозуміти фізичну картину розподілу напружень і деформацій. Порівняння методу скінчених елементів з аналітичними методами показує, що ці підходи є комплементарними, а не взаємозамінними, кожен з яких має свої переваги та недоліки.

Модель, що розглядається в поданій роботі, є типовою для багатьох інженерних застосувань. Зокрема, вона може моделювати ділянку силової панелі з отвором, підкріпленням жорстким елементом, або з'єднання елементів конструкції. Складність розв'язання такої задачі в рамках класичної теорії пружності полягає у необхідності одночасного задоволення граничних умов на поверхнях шару, поверхнях отворів та на межі контакту з опорою. Особливо ефективним для розв'язання подібних тривимірних граничних задач для тіл зі складною геометрією є узагальнений метод Фур'є [13]. Цей метод дозволяє будувати точні розв'язки рівнянь теорії пружності в різних системах координат, пов'язаних з кожним із граничних поверхонь, та забезпечувати їх "зшивання" за допомогою спеціальних теорем додавання для базисних функцій [14].

За допомогою узагальненого методу Фур'є розв'язані задачі для шару з однією циліндричною порожниною в переміщеннях [15], в напруженнях [16] та змішаного типу [17]. Але методами, що представлені в роботах [15 – 17] може враховуватися тільки одна порожнина. В роботах [18, 19] застосовується перехід між базисними розв'язками декількох циліндричних порожнин, що дало змогу розв'язати задачу теорії пружності для шару з трьома порожнинами, але граничні умови та обмежена кількість циліндричних неоднорідностей, що застосовуються в цих роботах, не дає можливості отримати НДС перфорованого шару (з багатьма порожнинами) з врізаною циліндричною опорою. Шар з однією врізаною циліндричною опорою та однією трубою розглядався в роботі [20], на двох циліндричних врізаних опорах розглядався в роботах [21 – 23]. Але методи, застосовані в роботах [20 – 23] не дозволяють розв'язати задачу для шару з однією врізаною циліндричною опорою та заданою кількістю циліндричних порожнин.

Метою даної статті є розробка математичної моделі та ефективного аналітико-чисельного підходу на основі узагальненого методу Фур'є для аналізу

напружено-деформованого стану консольного перфорованого шару (шару із заданою кількістю циліндричних порожнин), що знаходиться в умовах контакту з жорсткою циліндричною опорою. Такий підхід дозволить отримати надійні дані про розподіл напружень і переміщень в елементі конструкції, що є критично важливим для оцінки його міцності та ресурсу в авіаційній та аерокосмічній галузях. Дослідження напружено-деформованого стану конструктивних елементів, що є предметом даної статті, безпосередньо відповідає декільком пріоритетним напрямкам наукових досліджень і науково-технічних розробок, затвердженим Кабінетом Міністрів України, особливо з огляду на потреби держави у період воєнного стану [24].

1. Постановка задачі

Шар має поздовжнє циліндричне жорстке закріплення та n циліндричних поздовжніх порожнин (рис. 1). Жорстке закріплення представлене як порожнина із заданими на ній переміщеннями. Всі порожнини розглядаються в локальних циліндричних координатах (ρ_p, φ_p, z) , де p – номер порожнини), шар розглядається у декартовій системі координат (x, y, z) , яка співпадає з системою координат «закріпленої» порожнини $p = 1$.

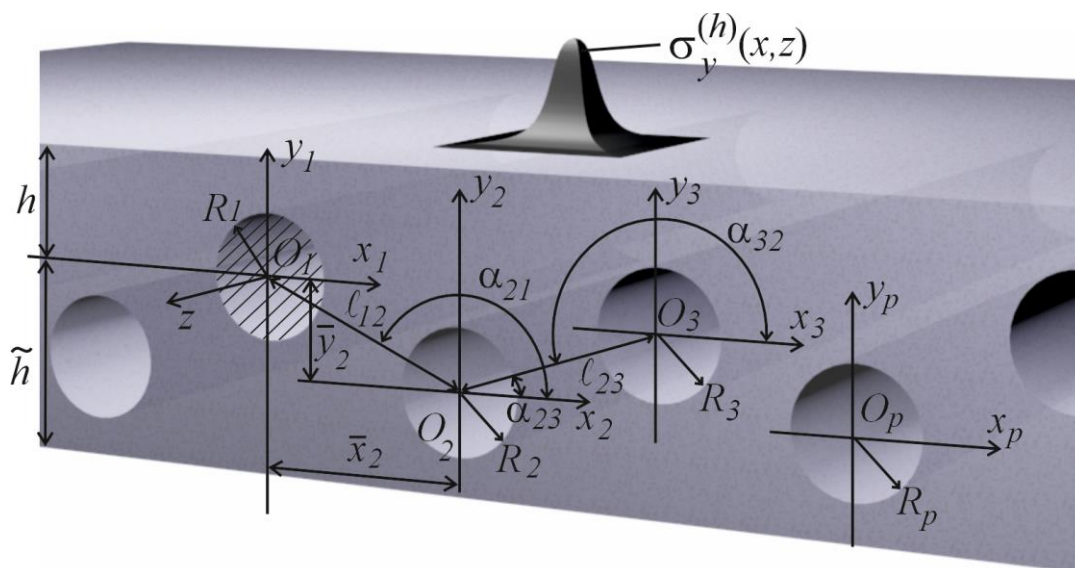


Рис. 1. Шар з циліндричною врізаною опорою та циліндричними порожнинами

Радіуси порожнин позначено R_p . Відстань до меж шару $y = h$ та $y = -\tilde{h}$.

Розв'язання задачі представлено у вигляді рівнянь Ламе, із заданими граничними умовами:

– на верхній та нижній межах шару задані напруження

$$F\vec{U}(x, z)|_{y=h} = \vec{F}_h^0(x, z), \quad F\vec{U}(x, z)|_{y=-\tilde{h}} = \vec{F}_{\tilde{h}}^0(x, z),$$

де

$$\begin{aligned} \vec{F}_h^0(x, z) &= \tau_{yx}^{(h)} \vec{e}_x + \sigma_y^{(h)} \vec{e}_y + \tau_{yz}^{(h)} \vec{e}_z, \\ \vec{F}_{\tilde{h}}^0(x, z) &= \tau_{yx}^{(\tilde{h})} \vec{e}_x + \sigma_y^{(\tilde{h})} \vec{e}_y + \tau_{yz}^{(\tilde{h})} \vec{e}_z. \end{aligned} \quad (1)$$

– на поверхні циліндричної порожнини ($\rho = 1$) задані переміщення

$$\vec{U}_1(\varphi_1, z)|_{\rho_1=\tilde{R}_1} = \vec{U}_1^0(\varphi_1, z) = U_\rho^{(1)}\vec{e}_\rho + U_\varphi^{(1)}\vec{e}_\varphi + U_z^{(1)}\vec{e}_z, \quad (2)$$

– на поверхнях інших порожнин задані напруження

$$F\vec{U}(\varphi_p, z)|_{\rho_p=R_p} = \vec{F}_p^0(\varphi_p, z) = \sigma_\rho^{(p)}\vec{e}_\rho + \tau_{\rho\varphi}^{(p)}\vec{e}_\varphi + \tau_{\rho z}^{(p)}\vec{e}_z, p \neq 1 \quad (3)$$

де $\vec{U}$ – переміщення в шарі;

$$F\vec{U} = 2 \cdot G \cdot \left[\frac{\sigma}{1-2\sigma} \vec{n} \cdot \text{div} \vec{U} + \frac{\partial}{\partial n} \vec{U} + \frac{1}{2} (\vec{n} \times \text{rot} \vec{U}) \right] - \text{оператор напруження.}$$

Всі задані функції є швидко спадаючими від початку системи координат.

2. Метод розв'язання

Рівняння Ламе представлено у вигляді, який запропоновано в роботі [19], тільки замість заданих переміщень на циліндричних порожнинах, задана змішана система граничних умов:

$$\begin{aligned} \vec{U} = & \sum_{p=1}^n \sum_{k=1}^3 \int_{-\infty}^{\infty} \sum_{m=-\infty}^{\infty} B_{k,m}^{(p)}(\lambda) \cdot \vec{S}_{k,m}(\rho_p, \varphi_p, z; \lambda) d\lambda + \\ & + \sum_{k=1}^3 \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \left(H_k(\lambda, \mu) \cdot \vec{u}_k^{(+)}(x, y, z; \lambda, \mu) + \tilde{H}_k(\lambda, \mu) \cdot \vec{u}_k^{(-)}(x, y, z; \lambda, \mu) \right) d\mu d\lambda, \end{aligned} \quad (4)$$

де $H_k(\lambda, \mu)$, $\tilde{H}_k(\lambda, \mu)$, $B_{k,m}^{(p)}(\lambda)$ це $n \cdot 3 + 6$ невідомих функцій, які необхідно знайти з крайових умов (1) – (3); $\vec{S}_{k,m}$, $\vec{u}_k^{(+)}$, $\vec{u}_k^{(-)}$ це базисні розв'язки рівняння Ламе, які представлені у вигляді [13]:

$$\vec{u}_k^{\pm}(x, y, z; \lambda, \mu) = N_k^{(d)} e^{i(\lambda z + \mu x) \pm \gamma y};$$

$$\vec{R}_{k,m}(\rho, \varphi, z; \lambda) = N_k^{(p)} I_m(\lambda \rho) e^{i(\lambda z + m \varphi)};$$

$$\vec{S}_{k,m}(\rho, \varphi, z; \lambda) = N_k^{(p)} \left[(\text{sign } \lambda)^m K_m(|\lambda| \rho) \cdot e^{i(\lambda z + m \varphi)} \right]; k = 1, 2, 3;$$

$$N_1^{(d)} = \frac{1}{\lambda} \nabla; N_2^{(d)} = \frac{4}{\lambda} (v-1) \vec{e}_2^{(1)} + \frac{1}{\lambda} \nabla(y \cdot); N_3^{(d)} = \frac{i}{\lambda} \text{rot}(\vec{e}_3^{(1)} \cdot); N_1^{(p)} = \frac{1}{\lambda} \nabla;$$

$$N_2^{(p)} = \frac{1}{\lambda} \left[\nabla \left(\rho \frac{\partial}{\partial \rho} \right) + 4(v-1) \left(\nabla - \vec{e}_3^{(2)} \frac{\partial}{\partial z} \right) \right]; N_3^{(p)} = \frac{i}{\lambda} \text{rot}(\vec{e}_3^{(2)} \cdot);$$

$$\gamma = \sqrt{\lambda^2 + \mu^2}, -\infty < \lambda, \mu < \infty,$$

де v – коефіцієнт Пуассона; $I_m(x)$, $K_m(x)$ – модифіковані функції Бесселя.

Для запису рівнянь (4) в локальних системах координат, застосовані формули переходу між базисними розв'язками рівняння Ламе [13]:

- від зовнішніх розв'язків для циліндра $\vec{S}_{k,m}$ до розв'язків для шару $\vec{u}_k^{(-)}$ (при $y > 0$) та $\vec{u}_k^{(+)}$ (при $y < 0$)

$$\begin{aligned}\vec{S}_{k,m}(\rho, \varphi, z; \lambda) &= \frac{(-i)^m}{2} \int_{-\infty}^{\infty} \omega_{\mp}^m \cdot e^{-i\mu\bar{x}_p \pm \gamma\bar{y}_p} \cdot \vec{u}_k^{(\mp)} \cdot \frac{d\mu}{\gamma}, \quad k=1, 3; \\ \vec{S}_{2,m}(\rho, \varphi, z; \lambda) &= \frac{(-i)^m}{2} \int_{-\infty}^{\infty} \omega_{\mp}^m \cdot \left(\left(\pm m \cdot \mu - \frac{\lambda^2}{\gamma} \pm \lambda^2 \bar{y}_p \right) \vec{u}_1^{(\mp)} \mp \lambda^2 \vec{u}_2^{(\mp)} + \right. \\ &\quad \left. \pm 4\mu(1-\nu) \vec{u}_3^{(\mp)} \right) \frac{e^{-i\mu\bar{x}_p \pm \gamma\bar{y}_p} d\mu}{\gamma^2},\end{aligned} \quad (5)$$

де $\gamma = \sqrt{\lambda^2 + \mu^2}$, $\omega_{\mp}(\lambda, \mu) = \frac{\mu \mp \gamma}{\lambda}$, $m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$;

- від розв'язків шару $\vec{u}_k^{(+)}$ та $\vec{u}_k^{(-)}$ до внутрішніх розв'язків циліндра $\vec{R}_{k,m}$

$$\begin{aligned}\vec{u}_k^{(\pm)}(x, y, z) &= e^{i\mu\bar{x}_p \pm \gamma\bar{y}_p} \cdot \sum_{m=-\infty}^{\infty} (i \cdot \omega_{\mp})^m \vec{R}_{k,m}, \quad (k=1, 3); \\ \vec{u}_2^{(\pm)}(x, y, z) &= e^{i\mu\bar{x}_p \pm \gamma\bar{y}_p} \cdot \sum_{m=-\infty}^{\infty} \left[(i \cdot \omega_{\mp})^m \cdot \lambda^{-2} \left((m \cdot \mu + \lambda^2 \bar{y}_p) \cdot \vec{R}_{1,m} \pm \right. \right. \\ &\quad \left. \left. \pm \gamma \cdot \vec{R}_{2,m} + 4\mu(1-\nu) \vec{R}_{3,m} \right) \right],\end{aligned} \quad (6)$$

де

$$\begin{aligned}\vec{R}_{k,m} &= \vec{b}_{k,m}(\rho, \lambda) \cdot e^{i(m\varphi + \lambda z)}; \\ \vec{b}_{1,n}(\rho, \lambda) &= \vec{e}_{\rho} \cdot I'_n(\lambda\rho) + i \cdot I_n(\lambda\rho) \cdot \left(\vec{e}_{\varphi} \frac{n}{\lambda\rho} + \vec{e}_z \right); \\ \vec{b}_{2,n}(\rho, \lambda) &= \vec{e}_{\rho} \cdot \left[(4\nu - 3) \cdot I'_n(\lambda\rho) + \lambda\rho I''_n(\lambda\rho) \right] + \\ &\quad + \vec{e}_{\varphi} i \cdot m \left(I'_n(\lambda\rho) + \frac{4(\nu - 1)}{\lambda\rho} I_n(\lambda\rho) \right) + \vec{e}_z i \lambda \rho I'_n(\lambda\rho); \\ \vec{b}_{3,n}(\rho, \lambda) &= - \left[\vec{e}_{\rho} \cdot I_n(\lambda\rho) \frac{n}{\lambda\rho} + \vec{e}_{\varphi} \cdot i \cdot I'_n(\lambda\rho) \right];\end{aligned}$$

де $\vec{e}_{\rho}$, $\vec{e}_{\varphi}$, $\vec{e}_z$ – орти в циліндричній системі координат;

- від розв'язків циліндра з номером p до розв'язків циліндра з номером q

$$\vec{S}_{k,m}(\rho_p, \varphi_p, z; \lambda) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \vec{b}_{k,pq}^{mn}(\rho_q) \cdot e^{i(n\varphi_q + \lambda z)}, \quad k=1, 2, 3; \quad (7)$$

$$\begin{aligned}\vec{b}_{1,pq}^{mn}(\rho_q) &= (-1)^n \tilde{K}_{m-n}(\lambda \ell_{pq}) \cdot e^{i(m-n)\alpha_{pq}} \cdot \vec{b}_{1,n}(\rho_q, \lambda); \\ \vec{b}_{3,pq}^{mn}(\rho_q) &= (-1)^n \tilde{K}_{m-n}(\lambda \ell_{pq}) \cdot e^{i(m-n)\alpha_{pq}} \cdot \vec{b}_{3,n}(\rho_q, \lambda); \\ \vec{b}_{2,pq}^{mn}(\rho_q) &= (-1)^n \left\{ \tilde{K}_{m-n}(\lambda \ell_{pq}) \cdot \vec{b}_{2,n}(\rho_q, \lambda) - \frac{\lambda}{2} \ell_{pq} \cdot \right. \\ &\quad \left. \cdot \left[\tilde{K}_{m-n+1}(\lambda \ell_{pq}) + \tilde{K}_{m-n-1}(\lambda \ell_{pq}) \right] \cdot \vec{b}_{1,n}(\rho_q, \lambda) \right\} \cdot e^{i(m-n)\alpha_{pq}},\end{aligned}$$

де α_{pq} – кут між віссю x_p та відрізком ℓ_{pq} ; $\tilde{K}_m(x) = (\text{sign}(x))^m \cdot K_m(|x|)$.

Для знаходження невідомих функцій рівняння (4) сформована система з 18 інтегро-алгебраїчних рівнянь.

Для отримання перших шести рівнянь були використані граничні умови на площинах шару (1). Суть процесу полягала у тому, що спочатку обчислювалися напруження (застосували оператор) для рівняння (4) та виконано подвійне Фур'є-інтегрування для (1), а потім ці вирази прирівняли. Також знадобилося перевести базисні розв'язки $\vec{S}_{k,m}$ з циліндричних координат у декартові через $\vec{u}_k^{(\pm)}$, використовуючи формули (5).

Три рівняння отримано з граничних умов на поверхні першої порожнини. Для цього, до виразу (2) застосували інтеграл Фур'є по осі z та ряд Фур'є по куту φ , а отримані результати підставили у ліву частину (4). Крім того, базисні розв'язки $\vec{u}_k^{(\pm)}$ з декартової системи координат були перетворені через $\vec{R}_{k,m}$ у циліндричну за допомогою формул переходу (6), всі базисні розв'язки $\vec{S}_{k,m}$ для порожнин $p \neq 1$ перетворені у локальну першу циліндричну систему координат через $\vec{R}_{k,m}$ за допомогою формул переходу (7).

Решта $(n-1) \cdot 3$ рівнянь описують граничні умови напружень для всіх порожнин, окрім першої ($p \neq 1$). Щоб їх отримати, для кожної порожнини $p \neq 1$ вираз (2) піддавали Фур'є-інтегруванню по осі z та Фур'є-розкладу по куту φ . Отримані результати підставляли у ліву частину рівнянь (4), до яких перед цим застосували оператор напружень. Всі базисні розв'язки спочатку трансформували з декартової у циліндричну систему за формулами (6), а також базисні розв'язки $\vec{S}_{k,m}$ для всіх інших порожнин ($q \neq p$) переводили у локальну циліндричну систему координат за допомогою формул (7).

На основі перших шести рівнянь виразили коефіцієнти $H_k(\lambda, \mu)$ та $\tilde{H}_k(\lambda, \mu)$ через $B_{k,m}^{(p)}(\lambda)$ і підставили їх в інші отримані рівняння. Після скорочення рядів та інтегралів з обох частин, було сформовано нескінченну систему з $n \cdot 3$ лінійних алгебраїчних рівнянь другого роду. До цієї системи можна застосувати метод редукції. Розв'язавши систему, знайшли невідомі функції $B_{k,m}^{(p)}(\lambda)$. Значення $B_{k,m}^{(p)}(\lambda)$ підставили у вирази для $H_k(\lambda, \mu)$ та $\tilde{H}_k(\lambda, \mu)$.

Таким чином, були знайдені всі невідомі задачі.

3. Чисельні дослідження напруженого стану

Шар має 5 циліндричних порожнин, паралельних між собою і поверхнями шару.

Механічні властивості шару: ABS пластик, коефіцієнт Пуассона $\nu_0 = 0,38$, модуль пружності $E_0 = 1700$ МПа.

Геометричні параметри: циліндричні порожнини розташовані на одній горизонтальній осі ($y=0$), відстань між центрами порожнин $\ell_{12} = \ell_{23} = \ell_{34} = \ell_{45} = 15$ мм, радіуси порожнин $R_p = 15$ мм, відстані до верхньої та нижньої меж шару $h = \tilde{h} = 10$ мм.

На верхній межі шару задані нормальні напруження $\sigma_y^{(h)}(x, z) = -10^8 \cdot (z^2 + 10^2)^{-2} \cdot ((x - b)^2 + 10^2)^{-2}$, $b = \ell_{15} = 60$ мм та нульові

дотичні напруження $\tau_{yx}^{(h)} = \tau_{yz}^{(h)} = 0$, на нижній межі $\tau_{yx}^{(\tilde{h})} = \sigma_y^{(\tilde{h})} = \tau_{yz}^{(\tilde{h})} = 0$.

Жорстке закріплення шару в циліндричній порожнині $p = 1$ представлено у вигляді заданих на ній нульових переміщень $U_\rho^{(1)} = U_\phi^{(1)} = U_z^{(1)} = 0$. На поверхнях інших порожнин задані нульові напруження:

$$\sigma_\rho^{(p)} = \tau_{\rho\phi}^{(p)} = \tau_{\rho z}^{(p)} = 0, p \neq 1.$$

Нескінченна система була зрізана по параметру $m=4$. Точність виконання граничних умов при заданих геометричних параметрах становить не менше ніж 10^{-4} при значеннях від 0 до 1.

Рисунок 2 ілюструє розподіл нормальних компонент напружень σ_x та σ_z на верхній ($y = h$) та нижній ($y = -\tilde{h}$) межах перфорованого шару в перерізі $z = 0$, а також прикладене зовнішнє навантаження σ_y . Аналіз цих кривих дозволяє оцінити вплив перфорації та зовнішнього навантаження на загальний напружений стан конструкції.

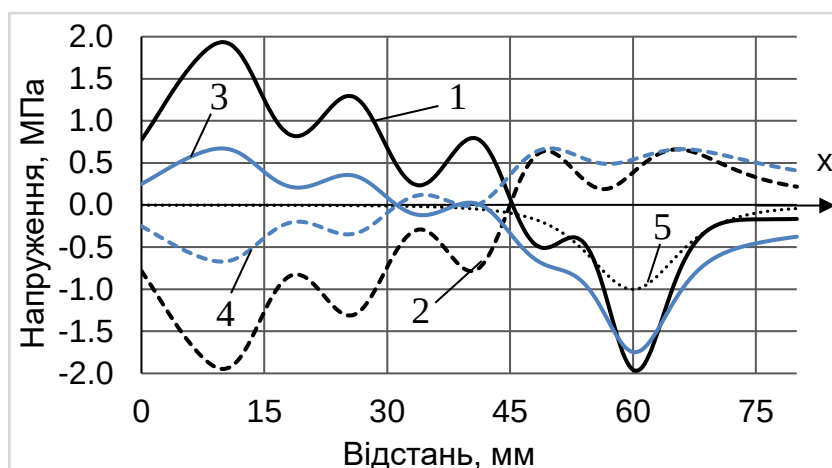


Рис. 2. Напруження на плоских поверхнях шару:

1 – σ_x при $y = h$; 2 – σ_x при $y = -\tilde{h}$; 3 – σ_z при $y = h$; 4 – σ_z при $y = -\tilde{h}$; 5 – σ_y при $y = h$ (задане)

Крива 5 на рис. 2 (σ_y) показує розподіл прикладеного нормального напруження на верхній межі, яке має виражений локальний характер з максимумом в центрі і спадає до країв. Це навантаження є першопричиною виникнення напружень в усьому шарі.

Спостерігається певна асиметрія в розподілі напружень між верхньою (рис. 2, криві 1 і 3) та нижньою (рис. 2, криві 2 і 4) поверхнями. Напруження σ_x на верхній поверхні (рис. 2, крива 1) досягають більших за модулем значень, ніж на нижній, особливо в зоні над отвором 5. Це може свідчити про те, що верхня частина шару зазнає більшого розтягування/стиснення через комбінований ефект згину та локальних деформацій навколо отворів.

Хоча цей графік не показує напруження безпосередньо біля отворів, піки на кривих вказують на зони підвищених напружень на поверхнях, що знаходяться між порожнинами. Ці зони є критичними з точки зору міцності конструкції.

Рисунок 3 надає детальну картину розподілу компонент тензора напружень (радіальних σ_r , тангенціальних σ_ϕ , осьових σ_z та дотичних $\tau_{r\phi}$) по контуру першої, жорстко закріпленої, порожнини ($p = 1$) в перерізі $z = 0$. Аналіз цих напружень є ключовим для оцінки міцності в зоні контакту опори з шаром.

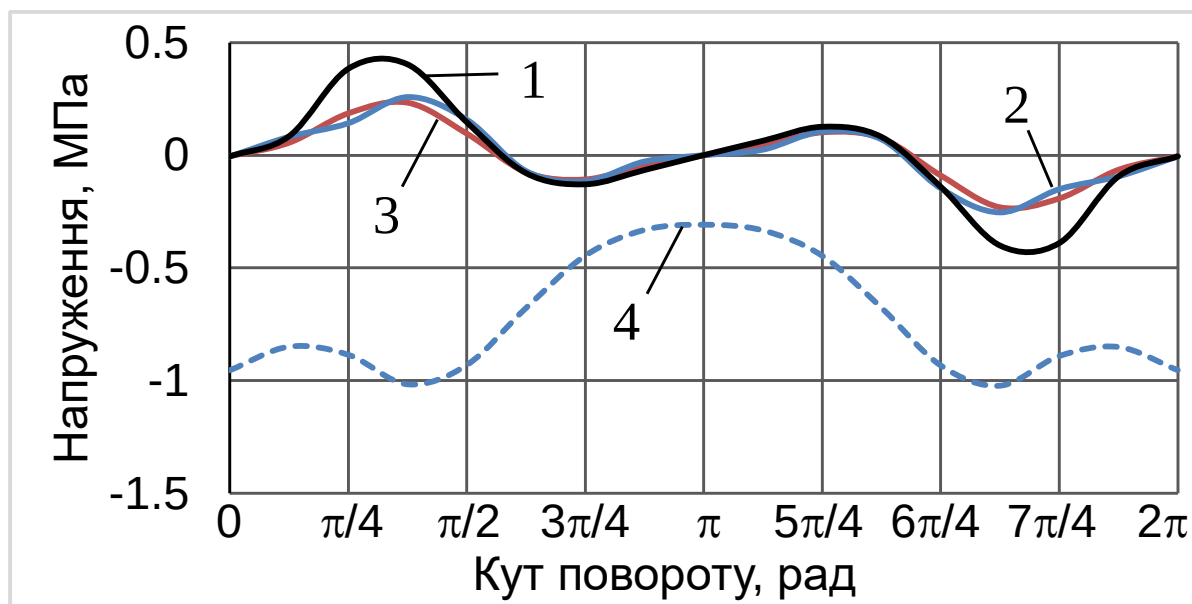


Рис. 3. Напруження на поверхні порожнини $p = 1$:

1 – σ_r ; 2 – σ_ϕ ; 3 – σ_z ; 4 – $\tau_{r\phi}$

Оскільки порожнина $p = 1$ є жорстко закріпленою ($U=0$), виникнення ненульових напружень σ_r та $\tau_{r\phi}$ свідчить про реакцію опори.

Найбільш напруженими є зони, де дотичні напруження $\tau_{r\phi}$ досягають своїх екстремумів (приблизно при $\pi/3$ та $6,5\pi/4$ - стиснення). Ці точки є найбільш імовірними місцями для ініціації руйнування або пластичних деформацій.

Наявність осьових напружень σ_z та близьких до них значень напружень σ_ϕ (рис. 3, крива 3 та 2) підкреслюють тривимірний характер задачі. Ці напруження виникають через ефект Пуассона (поперечна деформація матеріалу) та обмеження деформацій жорсткою опорою. Їх розподіл також є нерівномірним по контуру, що вказує на складну взаємодію між згином та розтягом/стиском шару.

Рисунки 4(а) та 4(б) представляють порівняльний аналіз розподілу

тангенціальних (σ_ϕ) та осьових (σ_z) напружень відповідно по контурах усіх п'яти порожнин в перерізі $z=0$. Ці дані дозволяють оцінити взаємний вплив отворів та нерівномірність розподілу навантаження між ними.

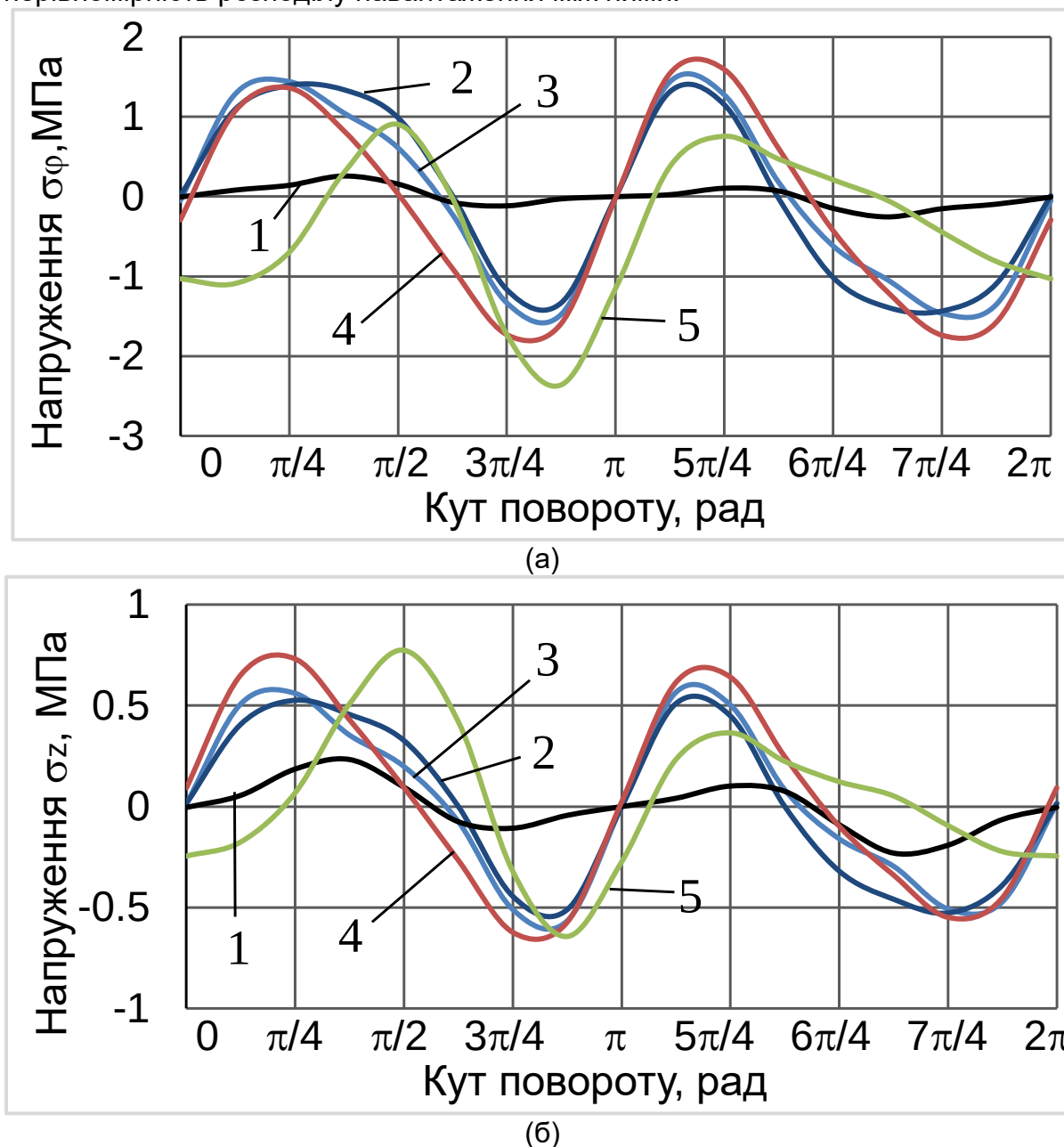


Рис. 4. Напруження σ_ϕ (а) та σ_z (б) на поверхнях порожнин:
1 – на порожнині $p = 1$; 2 – на порожнині $p = 2$; 3 – на порожнині $p = 3$;
4 – на порожнині $p = 4$; 5 – на порожнині $p = 5$

Розподіл напружень відрізняється для кожної порожнини. Криві для центральних порожнин ($p=2, 3, 4$) мають більш симетричний характер, тоді як для крайніх ($p=1$ та $p=5$) спостерігається виражена асиметрія. Це свідчить про сильний взаємний вплив отворів: наявність сусідньої порожнини змінює поле напружень навколо даної.

На рисунку 4(а) видно, що максимальні тангенціальні напруження (коефіцієнт концентрації) є різними для різних отворів. Найбільші за модулем

напруження σ_ϕ спостерігаються на центральних порожнинах та останній ($p = 5$), що знаходяться безпосередньо під зоною прикладання навантаження.

Рисунок 4(б) показує, що осьові напруження також значно варіюються. Для першої порожнини (крива 1) вони є найменшими. Для інших порожнин розподіл σ_z спостерігається з більшою амплітудою. Цей аналіз важливий для розуміння тривимірної втрати стійкості (випучування) тонких перемичок між отворами.

Сукупність даних з рисунків рис. 3, рис. 4(а) та рис. 4(б) вказує на те, що навантаження між порожнинами розподіляється нерівномірно. Перша порожнина (опора) несе на собі основну частину дотичних напружень $\tau_{r\phi}$, тоді як інші порожнини сприймають тангенціальні напруження σ_ϕ та осьові напруження σ_z .

Рисунок 5 деталізує розподіл нормальних напружень σ_x , σ_z та заданого σ_y вздовж осі z на верхній поверхні шару в точці $x = 60$ мм, що відповідає положенню над п'ятою порожниною. Цей графік ілюструє локальний ефект від прикладеного навантаження в тривимірному просторі.

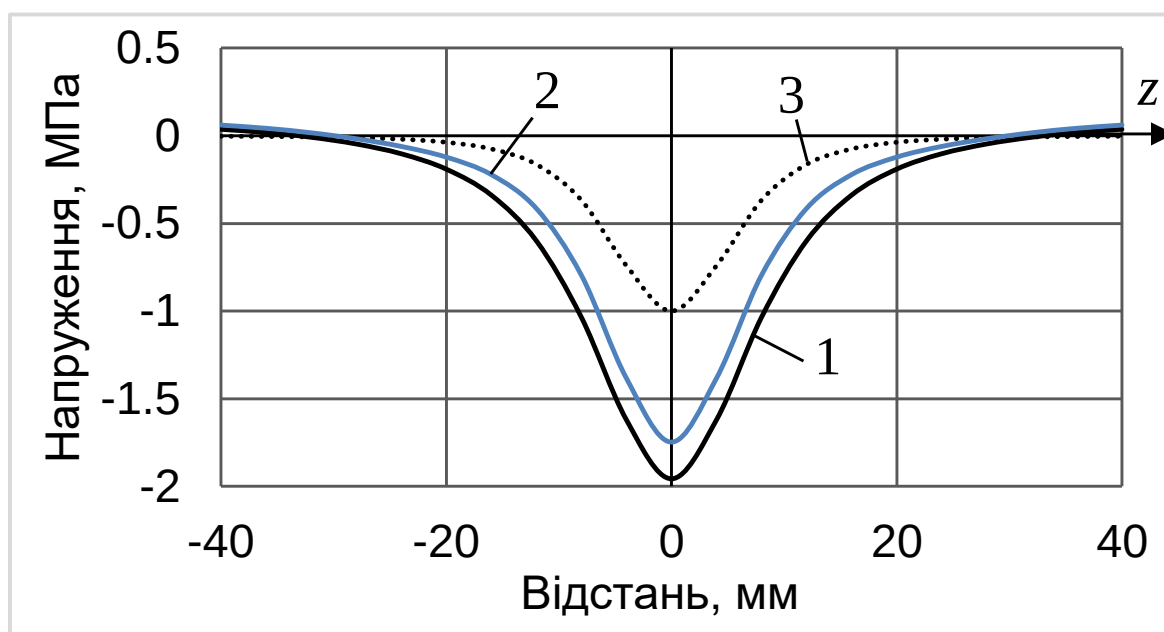


Рис. 5. Напруження вздовж осі z на верхній межі шару:
1 – σ_x ; 2 – σ_z ; 3 – σ_y (задане).

Усі три компоненти напружень мають яскраво виражений екстремум при $z=0$, що є центром прикладання зовнішнього хвилеподібного навантаження (рис. 5, крива 3). Це демонструє, що вплив навантаження є сильно локалізованим.

Криві 1 (σ_x) та 2 (σ_z) показують, що локальне вертикальне навантаження σ_y індукує значні напруження в площині шару, які перевищують задане майже вдвічі.

Напруження σ_x та σ_z швидко спадають до нуля при віддаленні від точки $z=0$. Це підтверджує принцип Сен-Венана, згідно з яким локалізоване навантаження створює локалізоване поле напружень, яке швидко затухає на відстані, порівнянній з характерним розміром зони навантаження.

4. Висновки

У роботі розроблено математичну модель та ефективний аналітико-

чисельний підхід для аналізу напружено-деформованого стану (НДС) консольного перфорованого шару з жорсткою циліндричною опорою та системою отворів. Використання узагальненого методу Фур'є дозволило отримати точний розв'язок тривимірної задачі теорії пружності.

Чисельне дослідження моделі з п'ятьма порожнинами, виконане для ABS пластику, показало наступне:

1. Зовнішнє навантаження викликає значні локальні напруження в шарі, які перевищують прикладене майже вдвічі, що підтверджує принцип Сен-Венана.

2. Спостерігається асиметрія в розподілі напружень між верхньою та нижньою поверхнями шару, особливо в зонах над отворами. Це вказує на комбінований ефект згину та локальних деформацій.

3. Розподіл напружень є унікальним для кожної порожнини, що свідчить про сильний взаємний вплив отворів. Криві для центральних порожнин більш симетричні, тоді як для крайніх (опори та зони під навантаженням) спостерігається виражена асиметрія.

4. Найбільш напруженими є зони контакту жорстко закріпленої опори з шаром, де дотичні напруження досягають екстремумів, та зони на центральних і крайніх порожнинах під навантаженням. Ці ділянки є найбільш імовірними місцями для ініціації руйнування.

Розроблений підхід дозволяє отримати надійні дані про розподіл напружень і переміщень, що є критично важливим для оцінки міцності та ресурсу елементів конструкцій в авіаційній та аерокосмічній галузях.

Список літератури

1. Ковель П. П., Бологін А. С., Нагорний Л. В. Аналіз напружено-деформованого стану силових елементів конструкції панелей крила літаків типу Іл-76 за наявності корозійного ураження. *Збірник наукових праць Державного науково-дослідного інституту авіації*. 2021. Вип. 17(24). С. 106–116. DOI: <https://doi.org/10.54858/dndia.2021-17-16>.

2. Golovanevskiy V., Kondratiev A. Elastic properties of steel-cord rubber conveyor belt. *Exp. Tech.* 2021. – Vol. 45, no. 2. P. 217–226. DOI: <https://doi.org/10.1007/s40799-021-00439-3>.

3. ASM Handbook, Volume 8: Mechanical Testing and Evaluation. Materials Park, OH: ASM International, 2023.

4. Zienkiewicz O. C., Taylor R. L., Zhu J. Z. *The Finite Element Method: Its Basis and Fundamentals*. 7th ed. Oxford: Butterworth-Heinemann, 2013.

5. Static Structural Simulation Using Ansys Discovery. URL: <https://courses.ansys.com/index.php/courses/structural-simulation> (дата звернення: 30.09.2025).

6. Савин Г. Н. Распределение напряжений около отверстий. Київ : Наук. думка, 1968. – 891 с.

7. Космодамианский А. С. Теоретическая и прикладная механика. Донецьк : Донец. нац. ун-т, 2001. Вип. 32. 210 с.

8. Подильчук Ю. Н. Трехмерные задачи теории упругости. Київ : Наук. думка, 1979. – 240 с.

9. Гринченко В. Т., Мелешко В. В. Гармонические колебания и волны в упругих телах. Київ : Наук. думка, 1981. – 284 с.

10. Fesenko A., Vaysfel'd N. The Wave Field of a Layer with a Cylindrical Cavity in Structural Integrity. У кн.: *Structural Integrity*. Springer International Publishing,

2019. – P. 277–282. DOI: https://doi.org/10.1007/978-3-030-21894-2_51.

11. Fesenko A., Vaysfel'd N. The dynamical problem for the infinite elastic layer with a cylindrical cavity. *Procedia Structural Integrity*. 2021. – Vol. 33. P. 509–527. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.prostr.2021.10.058>.

12. Jafari M., Chaleshtari M. H. B., Khoramishad H., Altenbach H. Minimization of thermal stress in perforated composite plate using metaheuristic algorithms WOA, SCA and GA. *Composite Structures*. 2023. – Vol. 304. P. 116403. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.compstruct.2022.116403>.

13. Николаев А. Г., Проценко В. С. Обобщенный метод Фурье в пространственных задачах теории упругости. Харків: Нац. аерокосм. ун-т ім. М. Є. Жуковського «ХАІ», 2011. – 344 с.

14. Ukrayinets N., Murahovska O., Prokhorova O. Solving a one mixed problem in elasticity theory for half-space with a cylindrical cavity by the generalized Fourier method. *Eastern-European Journal of Enterprise Technologies*. 2021. – Vol. 2, no. 7 (110). P. 48–57. DOI: <https://doi.org/10.15587/1729-4061.2021.229428>.

15. Miroshnikov V. Yu. The study of the second main problem of the theory of elasticity for a layer with a cylindrical cavity. *Strength of Materials and Theory of Structures*. 2019. – No. 102. P. 77–90. DOI: <https://doi.org/10.32347/2410-2547.2019.102.77-90>.

16. Miroshnikov V., Denysova T., Protsenko V. The study of the first main problem of the theory of elasticity for a layer with a cylindrical cavity. *Strength of Materials and Theory of Structures*. 2019. – No. 103. P. 208–218. DOI: <https://doi.org/10.32347/2410-547.2019.103.208-218>.

17. Miroshnikov V. Yu. Stress State of an Elastic Layer with a Cylindrical Cavity on a Rigid Foundation. *International Applied Mechanics*. 2020. – Vol. 56, no. 3. P. 372–381. DOI: <https://doi.org/10.1007/s10778-020-01021-x>.

18. Мірошніков В. Ю., Олешкевич С. В., Медведєва А. В., Савін О. Б. Дослідження першої основної задачі теорії пружності для шару з трьома поздовжніми циліндричними порожнинами. *Науковий вісник будівництва*. Харків, 2021. – Т. 103, № 1. С. 150–155. DOI: <https://doi.org/10.29295/2311-7257-2021-103-1-150-155>.

19. Miroshnikov V., Savin O., Sobol V., Nikichanov V. Solving the Problem of Elasticity for a Layer with N Cylindrical Embedded Supports. *Computation*. 2023. – Vol. 11, no. 9. P. 172. DOI: <https://doi.org/10.3390/computation11090172>.

20. Свердлов С. Ю. Аналіз напружено-деформованого стану консольної плити з лінійним підшипниковим з'єднанням. *Відкриті інформаційні та комп'ютерні інтегровані технології*. 2025. – № 104. С. 82–96. DOI: <https://doi.org/10.32620/oikit.2025.104.06>.

21. Kosenko M., Ilin O., Alyoshechkina T. High-precision calculation of the stress state of the reinforced layer on two cylindrical supports with smooth contact. *Colloquium-journal*. 2024. – No. 19 (212). P. 14–18. DOI: <https://doi.org/10.5281/zenodo.12723834>.

22. Мірошніков В. Ю., Савін О. Б., Косенко М. Л., Ільїн О. О. Аналіз напруженого стану шару з двома циліндричними врізаними опорами та циліндричними втулками. *Відкриті інформаційні та комп'ютерні інтегровані технології*. 2024. № 101. С. 112–126. DOI: <https://doi.org/10.32620/oikit.2024.101.08>.

23. Косенко М. Л., Ільїн О. О., Свердлов С. Ю., Савін О. Б. Аналіз напруженого стану шару на двох циліндричних врізаних опорах з підшипниками ковзання. *International Science Journal of Engineering & Agriculture*. 2025. – Vol. 4,

no. 2. С. 171–183. DOI: <https://doi.org/10.46299/j.isjea.20250402.11>.

24. Міністерство освіти та науки України. Перелік пріоритетних тематичних напрямів наукових досліджень і розробок. URL: <https://mon.gov.ua/news/uryad-viznachiv-onovleniy-perelik-prioritetnikh-tematichnikh-napryamiv-naukovikh-doslidzhen-i-rozrobok> (дата звернення: 30.09.2025).

References

1. Kovel P. P., Bologin A. S., Nagornij L. V. Analiz napruzhenno-deformovanogo stanu silovih elementiv konstrukciyi panelej krila litakiv tipu Il-76 za nayavnosti korozijnogo urazhennya. Zbirnik naukovih prac Derzhavnogo naukovogo-doslidnogo institutu aviatsiyi. 2021. Vip. 17(24). S. 106–116. DOI: <https://doi.org/10.54858/dndia.2021-17-16>.
2. Golovanevskiy V., Kondratiev A. Elastic properties of steel-cord rubber conveyor belt. Exp. Tech. 2021. – Vol. 45, no. 2. P. 217–226. DOI: <https://doi.org/10.1007/s40799-021-00439-3>.
3. ASM Handbook, Volume 8: Mechanical Testing and Evaluation. Materials Park, OH: ASM International, 2023.
4. Zienkiewicz O. C., Taylor R. L., Zhu J. Z. The Finite Element Method: Its Basis and Fundamentals. 7th ed. Oxford: Butterworth-Heinemann, 2013.
5. Static Structural Simulation Using Ansys Discovery. URL: <https://courses.ansys.com/index.php/courses/structural-simulation> (data zvernennya: 30.09.2025).
6. Savin G. N. Raspredelenie napryazhenij okolo otverstij. Kiyiv : Nauk. dumka, 1968.– 891 s.
7. Kosmodamianskij A. S. Teoreticheskaya i prikladnaya mehanika. Doneck : Donec. nac. un-t, 2001. Vip. 32. 210 s.
8. Podilchuk Yu. N. Trehmernye zadachi teorii uprugosti. Kiyiv : Nauk. Dumka, 1979. – 240 s.
9. Grinchenko V. T., Meleshko V. V. Garmonicheskie kolebaniya i volny v uprugih telah. Kiyiv : Nauk. dumka, 1981. – 284 s.
10. Fesenko A., Vaysfel'd N. The Wave Field of a Layer with a Cylindrical Cavity in Structural Integrity. U kn.: Structural Integrity. Springer International Publishing, 2019. – P. 277–282. DOI: https://doi.org/10.1007/978-3-030-21894-2_51.
11. Fesenko A., Vaysfel'd N. The dynamical problem for the infinite elastic layer with a cylindrical cavity. Procedia Structural Integrity. 2021. – Vol. 33. P. 509–527. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.prostr.2021.10.058>.
12. Jafari M., Chaleshtari M. H. B., Khoramishad H., Altenbach H. Minimization of thermal stress in perforated composite plate using metaheuristic algorithms WOA, SCA and GA. Composite Structures. 2023. – Vol. 304. P. 116403. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.compstruct.2022.116403>.
13. Nikolaev A. G., Procenko V. S. Obobshennyj metod Fure v prostranstvennyh zadachah teorii uprugosti. Harkiv: Nac. aerokosm. un-t im. M. Ye. Zhukovskogo «HAL», 2011. – 344 s.
14. Ukrayinets N., Murahovska O., Prokhorova O. Solving a one mixed problem in elasticity theory for half-space with a cylindrical cavity by the generalized Fourier method. Eastern-European Journal of Enterprise Technologies. 2021. – Vol. 2, no. 7 (110). P. 48–57. DOI: <https://doi.org/10.15587/1729-4061.2021.229428>.
15. Miroshnikov V. Yu. The study of the second main problem of the theory of elasticity for a layer with a cylindrical cavity. Strength of Materials and Theory of

Structures. 2019. – No. 102. P. 77–90. DOI: <https://doi.org/10.32347/2410-2547.2019.102.77-90>.

16. Miroshnikov V., Denysova T., Protsenko V. The study of the first main problem of the theory of elasticity for a layer with a cylindrical cavity. Strength of Materials and Theory of Structures. 2019. – No. 103. P. 208–218. DOI: <https://doi.org/10.32347/2410-547.2019.103.208-218>.

17. Miroshnikov V. Yu. Stress State of an Elastic Layer with a Cylindrical Cavity on a Rigid Foundation. International Applied Mechanics. 2020. – Vol. 56, no. 3. P. 372–381. DOI: <https://doi.org/10.1007/s10778-020-01021-x>.

18. Miroshnikov V. Yu., Oleshkevich S. V., Medvedyeva A. V., Savin O. B. Doslidzhennya pershoyi osnovnoyi zadachi teoriiy pruzhnosti dlya sharu z troma pozdovzhnimi cilindrichnimi porozhninami. Naukovij visnik budivnictva. Harkiv, 2021. – T. 103, № 1. S. 150–155. DOI: <https://doi.org/10.29295/2311-7257-2021-103-1-150-155>.

19. Miroshnikov V., Savin O., Sobol V., Nikichanov V. Solving the Problem of Elasticity for a Layer with N Cylindrical Embedded Supports. Computation. 2023. – Vol. 11, no. 9. P. 172. DOI: <https://doi.org/10.3390/computation11090172>.

20. Sverdlov S. Yu. Analiz napruzhenno-deformovanogo stanu konsolnoyi pliti z liniynim pidshipnikovim z'yednannyam. Vidkriti informacijni ta komp'yuterni integrovani tehnologiyi. 2025. – № 104. S. 82–96. DOI: <https://doi.org/10.32620/oikit.2025.104.06>.

21. Kosenko M., Ilin O., Alyoshechkina T. High-precision calculation of the stress state of the reinforced layer on two cylindrical supports with smooth contact. Solloquium-journal. 2024. – No. 19 (212). P. 14–18. DOI: <https://doi.org/10.5281/zenodo.12723834>.

22. Miroshnikov V. Yu., Savin O. B., Kosenko M. L., Ilyin O. O. Analiz napruzhenogo stanu sharu z dvoma cilindrichnimi vrizanimi oporami ta cilindrichnimi vtulkami. Vidkriti informacijni ta komp'yuterni integrovani tehnologiyi. 2024. № 101. S. 112–126. DOI: <https://doi.org/10.32620/oikit.2024.101.08>.

23. Kosenko M. L., Ilyin O. O., Sverdlov S. Yu., Savin O. B. Analiz napruzhenogo stanu sharu na dvoh cilindrichnih vrizanih oporah z pidshipnikami kovzannya. International Science Journal of Engineering & Agriculture. 2025. – Vol. 4, no. 2. S. 171–183. DOI: <https://doi.org/10.46299/j.isjea.20250402.11>.

24. Ministerstvo osviti ta nauki Ukraini. Perelik prioritetnih tematichnih napryamiv naukovih doslidzhen i rozrobok. URL: <https://mon.gov.ua/news/uryad-viznachiv-onovleniy-perelik-prioritetnikh-tematichnikh-napryamiv-naukovikh-doslidzhen-i-rozrobok> (data zvernennya: 30.09.2025).

Надійшла до редакції 17.10.2025, розглянута на редколегії 17.11.2025

Analysis of the stress-strain state of a cantilever perforated layer with a cylindrical embedded support

The article presents an analysis of the stress-strain state of a cantilever perforated layer in contact with a rigid cylindrical embedded support. Such structural elements are widely used in aviation, aerospace, and general engineering to reduce weight, provide access, or perform specific functional tasks. The presence of holes and supports significantly changes the stress-strain state, leading to local stress concentration, which can cause premature failure. A mathematical model based on three-dimensional equations of elasticity theory has been developed for the study. To

solve the boundary value problem, a generalized Fourier method was used, which allows the boundary conditions on all surfaces (layer planes, hole surfaces, and the contact boundary with the support) to be satisfied with high accuracy. Satisfying mixed boundary conditions leads to an infinite system of integro-algebraic equations with unknown coefficients. Through analytical transformations, this system is reduced to an infinite system of linear algebraic equations of the second kind, to which the reduction method is applied, ensuring high accuracy of results. As part of the work, a detailed numerical study was carried out for a specific configuration: a layer of ABS plastic with five parallel cylindrical cavities, one of which acts as a rigid fastening. The case of a localized normal load on the upper surface of the layer is considered. Detailed distribution patterns of all components of the stress tensor were analyzed. The results demonstrate the complex three-dimensional nature of the stress distribution arising from the superposition of bending, tension/compression effects, and significant mutual influence of stress concentrators. It has been established that the stress distribution is significantly asymmetrical both relative to the surfaces of the layer and for each cavity individually, which emphasizes the impossibility of using simplified models. Areas of maximum stress concentration have been identified, which are critically important in terms of strength assessment. The developed analytical and numerical approach allows obtaining reliable data on stress and displacement distribution with high accuracy, which is important for verifying the results obtained using numerical methods. The work has significant practical value for design engineers, providing an effective tool for calculating strength, optimizing structures, and ensuring their operational reliability.

Keywords: stress-strain state; Lamé equations; generalized Fourier method; layer with cylindrical cavities.

Відомості про автора:

Косенко Михайло Леонідович – аспірант, кафедра міцності літальних апаратів, Національний аерокосмічний університет «Харківський авіаційний інститут», м. Харків, Україна. e-mail: Scs2012kh@gmail.com, телефон: +380506050010, ORCID: <https://orcid.org/0009-0002-2005-2222>.

About the Author:

Mykhailo Kosenko – PhD student, Department of Aircraft Strength, National Aerospace University «KhAI», Kharkiv, Ukraine. e-mail: Scs2012kh@gmail.com, tel:+380506050010, ORCID: <https://orcid.org/0009-0002-2005-2222>.