

doi: 10.32620/oikit.2025.104.10

УДК 531.8

О. О. Баранов, М. П. Ковальов, А. О. Бреус

## **Моделювання прямої кінематики п'ятиступеневого порталного робота з використанням методу Денавіта-Хартенберга**

*Національний аерокосмічний університет «Харківський авіаційний інститут»*

У статті представлено аналітичне розв'язання прямої задачі кінематики для перспективного порталного робота-маніпулятора з п'ятьма ступенями свободи, орієнтованого на виконання типових завдань промислової автоматизації, таких як пакування, сортування та точне позиціонування об'єктів. Конструкція маніпулятора включає один поступальний і чотири обертальні приводи, що забезпечує високу гнучкість керування виконавчим органом у просторі. Для побудови математичної моделі було використано класичну методу Денавіта–Хартенберга (D-H), яка дозволяє компактно описати кінематичний ланцюг за допомогою чотирьох параметрів для кожного зчленування. Послідовно побудовано координатні системи на кожній ланці, визначено параметри зсуву, обертання, довжини та зміщення, сформовано однорідні матриці перетворення, а також отримано підсумкову матрицю положення та орієнтації захоплювального пристрою у базовій системі координат. Для перевірки адекватності моделі проведено симуляцію переміщення, що охоплює часову послідовність п'яти характерних позицій. Результати представлено у вигляді графіків зміни координат центра захоплювача та напрямних косинусів, які відображають орієнтацію осей локальної системи виконавчого органу. Візуалізація результатів дозволила відстежити вплив кожного ступеня свободи окремо та оцінити точність побудованої моделі. Отримана модель є універсальною і може бути використана як основа для створення цифрових двійників, розробки програмного забезпечення керування рухом, попереднього тестування в CAD/CAE середовищах, а також для впровадження у гнучкі виробничі системи. Запропонований підхід дозволяє не лише ефективно розв'язувати задачу прямої кінематики, а й легко адаптується до інших архітектур порталних роботів із різною кількістю ступенів свободи. Таким чином, дослідження сприяє підвищенню точності, повторюваності та надійності робототехнічних систем у складних виробничих середовищах.

**Ключові слова:** порталний робот, пряма кінематика, метод Денавіта–Хартенберга, маніпулятор.

### **Вступ**

Портальні роботи – це універсальні системи, які застосовуються в різних галузях промисловості, зокрема для операцій типу «взяти-покласти», зварювання та автоматизації лабораторій [1, 2, 3]. Зазвичай ці роботи складаються з маніпулятора, змонтованого на верхній опорній конструкції, що дозволяє широкий діапазон рухів у вертикальній та горизонтальній площинах [4]. Останні розробки були зосереджені на вдосконаленні можливостей порталних роботів за допомогою покращених систем керування, які використовують контролери на базі ПК та розвинені алгоритми навчання [5, 6]. Також були розроблені мобільні порталні роботи, що забезпечують підвищену гнучкість у виробничих умовах [7]. Спеціально розроблені порталні системи можуть забезпечити економічно ефективні рішення для специфічних виробничих завдань, зокрема кутання [8]. Дослідники також вирішують проблеми, пов'язані зі зменшенням коливань під час високошвидкісних рухів і оптимізацією інтерфейсів керування [1, 9]. Загалом,

портальні роботи продовжують еволюціонувати, забезпечуючи підвищену ефективність, автоматизацію та адаптивність у різних промислових сферах.

Точний розрахунок прямої кінематики є фундаментальною вимогою в робототехнічних системах, оскільки він визначає точне положення та орієнтацію виконавчого органу робота на основі параметрів його зчленувань. Такий розрахунок слугує основою для виконання ключових завдань, зокрема планування руху, керування, моделювання та взаємодії з навколишнім середовищем. У промисловій, медичній та сервісній робототехніці надійна пряма кінематика забезпечує точне виконання завдань, уникнення зіткнень і узгоджену роботу з зовнішніми інструментами чи об'єктами. Із зростанням складності роботів і їхнім застосуванням у динамічних високоточних середовищах, надійні методи розв'язання задачі прямої кінематики стають усе більш критично важливими для забезпечення безпечної та ефективної роботи.

Останні дослідження продовжують підкреслювати ключову роль методу Денавіта-Хартенберга (D-H) у кінематиці роботів, особливо в моделюванні, аналізі та покращенні продуктивності маніпуляторів. Шляхом опису поетапної математичної процедури побудови трансформацій, було відзначено гнучкість цього методу для різних платформ сервісної робототехніки, зокрема мобільних і крокуючих роботів [10]. Низка авторів порівняли класичну та модифіковану D-H конвенцію, надавши аналітичні залежності та матриці перетворень, що є корисними для покращення динаміки й керування роботами [11]. Так, С. Азіф і Ф. Вебб [12] застосували модифікований D-H підхід у поєднанні з методом Піпера для спрощення оберненої кінематики шестиступеневого маніпулятора зі сферичним зап'ястям, продемонструвавши високу точність траєкторії. Р. Сіуччо із співавторами [13] порівняли стандартне та модифіковане позначення D-H при моделюванні робота YASKAWA-MOTOMAN-GP7, підкресливши важливість правильної прив'язки координатних систем для отримання точних результатів симуляції. Х. Віллалобос із колегами [14] статистично оцінили кілька обернених кінематичних рішень для маніпулятора UR5, показавши відмінності в точності залежно від обраної формули.

Таким чином, останні досягнення в галузі кінематики роботів продовжують досліджувати як традиційні, так і альтернативні підходи до моделювання з метою підвищення точності й гнучкості керування маніпуляторами. Н. Бродтманн і Д. Шилберг [15] запропонували новий алгоритм для прямої та оберненої кінематики, заснований на тривимірних матрицях обертання й нормалізованих векторах в єдиній глобальній системі координат, що дозволяє уникнути обмежень класичного методу Денавіта-Хартенберга. Натомість П. Корке [16] розробив систематичний двоетапний метод призначення параметрів D-H, що відзначається чіткістю й можливістю адаптації до довільних систем координат, із реалізацією на основі алгебраїчних операцій. О. Мартінез і Р. Кампа [17] порівняли методи D-H і диференціальних гвинтів для визначення прямої задачі кінематики з використанням однорідних матриць перетворення, продемонструвавши їхню еквівалентність для серійних маніпуляторів. Дж. Лі з колегами [18] застосували метод калібрування на основі D-H для підвищення точності промислових роботів, використавши лазерні трекири й процедури оптимізації для узгодження даних сенсорів з положеннями зчленувань. Сукупно ці дослідження демонструють еволюцію підходів до кінематичного моделювання, спрямовану на підвищення точності, сумісності та зручності реалізації як у промисловості, так і в дослідницьких цілях [19, 20].

Метою статті є розрахунок прямої задачі кінематики перспективного п'ятикоординатного робота методом Денавіта-Хартенберга [21].

### Основний матеріал

*Опис портального робота-маніпулятора і формулювання прямої задачі кінематики.* Розрахунок прямої кінематики для портальних роботів є необхідним для точного керування положенням їхнього виконавчого органу під час виконання масштабних промислових завдань, таких як збирання, пакування та транспортування матеріалів. Завдяки своїй структурованій, часто ортогональній архітектурі, портальні роботи значно виграють від використання методу Денавіта-Хартенберга (D-H), який пропонує систематичне та компактне представлення їх кінематичних ланцюгів. Конвенція D-H спрощує виведення матриць перетворення між послідовними ланками, що дозволяє точно обчислювати положення виконавчого органу. Із дедалі ширшою інтеграцією портальних систем в автоматизоване та «інтелектуальне» виробництво, надійне кінематичне моделювання з використанням методу D-H є критично важливим для оптимізації продуктивності, повторюваності та взаємодії з іншими системами. Для розрахунку пропонується 5-координатний робот (робот-маніпулятор), що може бути змонтований на порталі висотою 2-2,5 м та у майбутньому запланованого на роботу з навантаженням до 10 кг на дистанції до 3000 мм. 3D модель робота-маніпулятора показана на рис. 1.

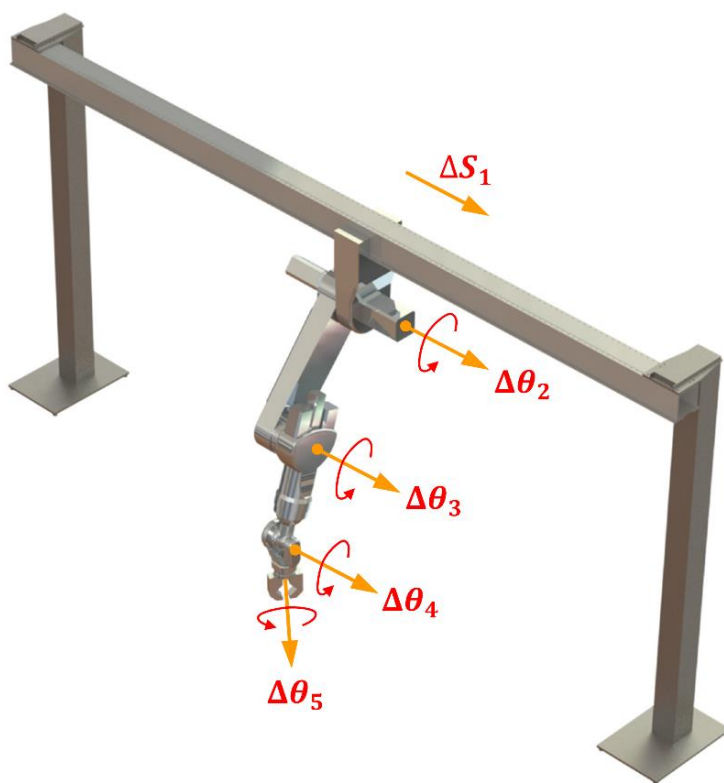


Рис. 1. Модель перспективного робота-маніпулятора портального типу

Для прогнозування положення виконавчого органу робота-маніпулятора необхідно розраховувати залежності орієнтації і координат цього органу у базовій системі координат, відносно якої ведеться відлік при змінненні узагальнених

координат, які, у свою чергу, залежать від положення виконавчих приводів у певний момент часу.

*Пряма задача кінематики* маніпуляторів формулюється так: задана кінематична схема маніпулятора і в певний момент часу відомі значення узагальнених координат, що визначають положення всіх ланок маніпулятора одна відносно одної. Потрібно визначити положення і орієнтацію останньої ланки маніпулятора (захоплювача) у системі відліку, зв'язаної зі стояком. Геометричні розміри ланок вважаються заданими.

*Опис спеціальної системи координат.* Для розв'язання прямої задачі кінематики портального робота-маніпулятора застосовуємо метод Денавіта-Хартенберга. Першим етапом реалізації цього методу є впровадження до кінематичної схеми маніпулятора осей, які підлягають наступним вимогам. Віссю обертальної пари  $(i, i + 1)$ , складеної з ланок  $i$  та  $i + 1$ , є вісь циліндричного шарніра, жорстко зв'язана з ланкою  $i$ , навколо якої обертається ланка  $i + 1$ . Для поступальної пари  $(i, i + 1)$  віссю є будь-яка пряма, паралельна вектору швидкості поступального руху ланки  $i + 1$  відносно ланки  $i$ .

Другим етапом є нумерація всіх ланок маніпулятора від стояка (ланка 0) до захоплювача (ланки  $n$ ), після чого кожною ланкою необхідно зв'язати свою систему декартових координат, вибрану таким чином: вісь  $z_i$  проходить по осі кінематичної пари  $(i, i + 1)$ ; початок координат системи  $i$ , жорстко зв'язаної з ланкою  $i$ , лежить або на загальному перпендикулярі до осей  $z_{i-1}$  і  $z_i$ , або в точці їх перетину (якщо така є), або в будь-якій точці осі кінематичної пари, якщо вісь  $z_i$  збігається з віссю  $z_{i-1}$  або паралельна їй; вісь  $x_i$  проходить по загальному перпендикуляру, проведеному до осей  $z_{i-1}$  і  $z_i$  спрямованому від точки перетину цього перпендикуляра з віссю  $z_{i-1}$  до точки його перетину з віссю  $z_i$  (або в будь-яку сторону по нормалі до площини, що містить осі  $z_{i-1}$  і  $z_i$ , якщо вони перетинаються, або довільним способом, якщо  $z_{i-1}$  і  $z_i$  проходять по одній прямій); вісь  $y_i$  вибирається за правилом правої трійки векторів. Початок координат системи 0, тобто системи, жорстко зв'язаної зі стояком, може лежати в будь-якій точці осі пари  $(0, 1)$ ; вісь  $x_0$  прямує довільним чином. При цьому вибір системи  $n$  теж не піддається загальному правилу, оскільки ланка  $n + 1$  відсутня. Тому пропонується уявити будь-який тип пари  $(n, n + 1)$  і після цього вибрати систему за загальним правилом. Початок вибраної таким чином системи називається центром захоплювача. Застосовуємо цей алгоритм до кінематичної схеми досліджуваного портального робота-маніпулятора і отримуємо наступну схему (рис. 2). Для досліджуваної кінематичної схеми маніпулятора будемо і поступово заповнюємо Таблицю 1 параметрів переходу від базової спеціальної системи координат до останньої, що пов'язана із робочим органом маніпулятора. Згідно з методом Денавіта–Хартенберга, спеціальний вибір систем координат ланок маніпулятора дозволяє за допомогою лише чотирьох параметрів (а не шести, як у загальному випадку) описати перехід з однієї системи в іншу. Систему  $i - 1$  можна перетворити на систему  $i$  за допомогою повороту, двох зсувів (переносів) і ще одного повороту, які виконуються в такому порядку:

- 1) поворот системи  $i - 1$  навколо осі  $z_{i-1}$  на кут  $\theta_i$  до тих пір, поки вісь  $x_{i-1}$  не стане паралельною осі  $x_i$ ;
- 2) зсув поверненої системи уздовж осі  $z_{i-1}$  на величину  $s_i$  до тих пір, поки осі  $x_{i-1}$  і  $x_i$  не опиняться на одній прямій;
- 3) зсув уздовж осі  $x_i$  на величину  $a_i$  до тих пір, поки не зійдуться початки координат;

4) поворот навколо осі  $x_i$  на кут  $\alpha_i$  до суміщення осі  $z_{i-1}$  з віссю  $z_i$ .

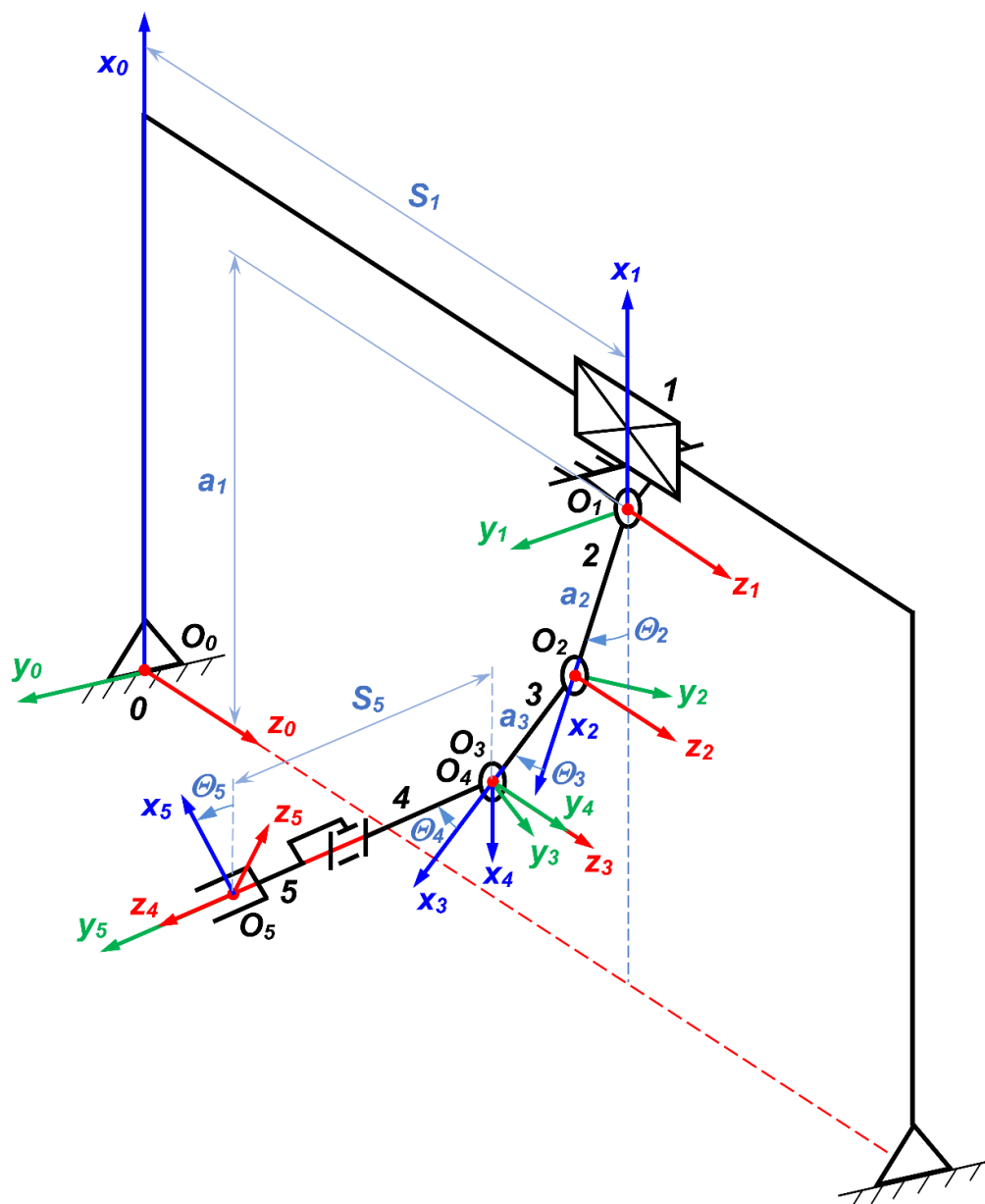


Рис. 2. Кінематична схема портального робота-маніпулятора, що застосовується для розв'язання прямої задачі кінематики

Отже, для заповнення Таблиці 1 виконуємо наступні дії.

Спочатку розглядаємо кінематичну пару 0-1, що пов'язана з ланками 0 і 1 – перехід від СК  $X_0Y_0Z_0$  (система «0») до  $X_1Y_1Z_1$  (система «1»):

- 1) поворот системи 0 навколо осі  $z_0$  на кут  $\theta_1$  доти, поки вісь  $x_0$  не стане паралельною осі  $x_1$  – осі вже паралельні, отже  $\theta_1 = 0$ ;
- 2) зсув поверненої системи вздовж осі  $z_0$  на величину  $s_1$  до тих пір, поки осі  $x_0$  і  $x_1$  не виявляться на одній прямій – це змінний параметр  $S_1$ ;
- 3) зсув вздовж осі  $x_1$  на величину  $a_1$ , до тих пір, поки не збігаються початки координат – це стала величина, яка дорівнює  $a_1$ ;
- 4) поворот навколо осі  $x_1$  на кут  $\alpha_1$  до поєднання осі  $z_0$  з віссю  $z_1$  – осі вже

співпали, отже  $\alpha_1 = 0$ .

Результати заносимо в перший рядок Таблиці 1.

Переходимо до кінематичної пари 1-2, що пов'язана з ланками 1 і 2 – перехід від СК  $X_1Y_1Z_1$  (система «1») до  $X_2Y_2Z_2$  (система «2»):

1) поворот системи 1 навколо осі  $z_1$  на кут  $\theta_2$  доти, доки вісь  $x_1$  не стане паралельною осі  $x_2$  – це змінний параметр  $\theta_2$ ;

2) зсув поверненої системи вздовж осі  $z_1$  на величину  $s_2$  до тих пір, поки осі  $x_1$  і  $x_2$  не виявляться на одній прямій – осі вже на одній прямій, отже  $S_2 = 0$ ;

3) зсув вздовж осі  $x_2$  на величину  $a_2$  до тих пір, поки не збігаються початки координат – це стала величина  $a_2$ , яка дорівнює довжині ланки;

4) поворот навколо осі  $x_2$  на кут  $\alpha_2$  до поєднання осі  $z_1$  з віссю  $z_2$  – осі вже співпали, отже  $\alpha_2 = 0$ .

Результати заносимо до другого рядка Таблиці 1.

Переходимо до кінематичної пари 2-3, що пов'язана з ланками 2 і 3 – перехід від СК  $X_2Y_2Z_2$  (система «2») до  $X_3Y_3Z_3$  (система «3»):

1) поворот системи 2 навколо осі  $z_2$  на кут  $\theta_3$  доти, поки вісь  $x_2$  не стане паралельною осі  $x_3$  – це змінний параметр  $\theta_3$ ;

2) зсув поверненої системи вздовж осі  $z_2$  на величину  $s_3$  до тих пір, поки осі  $x_2$  і  $x_3$  не виявляться на одній прямій – осі вже на одній прямій, отже  $S_3 = 0$ ;

3) зсув вздовж осі  $x_3$  на величину  $a_3$  до тих пір, поки не збігаються початки координат – це стала величина  $a_3$ , яка дорівнює довжині ланки;

4) поворот навколо осі  $x_3$  на кут  $\alpha_3$  до поєднання осі  $z_2$  з віссю  $z_3$  – осі вже співпали, отже  $\alpha_3 = 0$

Результати заносимо в третій рядок Таблиці 1.

Переходимо до кінематичної пари 3-4, що пов'язана з ланками 3 і 4 – перехід від СК  $X_3Y_3Z_3$  (система «3») до  $X_4Y_4Z_4$  (система «4»):

1) поворот системи 3 навколо осі  $z_3$  на кут  $\theta_4$  доти, поки вісь  $x_3$  не стане паралельною осі  $x_4$  – це змінний параметр  $\theta_4$ ;

2) зсув поверненої системи вздовж осі  $z_3$  на величину  $s_4$  до тих пір, поки осі  $x_3$  і  $x_4$  не виявляться на одній прямій – осі вже на одній прямій, отже  $S_4 = 0$ ;

3) зсув вздовж осі  $x_4$  на величину  $a_4$ , до тих пір, поки не збігаються початки координат – початки координат вже співпадають, отже  $a_4 = 0$ ;

4) поворот навколо осі  $x_4$  на кут  $\alpha_4$  до поєднання осі  $z_3$  з віссю  $z_4$  – це кут  $\pi/2$ .

Ці результати заносимо в четвертий рядок Таблиці 1.

Переходимо до кінематичної пари 4-5, що пов'язана з ланками 4 і 5 – перехід від СК  $X_4Y_4Z_4$  (система «4») до  $X_5Y_5Z_5$  (система «5»):

1) поворот системи 4 навколо осі  $z_4$  на кут  $\theta_5$  доти, доки вісь  $x_4$  не стане паралельною осі  $x_5$  – це змінний параметр  $\theta_5$ ;

2) зсув поверненої системи вздовж осі  $z_4$  на величину  $s_5$  до тих пір, поки осі  $x_4$  і  $x_5$  не виявляться на одній прямій – це стала величина, яка дорівнює  $S_5$ ;

3) зсув вздовж осі  $x_5$  на величину  $a_5$  до тих пір, поки не збігаються початки координат – після попереднього перетворення вони вже співпадають, отже ця величина дорівнює нулю;

4) поворот навколо осі  $x_5$  на кут  $\alpha_5$  до поєднання осі  $z_4$  з віссю  $z_5$  – це сталий кут  $\pi/2$ .

Ці результати заносимо в п'ятий рядок Таблиці 1.

Таблиця 1

Параметри переходу від базової спеціальної системи координат до останньої, що пов'язана із робочим органом маніпулятора

Кінематична пара	Тип пари	№ ланки	Параметри			
			$\Theta$	$\alpha$	$S$	$a$
0,1	Поступальна	1	0	0	$S_1$	$a_1$
1,2	Обертальна	2	$\Theta_2$	0	0	$a_2$
2,3	Обертальна	3	$\Theta_3$	0	0	$a_3$
3,4	Обертальна	4	$\Theta_4$	$\pi/2$	0	0
4,5	Обертальна	5	$\Theta_5$	$\pi/2$	$S_5$	0

Матриці переходу і визначення орієнтації і координат захоплювального пристрою у базовій системі координат. Відповідно до методу Денавіта-Хартенберга, на наступному етапі необхідно записати розширені матриці переходу для кожної кінематичної пари. При цьому кожному з чотирьох елементарних рухів відповідає одна з матриць переходу (B-матриць): або матриця обертання, або матриця зсуву. Результуюча матриця переходу, що зв'язує системи  $i-1$  та  $i$ , є добутком цих матриць:

$$A_i = B_{o\bar{o}}(\vec{k}, \Theta_i) B_{3c}(\vec{k}, s_i) B_{3c}(\vec{i}, a_i) B_{o\bar{o}}(\vec{i}, \alpha_i). \quad (1)$$

Після перемноження отримуємо:

$$A_i = B_{o\bar{o}}(\vec{k}, \Theta_i) B_{3c}(\vec{k}, s_i) B_{3c}(\vec{i}, a_i) B_{o\bar{o}}(\vec{i}, \alpha_i) =$$

$$= \begin{bmatrix} \cos \Theta_i & -\sin \Theta_i & 0 & 0 \\ \sin \Theta_i & \cos \Theta_i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & s_i \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & a_i \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \alpha_i & -\sin \alpha_i & 0 \\ 0 & \sin \alpha_i & \cos \alpha_i & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} \cos \Theta_i & -\sin \Theta_i \cos \alpha_i & \sin \Theta_i \sin \alpha_i & a_i \cos \Theta_i \\ \sin \Theta_i & \cos \Theta_i \cos \alpha_i & -\cos \Theta_i \sin \alpha_i & a_i \sin \Theta_i \\ 0 & \sin \alpha_i & \cos \alpha_i & s_i \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}. \quad (2)$$

Матриця (2) є шаблоном, в який необхідно підставляти параметри з Таблиці 1 для отримання матриць переходу, що описують певну кінематичну схему маніпулятора. Отже, для кожного рядка Таблиці 1 записуємо свою матрицю переходу, для чого використовуємо шаблонну матрицю (2):

$$A_1 = A_{o\bar{o}}(\vec{k}, \Theta_1) A_{3c}(\vec{k}, s_1) A_{3c}(\vec{i}, a_1) A_{o\bar{o}}(\vec{i}, \alpha_1) =$$

$$= \begin{bmatrix} \cos \Theta_1 & -\sin \Theta_1 \cos \alpha_1 & \sin \Theta_1 \sin \alpha_1 & a_1 \cos \Theta_1 \\ \sin \Theta_1 & \cos \Theta_1 \cos \alpha_1 & -\cos \Theta_1 \sin \alpha_1 & a_1 \sin \Theta_1 \\ 0 & \sin \alpha_1 & \cos \alpha_1 & s_1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & a_1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & s_1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}; \quad (3)$$

$$A_2 = A_{o\bar{o}}(\vec{k}, \Theta_2) A_{3c}(\vec{k}, s_2) A_{3c}(\vec{i}, a_2) A_{o\bar{o}}(\vec{i}, \alpha_2) =$$

$$= \begin{bmatrix} \cos \Theta_2 & -\sin \Theta_2 \cos \alpha_2 & \sin \Theta_2 \sin \alpha_2 & a_2 \cos \Theta_2 \\ \sin \Theta_2 & \cos \Theta_2 \cos \alpha_2 & -\cos \Theta_2 \sin \alpha_2 & a_2 \sin \Theta_2 \\ 0 & \sin \alpha_2 & \cos \alpha_2 & s_2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} \cos \Theta_2 & -\sin \Theta_2 & 0 & a_2 \cos \Theta_2 \\ \sin \Theta_2 & \cos \Theta_2 & 0 & a_2 \sin \Theta_2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}; \quad (4)$$

$$A_3 = A_{o\bar{o}}(\vec{k}, \Theta_3) A_{3c}(\vec{k}, s_3) A_{3c}(\vec{i}, a_3) A_{o\bar{o}}(\vec{i}, \alpha_3) =$$

$$= \begin{bmatrix} \cos \Theta_3 & -\sin \Theta_3 \cos \alpha_3 & \sin \Theta_3 \sin \alpha_3 & a_3 \cos \Theta_3 \\ \sin \Theta_3 & \cos \Theta_3 \cos \alpha_3 & -\cos \Theta_3 \sin \alpha_3 & a_3 \sin \Theta_3 \\ 0 & \sin \alpha_3 & \cos \alpha_3 & s_3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} \cos \Theta_3 & -\sin \Theta_3 & 0 & a_3 \cos \Theta_3 \\ \sin \Theta_3 & \cos \Theta_3 & 0 & a_3 \sin \Theta_3 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}; \quad (5)$$

$$A_4 = A_{o\bar{o}}(\vec{k}, \Theta_4) A_{3c}(\vec{k}, s_4) A_{3c}(\vec{i}, a_4) A_{o\bar{o}}(\vec{i}, \alpha_4) =$$

$$= \begin{bmatrix} \cos \Theta_4 & -\sin \Theta_4 \cos \alpha_4 & \sin \Theta_4 \sin \alpha_4 & a_4 \cos \Theta_4 \\ \sin \Theta_4 & \cos \Theta_4 \cos \alpha_4 & -\cos \Theta_4 \sin \alpha_4 & a_4 \sin \Theta_4 \\ 0 & \sin \alpha_4 & \cos \alpha_4 & s_4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \Theta_4 & 0 & \sin \Theta_4 & 0 \\ \sin \Theta_4 & 0 & -\cos \Theta_4 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}; \quad (6)$$

$$A_5 = A_{o\bar{o}}(\vec{k}, \Theta_5) A_{3c}(\vec{k}, s_5) A_{3c}(\vec{i}, a_5) A_{o\bar{o}}(\vec{i}, \alpha_5) =$$



$$= \begin{bmatrix} \cos \Theta_5 & -\sin \Theta_5 \cos \alpha_5 & \sin \Theta_5 \sin \alpha_5 & a_5 \cos \Theta_5 \\ \sin \Theta_5 & \cos \Theta_5 \cos \alpha_5 & -\cos \Theta_5 \sin \alpha_5 & a_5 \sin \Theta_5 \\ 0 & \sin \alpha_5 & \cos \alpha_5 & s_5 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \Theta_5 & 0 & \sin \Theta_5 & 0 \\ \sin \Theta_5 & 0 & -\cos \Theta_5 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & s_5 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}; \quad (7)$$

Обчислення матриць переходу  $A_i$  дозволяє визначити положення і орієнтацію останньої ланки маніпулятора (захоплювача) у системі відліку, зв'язаної зі стояком. При цьому геометричні розміри ланок вважаються заданими.

Це завдання вирішується за допомогою формули:

$$R_0 = T_n R_n, \quad (9)$$

де  $T_n$  – матриця, що дорівнює добутку матриць  $A_i$ :

$$T_n = A_1 A_2 \dots A_n. \quad (10)$$

У формулі (9)  $R_n$  і  $R_0$  – матриці-стовпці розміром  $4 \times 1$ , перші три елементи яких – це координати довільної точки захоплювача відповідно в системах  $n$  і  $0$ .

Оскільки запропонований робот-маніпулятор портального типу характеризується п'ятьма ступенями свободи ( $n = 5$ ), обчислюємо елементи матриці  $T_5$ :

$$T_5 = A_1 A_2 A_3 A_4 A_5 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & a_1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & s_1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos \Theta_2 & -\sin \Theta_2 & 0 & a_2 \cos \Theta_2 \\ \sin \Theta_2 & \cos \Theta_2 & 0 & a_2 \sin \Theta_2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} \cos \Theta_3 & 0 & -\sin \Theta_3 & a_3 \cos \Theta_3 \\ \sin \Theta_3 & 0 & \cos \Theta_3 & a_3 \sin \Theta_3 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos \Theta_4 & 0 & \sin \Theta_4 & 0 \\ \sin \Theta_4 & 0 & -\cos \Theta_4 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} \cos \Theta_5 & 0 & \sin \Theta_5 & 0 \\ \sin \Theta_5 & 0 & -\cos \Theta_5 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & s_5 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} t_{11} & t_{12} & t_{13} & t_{14} \\ t_{21} & t_{22} & t_{23} & t_{24} \\ t_{31} & t_{32} & t_{33} & t_{34} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}. \quad (11)$$

Відомо, що стовпці матриці  $T_5$  мають геометричне тлумачення. Перші три елементи першого, другого і третього стовпців є напрямними косинусами відповідно до осей  $x_n$ ,  $y_n$ ,  $z_n$  у системі  $0$ , а три елементи четвертого стовпця – це

координати  $x_c$ ,  $y_c$ ,  $z_c$  центру захоплювача в тій же системі:

$$T_n = \begin{bmatrix} \cos(\vec{i}_n, \vec{i}_0) & \cos(\vec{j}_n, \vec{i}_0) & \cos(\vec{k}_n, \vec{i}_0) & x_c \\ \cos(\vec{i}_n, \vec{j}_0) & \cos(\vec{j}_n, \vec{j}_0) & \cos(\vec{k}_n, \vec{j}_0) & y_c \\ \cos(\vec{i}_n, \vec{k}_0) & \cos(\vec{j}_n, \vec{k}_0) & \cos(\vec{k}_n, \vec{k}_0) & z_c \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}. \quad (12)$$

Отже, отримана матриця  $T_5$  визначає напрямні косинуси:

$$t_{11} = \cos(\vec{i}_5, \vec{i}_0) = \cos(\Theta_2 + \Theta_3) \cos \Theta_4 \cos \Theta_5 - \cos \Theta_5 \sin(\Theta_2 + \Theta_3) \sin \Theta_4; \quad (13)$$

$$t_{21} = \cos(\vec{i}_5, \vec{j}_0) = \cos \Theta_5 \cos \Theta_4 \sin(\Theta_2 + \Theta_3) + \cos \Theta_5 \sin \Theta_4 \cos(\Theta_2 + \Theta_3); \quad (14)$$

$$t_{31} = \cos(\vec{i}_5, \vec{k}_0) = \sin \Theta_5; \quad (15)$$

$$t_{12} = \cos(\vec{j}_5, \vec{i}_0) = \cos \Theta_4 \sin(\Theta_2 + \Theta_3) + \sin \Theta_4 \cos(\Theta_2 + \Theta_3); \quad (16)$$

$$t_{22} = \cos(\vec{j}_5, \vec{j}_0) = \sin \Theta_4 \sin(\Theta_2 + \Theta_3) - \cos \Theta_4 \cos(\Theta_2 + \Theta_3); \quad (17)$$

$$t_{32} = \cos(\vec{j}_5, \vec{k}_0) = 0; \quad (18)$$

$$t_{13} = \cos(\vec{k}_5, \vec{i}_0) = \cos(\Theta_2 + \Theta_3) \cos \Theta_4 \sin \Theta_5 - \sin \Theta_5 \sin(\Theta_2 + \Theta_3) \sin \Theta_4; \quad (19)$$

$$t_{23} = \cos(\vec{k}_5, \vec{j}_0) = \sin \Theta_5 \cos \Theta_4 \sin(\Theta_2 + \Theta_3) + \sin \Theta_5 \sin \Theta_4 \cos(\Theta_2 + \Theta_3); \quad (20)$$

$$t_{33} = \cos(\vec{k}_5, \vec{k}_0) = -\cos \Theta_5; \quad (21)$$

а також координати центра захоплювального пристрою:

$$t_{14} = x_c = a_1 + a_2 \cos \Theta_2 + s_5 [\cos \Theta_4 \sin(\Theta_2 + \Theta_3) + \sin \Theta_4 \cos(\Theta_2 + \Theta_3)] + a_3 \cos(\Theta_2 + \Theta_3); \quad (22)$$

$$t_{24} = y_c = a_2 \sin \Theta_2 - s_5 [\cos \Theta_4 \cos(\Theta_2 + \Theta_3) - \sin \Theta_4 \sin(\Theta_2 + \Theta_3)] + a_3 \sin(\Theta_2 + \Theta_3); \quad (23)$$

$$t_{34} = z_c = s_1. \quad (24)$$

Результати розрахунку для обраної часової послідовності кутів повороту. Формули (13)–(24) були використані для тестування положення

маніпулятора з наступними параметрами довжин ланок:  $S_{10} = 0$ ;  $a_1 = 2$  м;  $a_2 = 0,5$  м;  $a_3 = 0,5$  м;  $S_5 = 0,5$  м, а часова послідовність лінійного зсуву  $\Delta S_1$  і кутів повороту  $\Delta\theta_2 - \Delta\theta_5$  задана, як показано на рис. 3.

У якості опорних точок обрані положення захоплювача маніпулятора, які на рис. 4-6 позначені позиціями 0–5. Ці рисунки ілюструють прямий кінематичний аналіз портального робота-маніпулятора з п'ятьма ступенями свободи: одна лінійна (переміщення каретки на відстань  $\Delta S_1$ ) та чотири обертових ( $\Delta\theta_2 - \Delta\theta_5$ ), причому з графіка на рис. 3 можна зробити такі висновки: робот рухається поетапно: кожна дія триває 1 секунду, і зміна одного ступеня свободи відбувається після завершення попереднього. У перший інтервал (0-1 с) виконується обертання зчленування на кут  $\theta_2$  до  $90^\circ$ . Потім (1-2 с) виконується обертання  $\theta_3$  на  $-90^\circ$ . У третьому інтервалі часу (2-3 с) активується лінійне переміщення  $\Delta S_1$  на 1,5 метра. Далі (3-4 с) відбувається обертання  $\theta_4$  на  $90^\circ$ , а в останньому інтервалі (4–5 с) – обертання  $\theta_5$  на  $-90^\circ$ . Такий підхід до керування дозволяє точно аналізувати вплив кожного окремого приводу на положення виконавчого органу. Така візуалізація є типовою для послідовного калібрування, симуляцій або тестових запусків при вивченні прямої кінематики. Вона підтверджує правильність кінематичної моделі, оскільки забезпечує логічну зміну координат у відповідь на задані переміщення та обертання.

Сукупність тестових позицій із позначенням базової  $(x_0, y_0, z_0)$  та кінцевої  $(x_5, y_5, z_5)$  систем координат досліджуваного портального робота показана на його 3D-зображеннях на рис. 7.

Результати розрахунку координат центра захоплювача  $(x_c, y_c, z_c)$  у базовій системі координат  $(x_0, y_0, z_0)$  для послідовності положень 1–5 наведені на рис. 8; результати розрахунку орієнтації вектора  $\vec{i}_5$  у базовій системі координат  $(\vec{i}_0, \vec{j}_0, \vec{k}_0)$  наведені на рис. 9; результати розрахунку орієнтації векторів  $\vec{j}_5$  і  $\vec{k}_5$  у базовій системі координат  $(\vec{i}_0, \vec{j}_0, \vec{k}_0)$  наведені на рис. 10 і 11, відповідно.

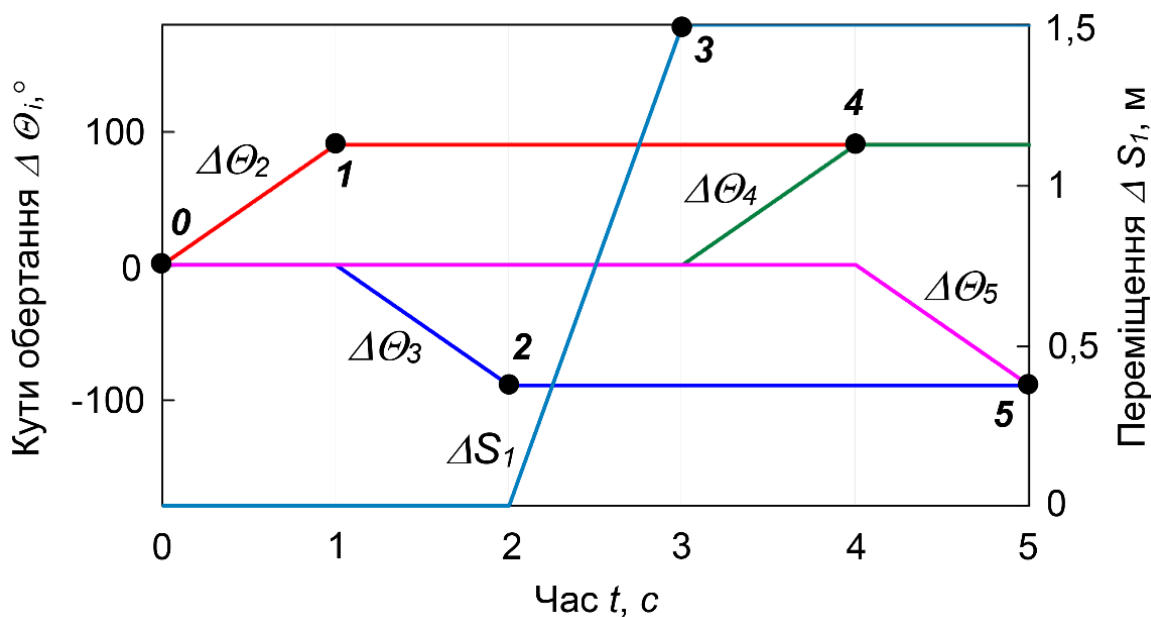


Рис. 3. Часова послідовність зміни положення  $\Delta S_1$  та кутів повороту  $\Delta\theta_2 - \Delta\theta_5$

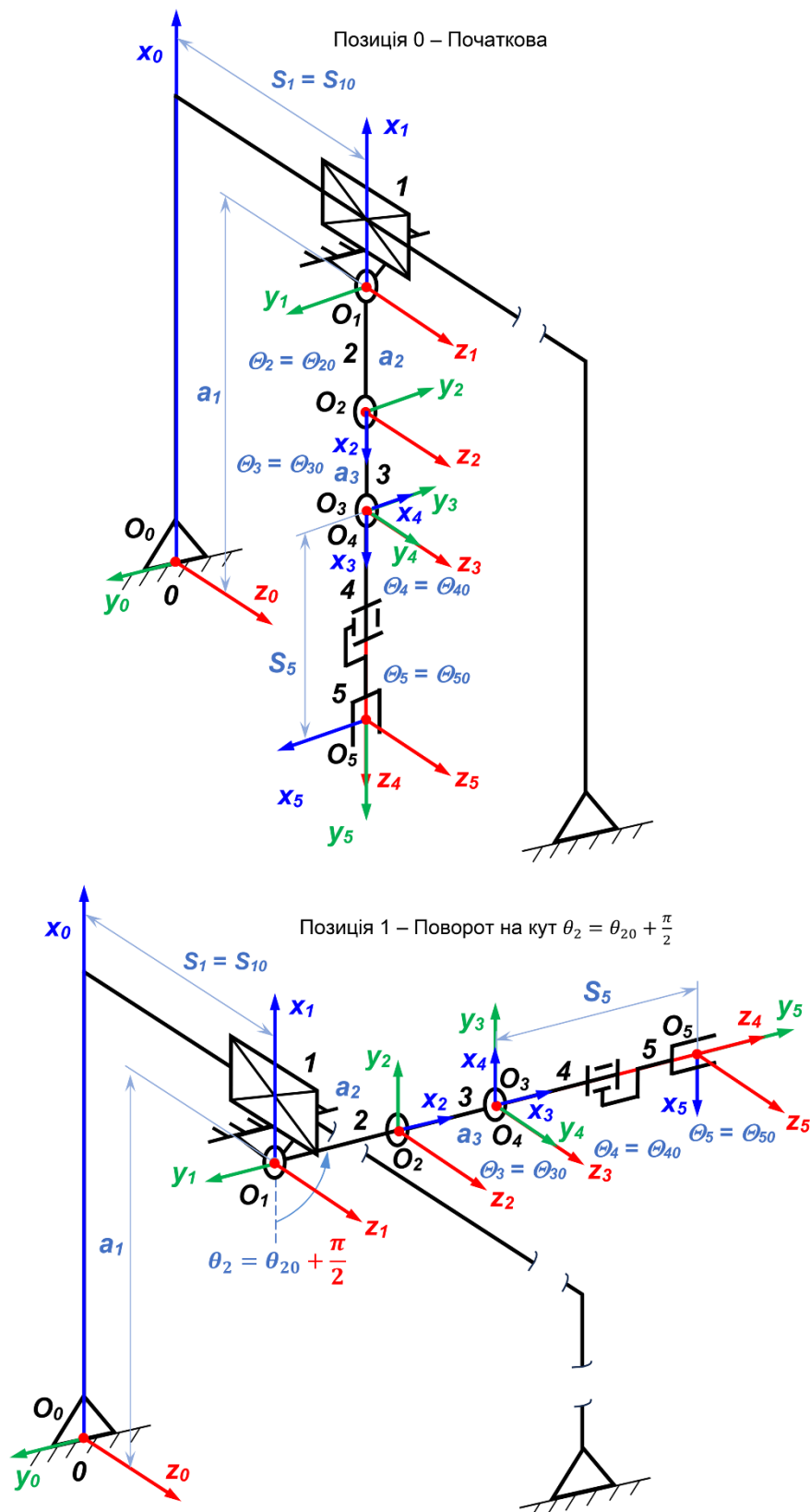


Рис. 4. Тестова зміна положень досліджуваного портального робота-маніпулятора з початкового – позиція 0, до наступного – позиція 1

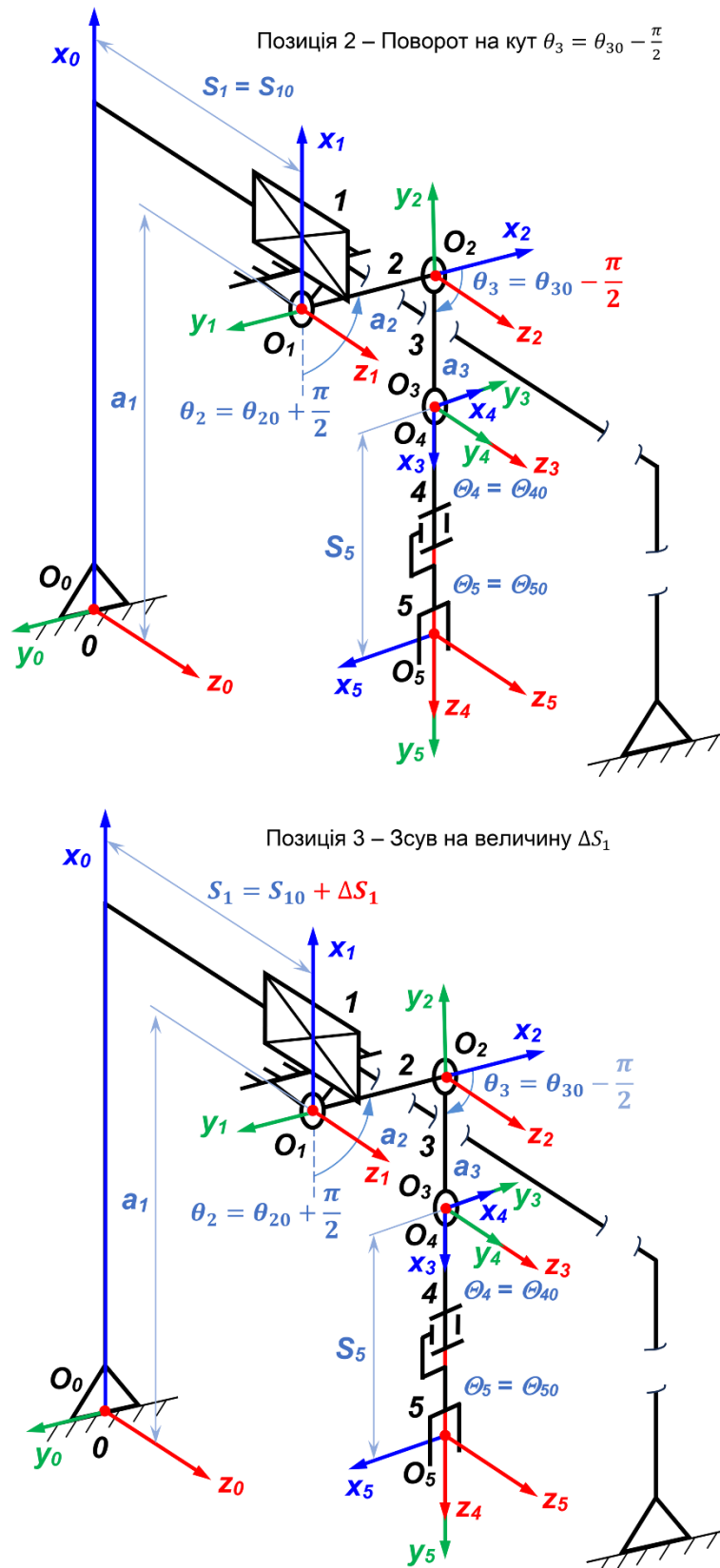


Рис. 5. Тестова зміна положень досліджуваного порталного робота-маніпулятора з позиції 2 до позиції 3

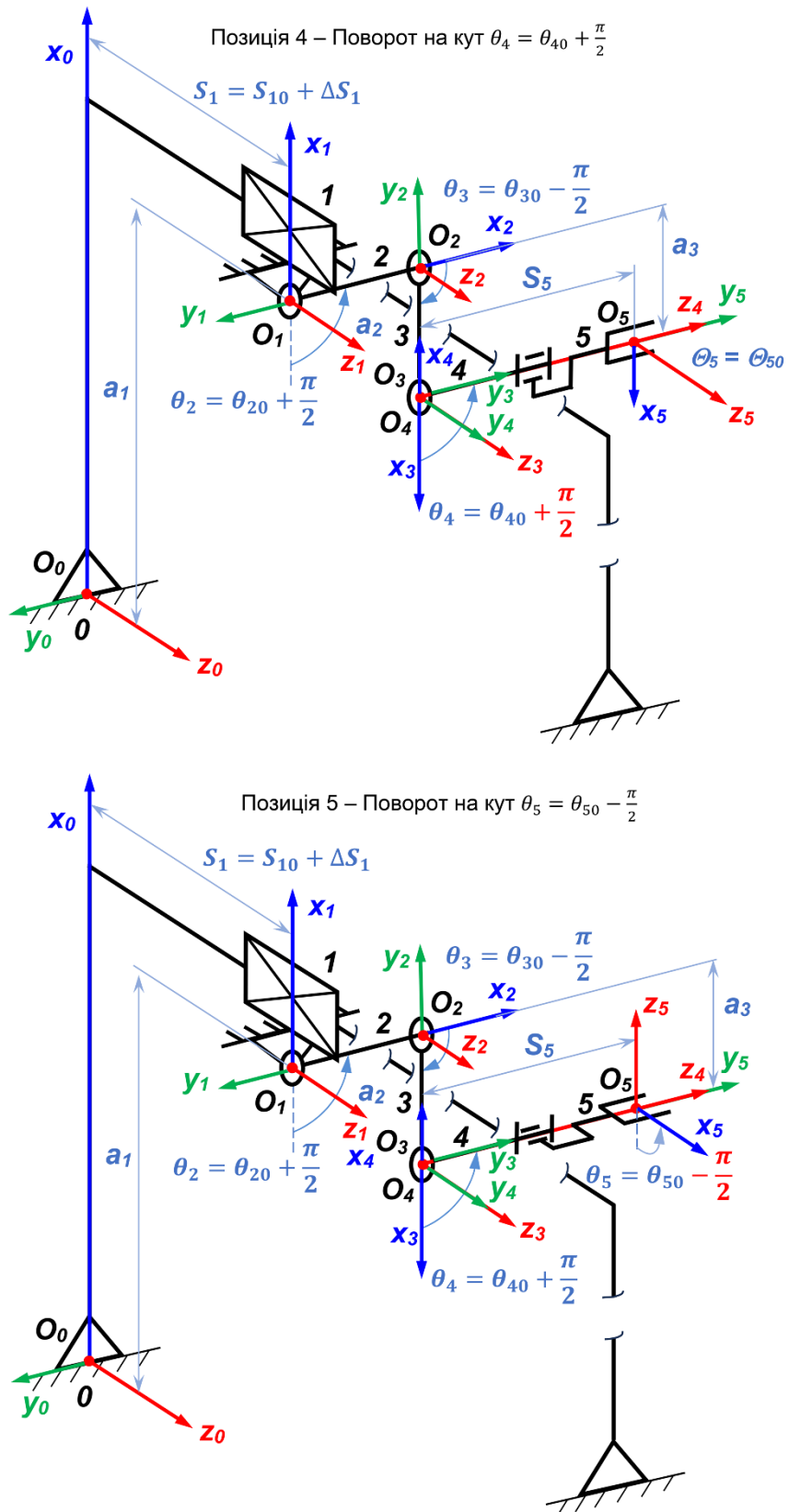


Рис. 6. Тестова зміна положень досліджуваного порталного робота-маніпулятора з позиції 4 до позиції 5

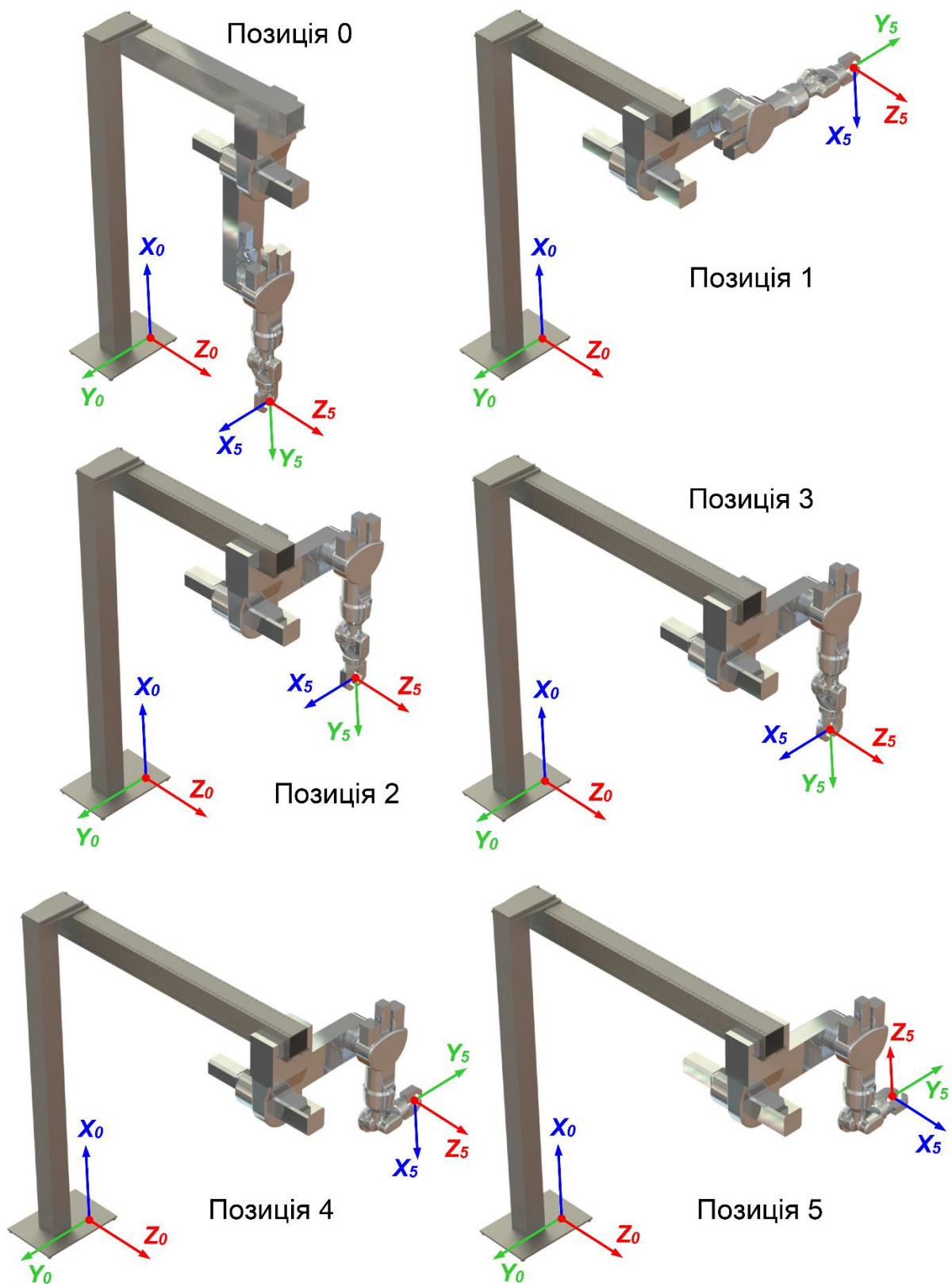


Рис. 7. Послідовність досліджуваних положень робота-маніпулятора порталного типу

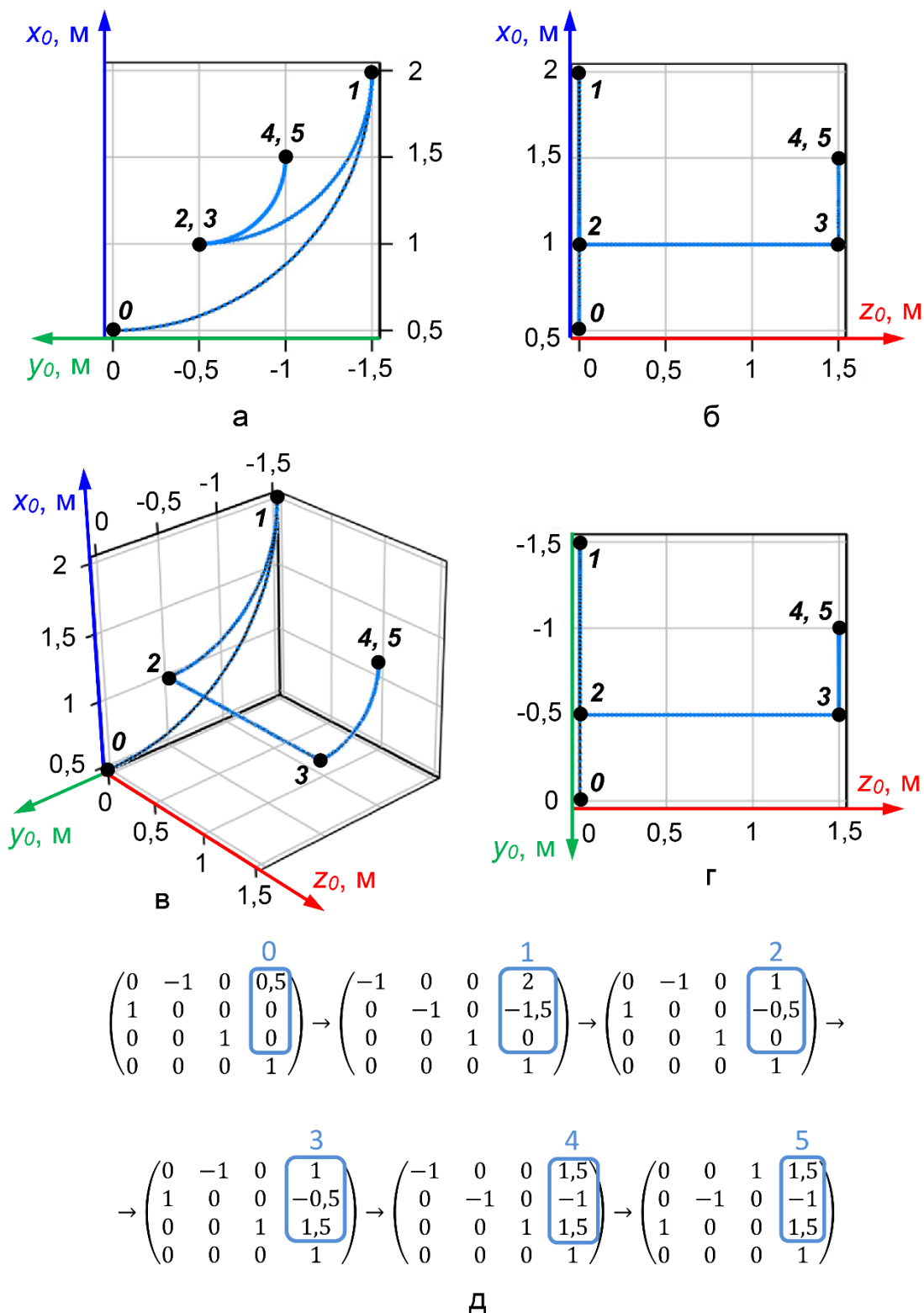


Рис. 8. Результати розрахунку координат центра захоплювача  $(x_c, y_c, z_c)$  у базовій системі координат  $(x_0, y_0, z_0)$  для послідовності положень 0–5 (див. рис. 7): а – проєкція на площину  $x_0 - y_0$ ; б – проєкція на площину  $x_0 - z_0$ ; в – аксонометрична проєкція; г – проєкція на площину  $y_0 - z_0$ ; д – послідовність змінень елементів матриці переходу  $T_5$  під час руху між положеннями 0–5



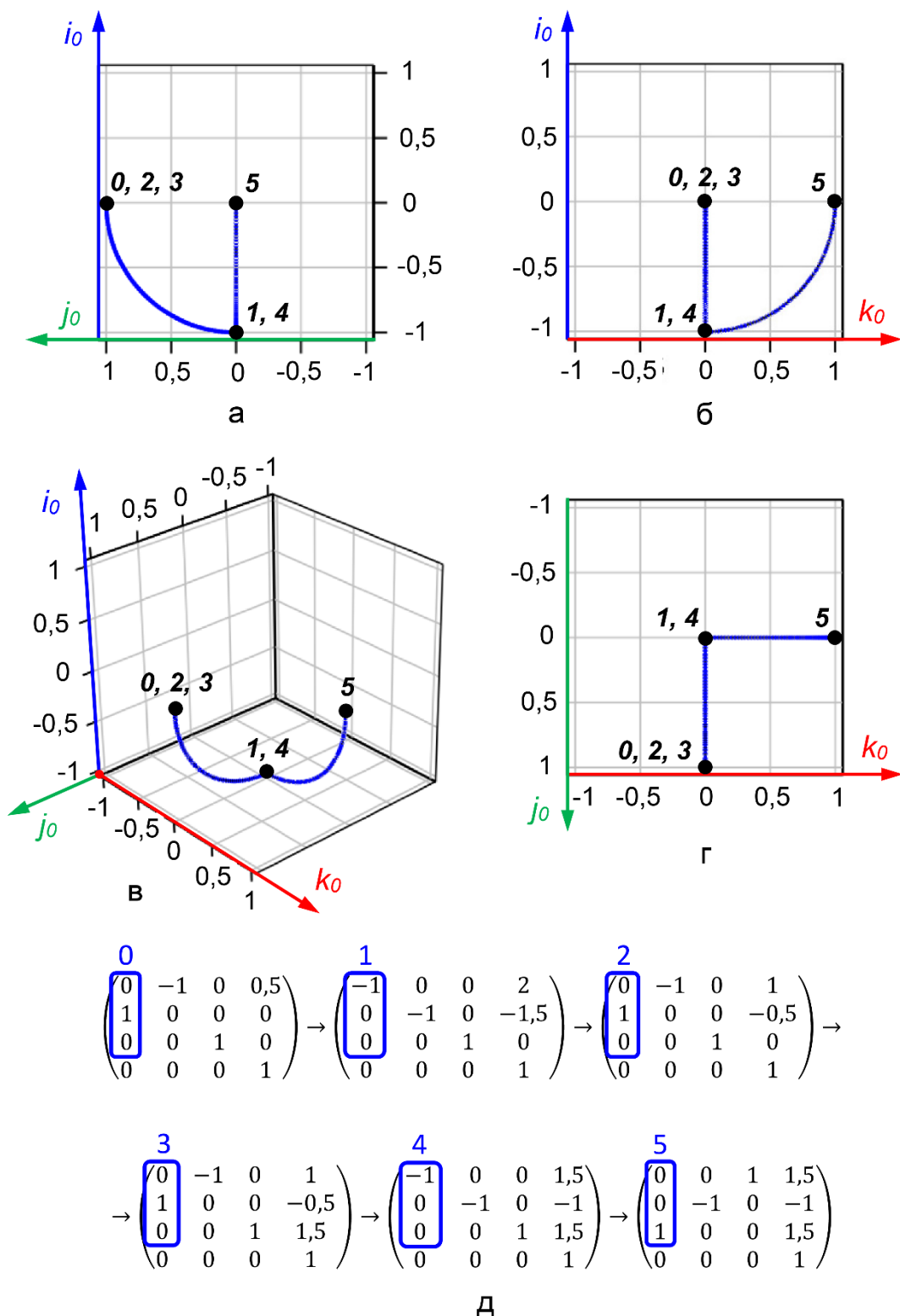


Рис. 9. Результати розрахунку орієнтації вектора  $\vec{i}_5$  у базовій системі координат  $(\vec{i}_0, \vec{j}_0, \vec{k}_0)$  для послідовності положень 0–5 (див. рис. 7): а – проекція на площину  $i_0 - j_0$ ; б – проекція на площину  $i_0 - k_0$ ; в – аксонометрична проекція; г – проекція на площину  $j_0 - k_0$ ; д – послідовність зміння елементів матриці переходу  $T_5$  під час руху між положеннями 0–5

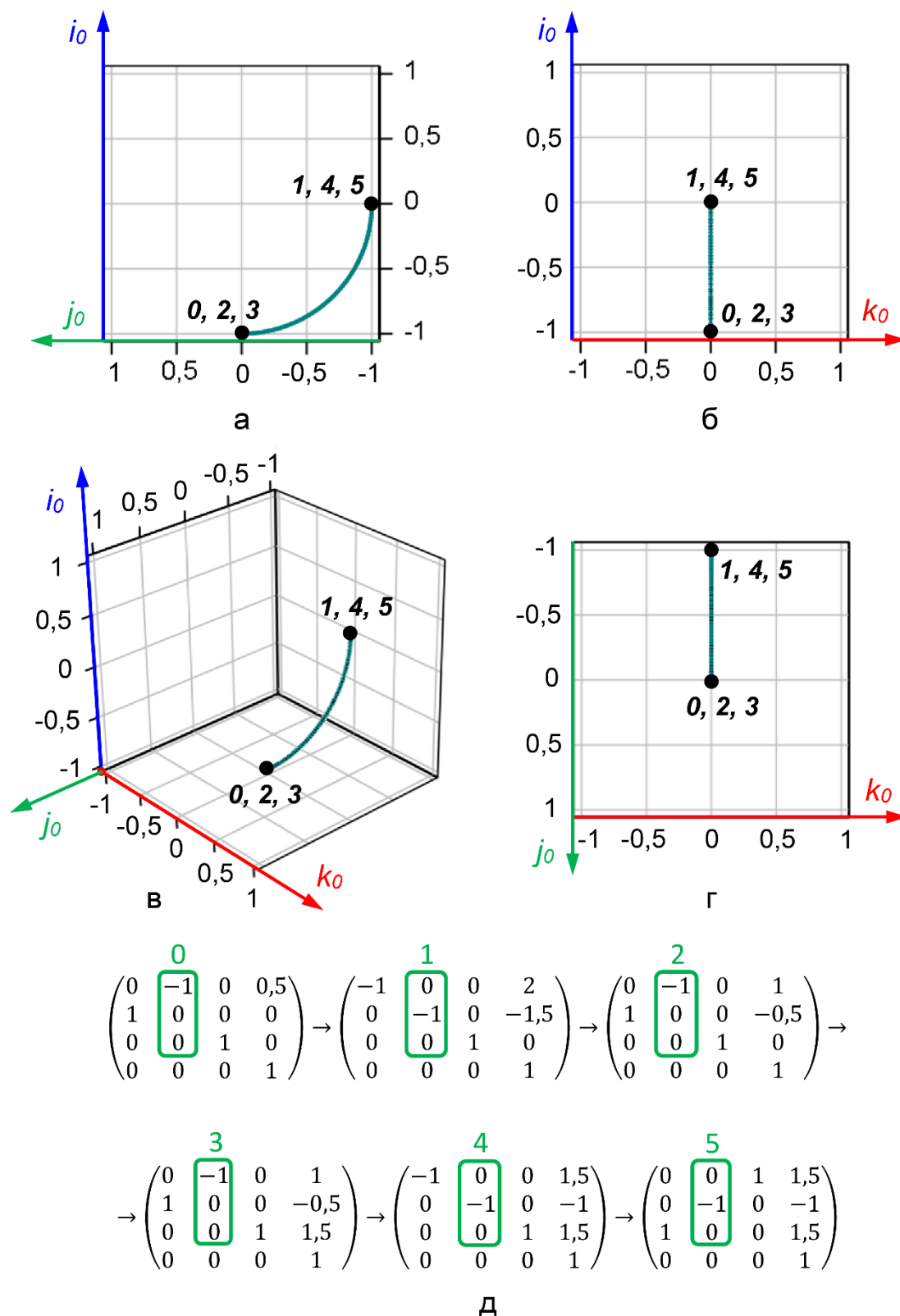


Рис. 10. Результати розрахунку орієнтації вектора  $\vec{j}_5$  у базовій системі координат  $(\vec{i}_0, \vec{j}_0, \vec{k}_0)$  для послідовності положень 0–5 (див. рис. 7): а – проєкція на площину  $i_0 - j_0$ ; б – проєкція на площину  $i_0 - k_0$ ; в – аксонометрична проєкція; г – проєкція на площину  $j_0 - k_0$ ; д – послідовність змінень елементів матриці переходу  $T_5$  під час руху між положеннями 0–5

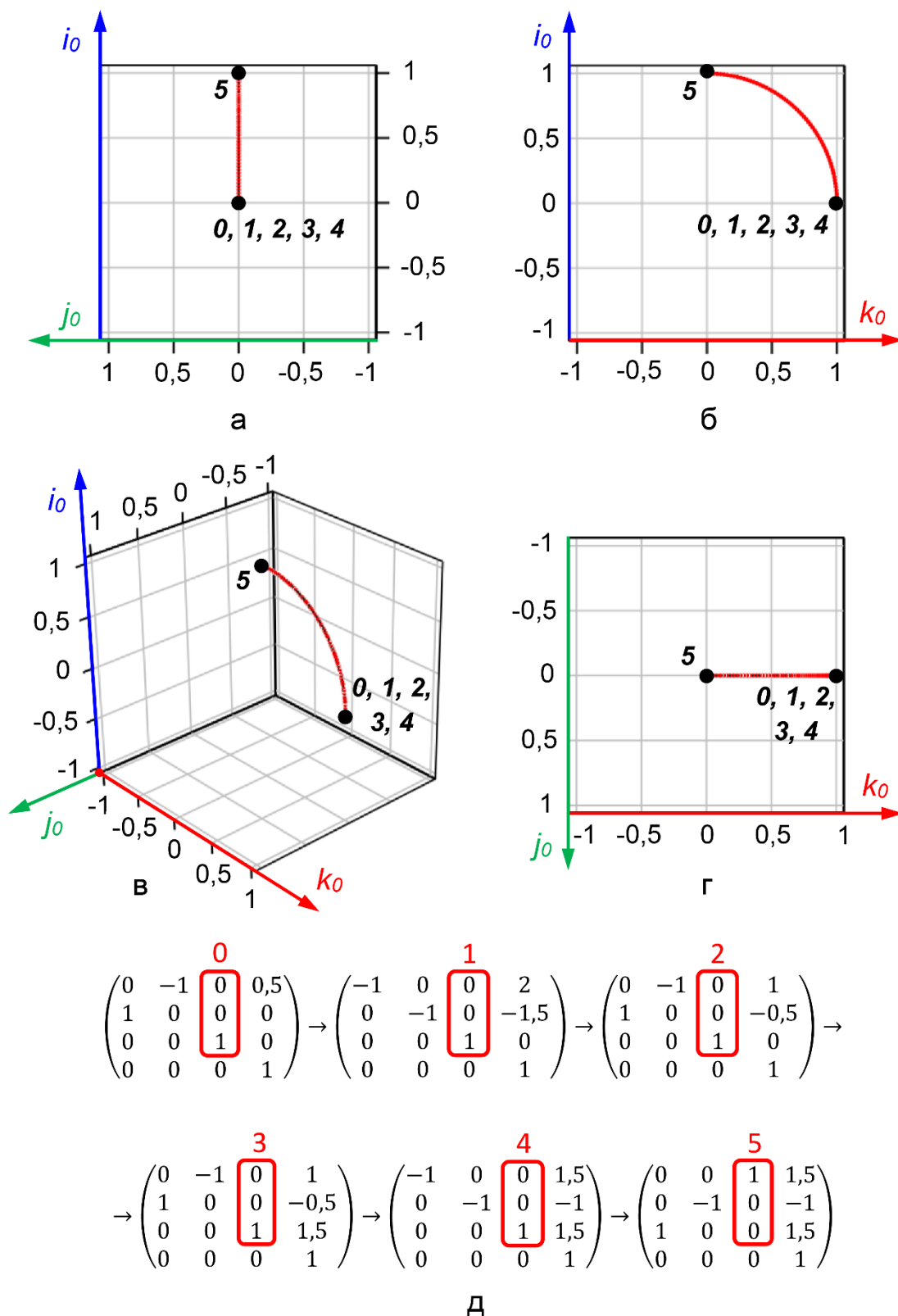


Рис. 11. Результати розрахунку орієнтації вектора  $\vec{k}_5$  у базовій системі координат  $(\vec{i}_0, \vec{j}_0, \vec{k}_0)$  для послідовності положень 0–5 (див. рис. 7): а – проєкція на площину  $i_0 - j_0$ ; б – проєкція на площину  $i_0 - k_0$ ; в – аксонометрична проєкція; г – проєкція на площину  $j_0 - k_0$ ; д – послідовність зміння елементів матриці переходу  $T_5$  під час руху між положеннями 0–5

## Висновки

У даній роботі було успішно реалізовано аналітичне розв'язання прямої задачі кінематики для портального робота-маніпулятора з п'ятьма ступенями свободи шляхом застосування класичного методу Денавіта-Хартенберга. Побудована математична модель дозволила формалізовано описати кінематичний ланцюг маніпулятора через послідовність однорідних матриць перетворення, що забезпечило обчислення положення та орієнтації захоплювача відносно базової системи координат. Результати симуляційного експерименту, що включав поетапне переміщення кожного ступеня свободи, підтвердили коректність побудованої моделі та логічну узгодженість кінематичних розрахунків із передбачуваною поведінкою механізму.

Отримані графіки зміни положення центра захоплювача та орієнтації координатних осей дозволили оцінити вплив кожного окремого приводу на кінцеве положення виконавчого органу. Таким чином, побудована модель є придатною не лише для аналізу кінематики, а й для розробки систем автоматизованого керування рухом, програмної симуляції, створення цифрових двійників і попередньої перевірки конфігурацій у CAD/CAE середовищах. Представлений підхід має універсальний характер і може бути масштабований до роботів іншої конфігурації або з більшою кількістю ступенів свободи.

Подальші дослідження можуть бути зосереджені на розв'язанні задачі зворотної кінематики, включенні динамічних характеристик, оптимізації траєкторій руху та реалізації зворотного зв'язку в системах керування. Результати роботи сприяють підвищенню точності, адаптивності та функціональної надійності робототехнічних систем у контексті сучасного «розумного» виробництва.

## References

1. Gantry Robot for Mobile Observation / H. Jamaludin, M. N. Mansor, A. K. Junoh, A. Idris // *Applied Mechanics and Materials*. – 2015. – Vol. 798. – p. 70-74.
2. Development of multi-axis gantry type welding robot system using a PC-based controller / J. Lee, J. Kim, H. Kim, I. Park. – *IEEE International Symposium on Industrial Electronics Proceedings*. – 2001. – Vol.3. – p. 1536-1541.
3. Diagnostics Laboratory Automation – Archiving Vacuum Tubes Using a Low-Cost Gantry Robot / R. P. Badiger; V. N. Patil; S. Marathe; N. Ananya. – *International Conference on Control, Automation and Robotics (ICCAR) : Orchard District, Singapore*. – 2024. – p. 159-165.
4. Linear Gantry Robot Control System / S. Date, S. Makwana, D. Mewada, S. D. Degadwala. – *4th National Conference on Advances in Engineering and Applied Science : Maharashtra, India*. – 2020. – Vol. 5, Iss. 7. – p. 30-38.
5. Development of multi-axis gantry type welding robot system using a PC-based controller / J. Lee, J. Kim, H. Kim, I. Park. – *IEEE International Symposium on Industrial Electronics Proceedings : Pusan, Korea (South)*. – 2001. – Vol. 3. – p. 1536-1541.
6. Dynamic Scheduling of Gantry Robots using Simulation and Reinforcement Learning / H. Zisgen, R. Miltenberger, M. Hochhaus, N. Stöhr. – *Winter Simulation Conference : San Antonio, USA*. – 2023. – p. 3026-3034.
7. Mobile Gantry Robot for Pick & Place Application / L. P. Chandak, A. Junghare, T. Naik, N. Ukani, S. Chakole. – *IEEE International Students' Conference*

on Electrical, Electronics and Computer Science : Bhopal, India. – 2020. – p. 1-5.

8. Ranaganathan, S. A Customised Gantry Pick and Place System for Forging Industries / S. Ranaganathan., M. Saravanabalaji, V. Athappan. – International Conference on Advancements in Electrical, Electronics, Communication, Computing and Automation : Coimbatore, India. – 2021. – p. 1-4.

9. Černohorský, J. Laboratory gantry robot design and control / J. Černohorský, D. Lindr. – Proceedings of the 13th International Carpathian Control Conference : High Tatras, Slovakia, 2012, pp. 86-90.

10. Application of Denavit Hartenberg Method in Service Robotics / E. Prada, S. Murali, L. Miková, J. Ligusova // Acta Mechatronica. – 2020. – Vol. 5, Iss. 4. – p. 47-52.

11. Research on the Relationship between Classic Denavit-Hartenberg and Modified Denavit-Hartenberg / H. Wang, H. Qi, M. Xu, Y. Tang, J. Yao, X. Yan. – Seventh International Symposium on Computational Intelligence and Design : Hangzhou, China. – 2014. – p. 26-29.

12. Asif, S. Kinematics Analysis of 6-DoF Articulated Robot with Spherical Wrist / S. Asif, P. Webb // Mathematical Problems in Engineering. – 2021. – Vol. 2021, Iss. 1. – Article No. 6647035. – p. 1-11.

13. Ciuccio, R. Comparison of Modified D-H Notation with Standard D-H for and all of Direct Kinematics of Industrial Robotic manipulators / R. Ciuccio // Engineering and Technology Journal. – 2022. – Vol. 07, Iss. 07. – 2022. – p. 1419-1421.

14. Villalobos, J. Statistical comparison of Denavit-Hartenberg based inverse kinematic solutions of the UR5 robotic manipulator / J. Villalobos, I. Y. Sanchez, F. Martell, //International Conference on Electrical, Computer, Communications and Mechatronics Engineering (ICECCME). – Mauritius, Mauritius. – 2021. – p. 1-6.

15. Brodtmann, N. Kinematics of Serial Robotics - Algorithms for simplified calculation of Direct & Inverse Kinematics in a Consistent Coordinate Reference system / N. Brodtmann, D. Schilberg. – Emerging Technologies and Future of Work. AHFE (2023) International Conference : New York, USA. – 2023. – Vol. 117. – p. 34-38.

16. Corke, P. I. A Simple and Systematic Approach to Assigning Denavit-Hartenberg Parameters / P. I. Corke // IEEE Transactions on Robotics. – 2007. – Vol. 23, Iss. 3. – pp. 590-594.

17. Martínez, O. Comparing Methods Using Homogeneous Transformation Matrices for Kinematics Modeling of Robot Manipulators / O. Martínez, R. Campa. – Multibody Mechatronic Systems : Springer, Cham. – 2021. – Vol 94. – p. 127-136.

18. Industrial robot calibration method using Denavit - Hartenberg parameters / J. -W. Lee, G. -T. Park, J. -S. Shin and J. -W. Woo. – 17th International Conference on Control, Automation and Systems : Jeju, Korea (South). – 2017. – p. 1834-1837.

19. Baločková, L. The Method for Solving Kinematics of an Industrial Robot / L. Baločková // Applied Mechanics and Materials. – 2013. – Vol. 282. – P. 274-281.

20. Robot control and kinematic analysis with 6DoF manipulator using direct kinematic method / K. S. Gaeid, A. F. Nashee, I. A. Ahmed, M. H. Dekheel // Bulletin of Electrical Engineering and Informatics. – Vol.10, Iss.1. – 2021. – p. 70-78

21. Denavit, J. A kinematic notation for lower-pair mechanisms / J. Denavit, R. S. Hartenberg // Journal of Applied Mechanics. – 1955. – Vol. 22, Iss. 2. – p. 215-221.

Надійшла до редакції 09.05.2025, розглянута на редколегії 09.05.2025.

## Forward Kinematics Modeling of a 5-DOF Gantry Robot Using the Denavit–Hartenberg Method

This paper presents an analytical solution to the forward kinematics problem for a prospective gantry robotic manipulator with five degrees of freedom, intended for typical industrial automation tasks such as packaging, sorting, and precise object positioning. The manipulator's design includes one translational and four rotational actuators, providing high flexibility in controlling the end-effector's movement in space. To develop the mathematical model, the classical Denavit–Hartenberg (D-H) method was employed, allowing for a compact representation of the kinematic chain using four parameters for each joint. Local coordinate systems were sequentially constructed on each link, and parameters for offset, rotation, link length, and displacement were identified. Homogeneous transformation matrices were generated, leading to the final transformation matrix representing the end-effector's position and orientation relative to the base frame. To validate the model, a simulation of sequential joint movements was carried out, covering five characteristic manipulator poses. The results are presented as graphs showing changes in the end-effector's center coordinates and direction cosines, which reflect the orientation of the local coordinate axes. The visualization enabled tracking the influence of each degree of freedom individually and assessing the model's precision. The developed model is universal and may serve as a foundation for digital twin generation, motion control software development, pre-deployment testing in CAD/CAE environments, and integration into flexible manufacturing systems. The proposed approach enables efficient resolution of the forward kinematics problem and is easily adaptable to other gantry robot architectures with varying numbers of degrees of freedom. As such, this study contributes to improving the accuracy, repeatability, and reliability of robotic systems operating in complex production environments.

**Keywords:** gantry robot, forward kinematics, Denavit–Hartenberg method, manipulator.

### Відомості про авторів

**Баранов Олег Олегович** – доктор технічних наук, професор, завідувач кафедри теоретичної механіки, машинознавства та роботомеханічних систем, Національний аерокосмічний університет «Харківський авіаційний інститут» м. Харків, Україна, [O.Baranov@khai.edu](mailto:O.Baranov@khai.edu). ORCID: 0000-0001-5356-1125

**Ковальов Микита Павлович** – студент кафедри теоретичної механіки, машинознавства та роботомеханічних систем, Національний аерокосмічний університет «Харківський авіаційний інститут» м. Харків, Україна, [m.p.kovalov@student.khai.edu](mailto:m.p.kovalov@student.khai.edu). ORCID: 0009-0009-2631-9638

**Бреус Андрій Олександрович** – кандидат технічних наук, доцент, доцент кафедри теоретичної механіки, машинознавства та роботомеханічних систем, Національний аерокосмічний університет «Харківський авіаційний інститут» м. Харків, Україна, [A.Breus@khai.edu](mailto:A.Breus@khai.edu). ORCID: 0000-0002-7310-1465

### About the Authors

**Baranov Oleg**, Doctor of Technical Sciences, Professor, Head of Department of Theoretical Mechanics, Engineering and Robomechanical Systems, National

Aerospace University "Kharkiv Aviation Institute", Kharkiv, Ukraine, [O.Baranov@khai.edu](mailto:O.Baranov@khai.edu). ORCID: 0000-0001-5356-1125

**Kovalov Mykyta**, student of Department of Theoretical Mechanics, Engineering and Robomechanical Systems, National Aerospace University "Kharkiv Aviation Institute", Kharkiv, Ukraine, [m.p.kovalov@student.khai.edu](mailto:m.p.kovalov@student.khai.edu). ORCID: 0009-0009-2631-9638

**Breus Andrii**, PhD in Materials Science and Processing Technologies, Associate Professor of Department of Theoretical Mechanics, Engineering and Robomechanical Systems, National Aerospace University "Kharkov Aviation Institute", Kharkov, Ukraine, [A.Breus@khai.edu](mailto:A.Breus@khai.edu). ORCID: 0000-0002-7310-1465.