

УДК 004.942

doi: 10.32620/aktt.2026.4sup2.14

В. Ф. МИРГОРОД¹, І. М. ГВОЗДЕВА²¹ АТ «Елемент», Одеса, Україна² Національний університет «Одеська морська академія», Одеса, Україна

ІНТЕРВАЛЬНІ СТАТИСТИКИ ВИЗНАЧЕННЯ ДІАГНОСТИЧНИХ ПАРАМЕТРІВ ЕНЕРГЕТИЧНИХ УСТАНОВОК ПРИ НЕГАУСІВСЬКОМУ РОЗПОДІЛІ ВИХІДНИХ ДАНИХ

Пропонується підхід до визначення інтервальних оцінок значень діагностичних параметрів технічного стану енергетичних установок, зокрема, тих, що побудовані на основі газотурбінних двигунів, при стендових випробуваннях і довготривалій експлуатації в умовах негаусівського розподілу вихідних даних. Актуальність вирішення вказаного науково-прикладного завдання зумовлена необхідністю визначення відповідності результатів стендових випробувань вимогам технічних умов і поточного аналізу технічного стану зазначених об'єктів для встановлення можливості їх експлуатації за встановленим ресурсом. Виконано аналіз і порівняння методів інтервальної оцінки значень діагностичних параметрів технічного стану енергетичних установок у вигляді часових рядів з урахуванням відмінності від нормального розподілу вихідних даних. Часові ряди значень діагностичних параметрів технічного стану енергетичних установок є реалізаціями випадкових процесів, стохастична складова яких зумовлена випадковими збуреннями та природою процесів перетворення енергії. Встановлено, що відмінність розподілу вихідних даних від нормального може значно зміщувати інтервали оцінок перших моментів розподілу значень вимірювальних діагностичних параметрів енергетичних установок. Відповідно, таке зміщення інтервальних оцінок потребує коригування результатів стендових випробувань і оцінки технічного стану енергетичних установок у процесі довготривалої експлуатації вказаних об'єктів.

Запропонована удосконалена методика аналітичного вирішення поставленого науково-прикладного завдання, що дозволяє отримати інтервальні оцінки діагностичних параметрів енергетичних установок в умовах негаусівського розподілу вихідних даних.

Ключові слова: технічний стан, математичне моделювання, енергетичні установки, газотурбінний двигун, часові ряди, статистична модель, інтервальна оцінка

Вступ

Проблемні питання підвищення надійності діагностичних висновків щодо відповідності технічного стану складних енергетичних установок нормативним вимогам полягають у поточний час у отриманні достовірних оцінок таких параметрів, що визначають справний технічний стан. Сучасні методи оцінювання технічного стану складних енергетичних установок мають високий рівень досконалості та спираються на новітні технології багатовимірного аналізу даних, віддаленого моніторингу, штучного інтелекту та інші.

Але теоретичне, методичне та програмно-алгоритмічне забезпечення таких технологій загалом базується на так званих «лінійних» моделях, однією з яких статистична модель породження даних (СМПД). Вказана модель передбачає випадкову складову у вихідних даних як вибірку із сукупності незалежних некорельованих випадкових величин, що розподілені за нормальним (гаусівським) законом (модель ННВНН). Тобто, нормальний закон адитивної випадкової складової є апіорною гіпотезою для

можливості застосування відомих методів прикладної статистики, а саме, методів інтервальних оцінок, головних компонент, дисперсійного аналізу, трендового контролю та аналізу, тощо.

Практика застосування систем контролю та діагностування (СКД) стану енергетичних установок, зокрема, що побудовані на основі газотурбінних двигунів (ГТД), при стендових випробуваннях і довготривалій експлуатації, вказує, що виміри деяких діагностичних параметрів ГТД не відповідають вихідному припущенню щодо належності до вибірки із сукупності незалежних некорельованих випадкових величин, що розподілені за гаусівським законом. До таких діагностичних параметрів ГТД належать, що найменше, вібропараметри та температура газів за турбіною.

Тому дослідження щодо визначення інтервальних оцінок значень діагностичних параметрів технічного стану енергетичних установок, зокрема, що побудовані на основі газотурбінних двигунів, при стендових випробуваннях і в довготривалій експлуатації в умовах негаусівського розподілу вихідних даних вимірів таких параметрів, є актуальним і важливим науково-прикладним завданням.



1. Формулювання проблеми

Оцінювання значень параметрів технічного стану енергетичних установок, зокрема, що побудовані на основі газотурбінних двигунів, при стендових випробуваннях і довготривалій експлуатації, є, можливо, найпершим етапом обробки вихідних даних. На такому етапі, по перше, встановлюються інтервали стаціонарності таких даних, які характеризують відповідний режим ГТД. На встановлених інтервалах стаціонарності необхідно визначити усталене значення відповідного параметру, чи сукупності параметрів, для встановлення відповідності технічним умовам (ТУ), та середньоквадратичні похибки таких значень. Таким чином, вихідні дані становлять виміри фізичних параметрів технічного стану, які є реалізаціями процесів перетворення енергії та містять випадкову складову. Випадкова складова, яка зазвичай вважається адитивною, є наслідком похибок вимірювання та особливостей процесів перетворення енергії.

За нормативними документами (ДСТУ та ISO), отримані дані мають деякі інтервальні оцінки, які, власне, вказують на відповідність результатів випробувань чи експлуатації вимогам ТУ.

Такі інтервальні оцінки, що встановлені нормативними документами, базуються на вихідній гіпотезі про те, що випадкову складову у вихідних даних можливо розглядати як вибірку із сукупності незалежних некорельованих випадкових величин, що розподілені за гаусівським законом. Однак, така гіпотеза, на жаль, може бути спростована за відомими критеріями для деяких важливих діагностичних параметрів, зокрема, для температурних параметрів і рівня вібрації.

Таким чином, дослідження щодо визначення інтервальних оцінок значень діагностичних параметрів технічного стану енергетичних установок, зокрема, що побудовані на основі газотурбінних двигунів, при стендових випробуваннях і в довготривалій експлуатації в умовах негаусівського розподілу вихідних даних дозволяють встановити наближені до реальних межі вказаних оцінок.

Отже, має місце протиріччя між можливостями сучасних методів прикладної статистики та реальними обмеженнями їх застосування для діагностування технічного стану енергетичних установок в умовах негаусівського розподілу вихідних даних.

Дослідженню часових рядів, що характеризують процеси в різноманітних об'єктах, та розробці методів їх аналізу присвячено низку фундаментальних робіт [1–6]. Прикладні дослідження у вказаному напрямку розглянуті в [7, 8, 9].

Метою пропонованого дослідження є вирішення вказаного протиріччя шляхом удосконалення статистичної моделі породження даних (СМПД), яка враховує негаусівський розподіл вихідних даних, та отримання в аналітичному вигляді математичного опису інтервальних оцінок перших моментів такого розподілу.

2. Вирішення проблеми

2.1. Інтервальні оцінки значень діагностичних параметрів технічного стану енергетичних установок

Інтервальні оцінки перших моментів розподілу вихідних даних у вигляді часових рядів вимірів за умови прийняття гіпотези моделі ННБВН для адитивної випадкової складової мають відомий наступний вигляд, що нормований вимогами документами (ДСТУ та ISO).

Довірчий інтервал для першого моменту розподілу спирається на гіпотезу, що центрована та нормована випадкова величина, яка відповідає моделі ННБВН, має розподіл Стюдента. Тому довірчий інтервал становить

$$m_N - t_q \frac{S}{\sqrt{N}} \leq m \leq m_N + t_q \frac{S}{\sqrt{N}},$$

де m_N – вибіркове значення середнього,

S – квадрат вибіркового середньоквадратичного значення,

t_q – квантиль розподілу Стюдента на рівні значимості q , або з довірчою ймовірністю $1 - q$,

N – обсяг вибірки.

Довірчий інтервал для другого моменту розподілу спирається на гіпотезу, що сума квадратів центрованих та нормованих випадкових величин, що відповідають моделі ННБВН, має розподіл χ^2 . Тому довірчий інтервал становить

$$\frac{(N-1) * S_v}{\chi_2^2} \leq \sigma^2 \leq \frac{(N-1) * S_v}{\chi_1^2},$$

де S_v – виправлена вибіrkова дисперсія,

$$S_v = \frac{N * S}{N-1},$$

χ_2^2, χ_1^2 – критичні значення розподілу на заданому рівні значимості, а саме

$$\chi_1^2 = \chi_{1-q/2, N-1}^2,$$

$$\chi_2^2 = \chi_{q/2, N-1}^2.$$

Відповідні розподіли приймаються в наступному відомому [10] вигляді.

Розподіл Стюдента:

$$f_t(y) = \Gamma((N+1)/2) \Gamma^{-1} \times \\ \times (N/2)(N\pi)^{-1} (1+y^2/N)^{-(N+1)/2}$$

Розподіл χ^2 :

$$f_{\chi^2}(y) = \begin{cases} 0, y < 0, \\ \Gamma^{-1}(N/2) 2^{-N/2} y^{(N-2)/2} e^{-y/2}, y \geq 0. \end{cases}$$

де Γ – гамма-функція,

N – число ступенів свободи.

Розуміється, що вказані інтервальні оцінки перших моментів розподілу вихідних даних можуть бути застосовані тільки за умови прийняття гіпотези щодо моделі ННВВН адитивної випадкової складової. Перевірка справедливості такої умови виконується за допомогою відомих критеріїв узгодження, зокрема Колмогорова – Смирнова, χ^2 та інших.

Але в альтернативному випадку такі інтервальні оцінки не є дійсними.

Практика застосування критеріїв узгодження до реальних даних не підтверджує відповідність опорній гіпотезі для деяких параметрів технічного стану.

2.2. Вихідна гіпотеза щодо статистичної моделі породження даних

Характер розподілу даних вимірів повністю визначається функцією щільності ймовірності (ФЩЙ). У випадку негаусівського розподілу необхідно врахувати моменти третього та четвертого порядків, оскільки асиметрія та ексцес можуть бути оцінені безпосередньо по вибірках даних вимірів і нормовані ДСТУ чи відповідними ISO. Ексцес і його відмінність вказує на наявність значних відхилень у вибірці вихідних даних, що є суттєвим чинником при діагностиці та проявляється у вигляді так званих «тяжких хвостів» у ФЩВ. У подальшому в основному розглядається вплив значень моменту четвертого порядку при негаусівському розподілі вихідних даних на зміну довірчих ймовірностей інтервальних оцінок середнього і дисперсії.

Відомо [10], що довільна ФЩВ може бути представлена через її моменти нескінченним рядом Еджворта (Грамма-Шарлье):

$$f_a(x) = f_n(x) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \frac{b_n}{\sigma^n} H_n(x), \quad (1)$$

де $f_n(x)$ – ФЩВ нормального розподілу,

$H_n(x)$ – одновимірні поліноми Чебишева – Ерміта,

b_n – квазімоменти розподілу.

Відповідно нормативним документам, урахуються тільки перші два моменти для моделі ННВВН та ще третій і четвертий моменти, які відповідають коефіцієнту асиметрії та ексцесу для моделі негаусівського розподілу вихідних даних.

З урахуванням третього та четвертого моментів, ФЩЙ розподілу вихідних даних має наступний вигляд:

$$f_{na}(x) = f_n(x) \left(1 + \frac{1}{3!} j_1 (x^3 - 3x) + \frac{1}{4!} j_2 (x^4 - 6x^2 + 3) \right), \quad (2)$$

де $j_1 = \mu_3 / \sigma^3$, $j_2 = \mu_4 / \sigma^4 - 3$ – коефіцієнти асиметрії та ексцесу, відповідно,

μ_3, μ_4 – центральні моменти третього та четвертого порядку, відповідно.

Але запропонована модель має значні обмеження щодо значень ексцесу, оскільки існує незаперечна вимога позитивності ФЩЙ у діапазоні її значень. Тому в поточному дослідженні пропонується більш досконала модель, яка забезпечує виконання вказаної умови, а саме у вигляді

$$f_{na}(x) = f_n(x) \left(1 + \frac{1}{3!} j_1 (x^3 - 3x) + \frac{1}{4!} j_2 (x^4 - 6x^2 + 3) + \varphi(x) \right) C,$$

де $\varphi(x)$ – деяка невід’ємна функція,

C – нормуючий множник.

2.3. Алгоритм вирішення завдання

Як це обґрунтовано, основним питанням вирішення зазначеної проблеми встановлення інтервальних оцінок вихідних даних є визначення аналітичного вигляду ФЩЙ, що відповідає розподілу χ^2 .

Але розподіл χ^2 , за його статистичною інтерпретацією, є розподілом суми квадратів N випадкових величин, які відповідають моделі ННВВН. Якщо такої відповідності немає, то такий розподіл не має властивостей вказаного. Тому доцільно ввести саме позначення розподілу суми квадратів ННВВ без умови нормальності закону розподілення вихідних даних, а саме розподілу СКННВВ. Тому вирішення центрального завдання дослідження складається у визначенні аналітичного вигляду ФЩЙ розподілу СКННВВ у порівнянні з розподілом χ^2 , з метою визначення впливу ексцесу на зміщення квантилів та рівнів значимості інтервальних оцінок.

Розроблений авторами алгоритм отримання розподілу СКННВВ для моделі (2) має наступний вигляд:

- Отримання ФЦІЙ квадрата ВВ відповідно до моделі (2) та її модифікації.
- Перехід в область зображень.
- Зведення функції зображення в необхідний степінь.
- Зворотне перетворення та отримання оригіналу.

Усі зазначені перетворення виконані в аналітичному вигляді.

Отримання ФЦІЙ квадрата ВВ відповідно моделі (2) дає наступний відомий результат [8] для випадку $j_1 = 0$, :

$$f_1(z) = (2\pi z)^{-0,5} e^{-z/2} \left(\frac{j_2(z^2 - 6z + 3)}{24} + 1 \right).$$

У результаті виконання запропонованого алгоритму отримується шукана ФЦІЙ СКННВВ для моделі (2):

$$f_{n\chi^2} = \begin{cases} 0, y < 0, \\ f_{\chi^2}(y) \left(1 + \sum_{k=1}^N j_2^k \sum_{r=0}^{2k} a_{kr} y^{2k-r} \right), y \geq 0, \end{cases} \quad (3)$$

де $a_{kr} = \text{const.}$

Параметри отриманого розподілу залежать від параметрів вихідного розподілу (2), але вказані залежності мають досить складний і громіздкий характер і не можуть бути наведені в форматі наукової статті. Але запропонований алгоритм є вичерпним і доступним для його використання.

Вигляд отриманого розподілу для моделі (2) ілюструє рис. 1. На рис. 2 наведено порівняння отриманого розподілу зі стандартним при помірному значенні ексцесу.

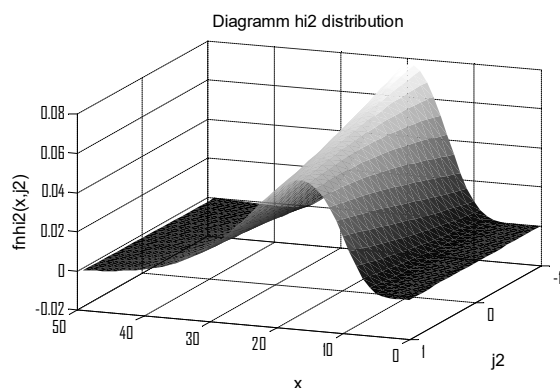


Рис. 1. Розподіл (3) при $N = 20$

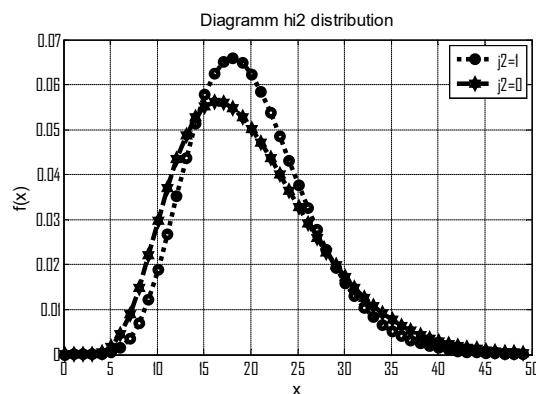


Рис. 2. Розподіл (3) при $N = 20$ $j_2 = 1$

Отримання розподілу, що є відповідним розподілу Стюдента для моделі (2), є більш простим завданням. За статистичною інтерпретацією, такий розподіл є результатом утворення відношення ВВ за моделлю (2) до ВВ, що є коренем від такої, що розподілена за законом (3) [10]. Відповідні результати також отримано в аналітичному виді [7,8].

3. Результати вирішення завдання

Результати вирішення встановленого науково-прикладного завдання полягають у тому, що навіть помірні відмінності ексцесу розподілу вихідних даних від його значення для нормального розподілу значно зміщують квантили розподілу СКННВВ. Відповідно, змінюються межі інтервальних оцінок на заданому рівні значимості.

Але в діапазоні важливих для практичних застосувань значень довірчої ймовірності 0,9...0,95 квантили розподілу, що є аналогом розподілу Стюдента, не мають суттєвої зміни. Тому стандартні інтервальні оцінки середнього, навіть за умови негаусівського розподілу в межах моделі (2), мають високу достовірність щодо ексцесу розподілу вихідних даних. Напроти, інтервальні оцінки дисперсії мають значне зміщення в сторону їх розширення.

Висновки

Мета дослідження у вигляді удосконалення статистичної моделі породження даних (СМПД), яка враховує негаусівський розподіл вихідних даних, і отримання в аналітичному вигляді математичного опису інтервальних оцінок перших моментів такого розподілу досягнута аналітичним обґрунтуванням вирішення поставленого науково-прикладного завдання.

Установлено, що запропонований алгоритм аналітичного опису важливих розподілів щодо інтервальної оцінки вихідних даних в умовах негаусівського вигляду такого розподілу надає можливість удосконалити методи визначення усталеного середнього та межі середньоквадратичної похибки такого визначення.

Перспективою подальших досліджень є застосування запропонованого підходу для визначення інтервальних оцінок при наявності асиметрії в розподілі вихідних даних.

Внесок авторів: формулювання проблеми – **В. Ф. Миргород, І. М. Гвоздева**; огляд та аналіз інформаційних джерел – **І. М. Гвоздева**; розробка методики – **В. Ф. Миргород, І. М. Гвоздева**; аналіз результатів досліджень – **В. Ф. Миргород, І. М. Гвоздева**

Конфлікт інтересів

Автори заявляють, що немає конфлікту інтересів щодо цього дослідження, фінансового, особистого, авторського чи іншого, який міг би вплинути на дослідження та його результати, представлені в цій статті.

Фінансування

Дослідження проводилося без фінансової підтримки.

Наявність даних

Дані будуть надані за обґрунтованим запитом.

Використання штучного інтелекту

Автори підтверджують, що вони не використовували технології штучного інтелекту при створенні даної роботи.

Подяка

Автори висловлюють подяку Єпіфанову С. В. за плідні дискусії.

Усі автори прочитали та погодилися з опублікованою версією рукопису.

Література

1. Anderson, O. D. *Time series analysis and forecasting* / O. D. Anderson // Butterworths, London. - 1976. - 182 p.
2. Kendall, M. *The advanced theory of statistics* / M. Kendall, & A. Stuart // Hafner, New York, 1979. - Vol. 2. - 748 p.
3. Box, G. E. P. *Time series analysis: Forecasting and control* / G. E. P. Box, G. M. Jenkins // Holden Day, San Francisco, 1976. - 575 p.

4. Montgomery, D. C. *Forecasting and time series analysis* / D. C. Montgomery, L. A. Johnson, J. S. Gardiner // McGraw-Hill, New York, 1990. - 300 p.
5. Shumway, R. H. *Applied statistical time series analysis* / R. H. Shumway // Prentice Hall, New York, 1988. - 384 p.
6. Wei, W. W. *Time series analysis: Univariate and multivariate methods* / W. Wei // Addison-Wesley, New York, 1989. - 640 p.
7. Hvozdeva, I. *The Method of Trend Analysis of Parameters Time Series of Gas-turbine Engine State* / I. Hvozdeva, V. Myrhorod, Y. Derenh // AMiTaNS'17, AIP Conf. Proc. Vol. 1895, edited by M. D. Todorov (American Institute of Physics, Melville, NY, 2017). - P. 030002-1-030002-9. DOI: <https://doi.org/10.1063/1.5007361>.
8. Myrhorod, V. *Some Interval and Trend Statistics with Non-Gaussian Initial Data Distribution* / V. Myrhorod, I. Hvozdeva, V. Demirov // AMiTaNS'18, AIP Conf. Proc. Vol. 2025, edited by M. D. Todorov (American Institute of Physics, Melville, NY, 2018). - P. 040011-1-040011-12. DOI: <https://doi.org/10.1063/1.5064895>.
9. Myrhorod, V. *Two-dimensional trend analysis of time series of complex technical objects diagnostic parameters* / V. Myrhorod, I. Hvozdeva, Y. Derenh // 11th International Conference for Promoting the Application of Mathematics in Technical and Natural Sciences - AMiTaNS'19, AIP Conference Proceedings, 2019. - Vol. 2164, iss 1. - P. 040011-1-040011-12. DOI: <https://doi.org/10.1063/1.5130815>.
10. Korn G. A. *Mathematical Handbook* / G. A. Korn, T. M. Korn // McGraw-Hill Book, 1968. - 832.

References

1. Anderson, O. D. *Time series analysis and forecasting*. London, Butterworths, 1976. 182 p.
2. Kendall, M. *The advanced theory of statistics*. New York, Hafner, 1979, vol. 2, 748 p.
3. Box, G. E. P., Jenkins, G. M. *Time series analysis: Forecasting and control*. San Francisco, Holden Day, 1976. 575 p.
4. Montgomery, D. C., Johnson, L. A., Gardiner, J. S. *Forecasting and time series analysis*. New York, McGraw-Hill, 1990. 300 p.
5. Shumway, R. H. *Applied statistical time series analysis*. New York, Prentice Hall, 1988. 384 p.
6. Wei, W. W. *Time series analysis: Univariate and multivariate methods*. New York, Addison-Wesley, 1989. 640 p.
7. Hvozdeva, I., Myrhorod, V., Derenh, Y. *The Method of Trend Analysis of Parameters Time Series of Gas-turbine Engine State*. AMiTaNS'17, AIP Conf. Proc. Vol. 1895, edited by M. D. Todorov (American Institute of Physics, Melville, NY, 2017), 2017, vol. 1895, pp. 030002-1-030002-9. DOI: <https://doi.org/10.1063/1.5007361>.

8. Myrhorod, V., Hvozdeva, I., Demirov, V. Some Interval and Trend Statistics with Non-Gaussian Initial Data Distribution. *AMiTaNS'18, AIP Conf. Proc. Vol. 2025, edited by M. D. Todorov (American Institute of Physics, Melville, NY, 2018)*, pp. 040011-1-040011-12. DOI: <https://doi.org/10.1063/1.5064895>.

9. Myrhorod, V., Hvozdeva, I., Derenh, Y. Two-dimensional trend analysis of time series of complex

technical objects diagnostic parameters. *11th International Conference for Promoting the Application of Mathematics in Technical and Natural Sciences - AMiTaNS'19, AIP Conference Proceedings*, 2019, vol. 2164, iss 1, pp. 040011-1-040011-12. DOI: <https://doi.org/10.1063/1.5130815>.

10. Korn, G. A, Korn, T. M. *Mathematical Handbook*. New York, McGraw-Hill Book, 1968. 832 p.

Надійшла до редакції 16.07.2026, отримано в доопрацьованому вигляді 30.07.2026.

Дата ухвалення 19.08.2026, дата публікації 04.09.2026

INTERVAL STATISTICS FOR DETERMINING DIAGNOSTIC PARAMETERS OF POWER PLANTS WITH A NON-GAUSSIAN DISTRIBUTION OF OUTPUT DATA

Volodymyr Myrhorod, Iryna Hvozdeva

An approach is proposed for determining interval estimates of diagnostic parameters of the technical condition of power plants, in particular those built on the basis of gas turbine engines, during bench tests and long-term operation under conditions of a non-Gaussian distribution of output data. The relevance of solving the specified scientific and applied problem lies in the need to determine the compliance of bench test results with the requirements of the technical conditions and the current analysis of the technical condition of the specified objects, to establish the possibility of their operation within the established resource. An analysis and comparison of methods for interval estimation of diagnostic parameter values for the technical condition of power plants, expressed as time series, were performed, accounting for departures of the output data from normality. Time series of values of diagnostic parameters of the technical condition of power plants are realizations of random processes, the stochastic component of which is caused by random disturbances and the nature of energy conversion processes. It has been established that deviations in the distribution of the initial data from normality can significantly shift the intervals for estimating the first moments of the distribution of the values of the measuring diagnostic parameters of power plants. Accordingly, such a shift in interval estimates requires correcting bench test results and assessing the technical condition of power plants during the long-term operation of the specified objects. An improved method of analytical solution of the set scientific and applied problem is proposed, which allows obtaining interval estimates of diagnostic parameters of power plants under conditions of non-Gaussian distribution of the initial data.

Keywords: technical condition, mathematical modeling, power plants, gas turbine engine, time series, statistical model, interval estimation, technical condition

Миргород Володимир Федорович – д-р. техн. наук, ст. науковий співробітник АТ «Елемент», Одеса, Україна, e-mail: v.f.mirgorod@gmail.com.

Гвоздева Ірина Маратівна – д-р. техн. професор, завідувач кафедри НУ «Одеська морська академія», Одеса, Україна.

Volodymyr Myrhorod – Doctor of Science, JSC Element, Odesa, Ukraine, e-mail: v.f.mirgorod@gmail.com, ORCID: 0000-0001-8361-1672.

Iryna Hvozdeva – Doctor of Science, Professor at the Odesa Maritime Academy, Odesa, Ukraine, e-mail: onopchenko.im@gmail.com, ORCID: 0000-0001-5797-0559.