

УДК 629.7.023:539.421(045)

doi: 10.32620/aktt.2026.4.03

С. Р. ІГНАТОВИЧ<sup>1</sup>, І. І. ДЖАВАДОВА<sup>2</sup>, С. С. ЮЦКЕВИЧ<sup>1</sup><sup>1</sup>Національний університет «Київський авіаційний інститут», Київ, Україна<sup>2</sup>АТ «АНТОНОВ», Київ, Україна

## ПІДХОДИ ДО ВИЗНАЧЕННЯ ПЛАСТИЧНОЇ ЗОНИ У ВЕРШИНІ ВТОМНОЇ ТРІЩИНИ ПРИ РОЗРАХУНКАХ ДОВГОВІЧНОСТІ

У статті виконано огляд основних підходів до оцінки пластичної зони, що формується в околі вершини втомної тріщини та проаналізовано її врахування в розрахунках довговічності авіаційних конструкцій. Актуальність теми зумовлена тим, що більшість елементів планера працює в умовах багатоциклового та змінного навантаження, а наявність тріщин або концентраторів напружень може призводити до локального пластичного деформування навіть за відносно невисокого рівня номінальних напружень. У межах лінійно-пружної механіки руйнування (ЛПМР) напруження мають сингулярність у вістрі тріщини, тобто необмежено зростають при наближенні до її вершини. Однак у реальних конструкційних матеріалах таке зростання обмежується досягненням границі текучості, унаслідок чого формується пластична зона, розміри та форма якої впливають на коректність застосування параметрів ЛПМР. У роботі розглянуто напружений стан біля вершини тріщини, роль коефіцієнта інтенсивності напружень (КІН), умови виникнення пластичних деформацій за критеріями Mises та Tresca, а також відмінності між плоским напруженням та плоским деформованим станами. Окрему увагу приділено класичним аналітичним моделям Irwin, Леонова – Панасюка – Dugdale та їх модифікаціям. Проаналізовано експериментальні та чисельні методи уточнення пластичної зони, зокрема метод мікротвердості, металографічного травлення, цифрову кореляцію зображень (digital image correlation – DIC) та метод скінчених елементів (МСЕ). Розглянуто вплив пластичної зони на ріст втомної тріщини, зокрема розрізнення монотонної та циклічної пластичних зон, пластично-індуковане закриття тріщини, ефекти перевантажень, недовантажень і взаємодії навантажень у спектрі. Моделі Wheeler, Willenborg, Generalized Willenborg, Hsu, FASTRAN та смугової текучості розглянуто як підходи, в яких у різний спосіб ураховуються наслідки локального пластичного деформування біля вершини тріщини та в її сліді. Окремо розглянуто врахування пластичної зони в нормативних і довідкових документах. Показано, що в інженерній практиці найбільш поширеним способом урахування пластичної зони залишається поправка Irwin. Установлено, що оцінка пластичної зони є важливою складовою аналізу довговічності та залишкової міцності авіаційних конструкцій.

**Ключові слова:** пластична зона, пластична деформація, напружено-деформований стан, вершина тріщини, коефіцієнт інтенсивності напружень, лінійно-пружна механіка руйнування, ріст втомної тріщини, довговічність, залишкова міцність, ресурс, критерії руйнування, навантаження, моделювання, авіаційні конструкції.

### Вступ

Одним із ключових завдань забезпечення безпечної експлуатації авіаційних конструкцій є прогнозування довговічності елементів конструкцій з тріщинами. У процесі експлуатації елементи планера зазнають дії змінних навантажень, що можуть призводити до зародження та поступового росту втомних тріщин. Для оцінки допустимості таких пошкоджень широко застосовується підхід damage tolerance, у межах якого конструкція розглядається як така, що може експлуатуватись за наявності дефектів, якщо їхній розвиток не призведе до втрати несучої здатності протягом заданого інтервалу контролю.

Базовим інструментом для аналізу тріщин у конструкціях є лінійно-пружна механіка руйнування

(ЛПМР), відповідно до якої напружено-деформований стан (НДС) біля вершини тріщини описується через коефіцієнт інтенсивності напружень (КІН)  $K$ , а ріст втомної тріщини – через розмах КІН  $\Delta K$ . Водночас класичний лінійно-пружний опис має принципове обмеження. Теоретично напруження біля вершини тріщини мають сингулярний характер і необмежено зростають при наближенні до її вершини. У реальному матеріалі таке зростання неможливе, оскільки після досягнення границі текучості виникають локальні пластичні деформації. Область, у якій матеріал переходить у пластичний стан, називається пластичною зоною біля вершини тріщини [1].

Оцінка розміру та форми пластичної зони має важливе значення для визначення меж застосовності ЛПМР. Якщо пластична зона є малою порівняно з довжиною тріщини, розмірами елемента та відстані до



границі конструкції, то умова маломасштабної пластичності вважається виконаною, а використання параметрів  $K$  та  $\Delta K$  є обґрунтованим [2]. Якщо ж пластична зона стає значною, лінійно-пружний підхід може давати неточні результати, і виникає необхідність використання пружно-пластичних підходів.

Пластична зона має значення не лише як локальна область порушення лінійно-пружної поведінки матеріалу, але й як важливий фактор у розрахунках росту втомних тріщин за змінного навантаження. Після перевантаження біля вершини тріщини може сформуватися збільшена область пластично деформованого матеріалу, яка впливає на подальший ріст тріщин через залишкові пластичні деформації, стискальні залишкові напруження та пластично-індуковане закриття тріщини. Саме тому в моделях взаємодії навантажень, таких як Wheeler, Willenborg, Generalized Willenborg, Modified Generalized Willenborg, Hsu, FASTRAN та інші [3-7], у різний спосіб ураховуються наслідки локальної пластичності вершини тріщини. Водночас ці моделі не є прямими методами визначення пластичної зони, а відображають її вплив на процес поширення тріщини в умовах реального спектрального навантаження.

Метою цієї статті є систематизація основних підходів до оцінки пластичної зони в околі вершини тріщини та аналіз їхнього застосування в розрахунках довговічності авіаційних конструкцій.

## 1. Формування пластичної зони біля вершини тріщини

При аналізі елементів конструкцій із тріщинами одним із базових підходів є ЛПМР, яка передбачає, що матеріал поза невеликою областю біля вершини тріщини деформується пружно.

### 1.1. Напружений стан біля вершини тріщини

Класичний опис напруженого стану в околі вершини тріщини базується на розв'язках Westergaard, які дозволяють описати асимптотичне поле напружень у лінійно-пружному ізотропному тілі. Основною особливістю такого поля є сингулярність напружень, тобто їх зростання при наближенні до вершини тріщини за законом, обернено пропорційним квадратному кореню з відстані до вершини. Для тріщини нормального відриву, що відповідає першій моді руйнування компоненти напружень у полярній системі координат із початком у вершині тріщини можуть бути подані в загальному вигляді:

$$\sigma_{ij} = \left( \frac{K}{\sqrt{2\pi r}} \right) f_{ij}(\theta) + \text{регулярні члени}, \quad (1)$$

де  $\sigma_{ij}$  – тензор напружень;

$K$  – коефіцієнт інтенсивності напружень;

$r$  та  $\theta$  – координати точки в полярній системі координат;

$f_{ij}$  – безрозмірна функція кута  $\theta$  ( $i, j = x, y$ ).

КІН для тріщини в елементі конструкції можна записати як

$$K_1 = Y\sigma\sqrt{a}, \quad (2)$$

де  $\sigma$  – номінальне напруження;

$a$  – розмір тріщини;

$Y$  – безрозмірний геометричний коефіцієнт, який враховує геометрію та схему навантаження.

Зі збільшенням довжини тріщини або прикладеного навантаження  $K_1$  зростає, відповідно зростає й рівень локальних напружень біля вершини тріщини. У межах лінійно-пружного розв'язку при  $r \rightarrow 0$  напруження теоретично прямують до нескінченності. Однак у реальному матеріалі таке зростання обмежується досягненням границі текучості, після чого відбувається перерозподіл напружень і формується пластична зона.

### 1.2. Умови виникнення пластичних деформацій

Оскільки біля вершини тріщини формується складний багатовісний напружений стан, оцінка початку пластичного деформування не може бути зведена лише до порівняння однієї компоненти напружень із границею текучості. Для цього застосовують критерії текучості, серед яких для металевих конструкційних матеріалів найбільш поширеними є критерій Mises та критерій Tresca [8, 9].

Критерій текучості Mises, або критерій питомої енергії формозміни, передбачає, що текучість матеріалу починається тоді, коли еквівалентне напруження досягає границі текучості при одновісному розтягу. Напруження за Mises, виражене через головні напруження, визначається як

$$\sigma_{\text{екв}} = \sqrt{\frac{1}{2}[(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2]}, \quad (3)$$

де  $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$  – головні напруження.

Умова початку пластичного деформування записується у вигляді

$$\sigma_{\text{екв}} \geq \sigma_{0,2}, \quad (4)$$

де  $\sigma_{0,2}$  – границя текучості матеріалу.

Критерій Tresca, або критерій максимальних дотичних напружень, базується на припущенні, що текучість починається тоді, коли максимальне дотичне напруження досягає критичного значення. Умова початку пластичного деформування Tresca,

виражене через головні напруження, визначається як

$$\sigma_1 - \sigma_3 \geq \sigma_{0,2}, \quad (5)$$

$$\sigma_1 - \sigma_2 \geq \sigma_{0,2}, \quad (6)$$

$$\sigma_3 - \sigma_1 \geq \sigma_{0,2}. \quad (7)$$

Порівняно з критерієм Mises, критерій Tresca зазвичай дає більш консервативну оцінку початку текучості. Це означає, що за однакових умов навантаження зона, визначена за критерієм Tresca, може бути більшою, ніж зона, отримана за критерієм Mises (див рис. 1).

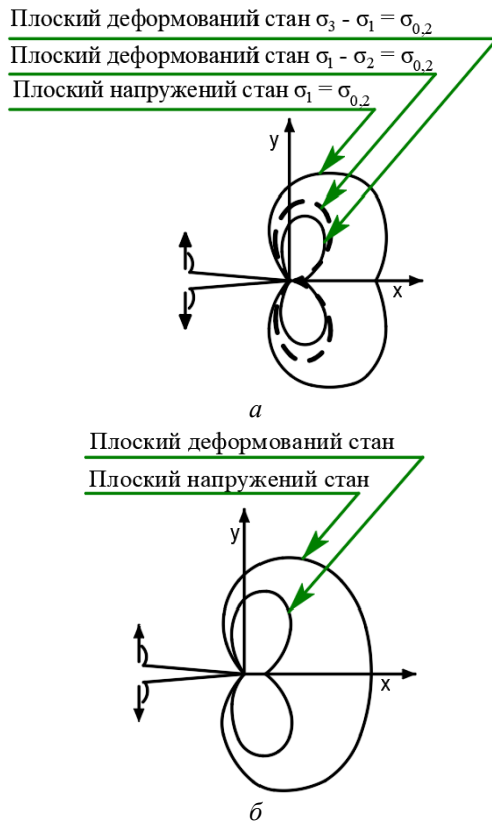


Рис. 1 Форма пластичної зони біля вершини тріщини для моди I відповідно до: а – критерію Tresca, б – критерію Mises

### 1.3. Плоский напружений стан та плоский деформований стани

Розмір і форма пластичної зони суттєво залежать від типу напружено-деформованого стану, який реалізується біля вершини тріщини. У механіці руйнування зазвичай розглядають два граничні випадки: плоский напружений стан і плоский деформований стан [1].

Слід зазначити, що в реальних конструкціях не існує абсолютно плоского напруженого або абсолютно плоского деформованого стану. Це є розрахункові ідеалізації, які застосовують для спрощення аналізу. У тонкостінних елементах конструкції напруження по товщині навряд чи є нульовими, однак вони

можуть бути значно меншими порівняно з напруженнями в площині елемента. У такому випадку приймають умову плоского напруженого стану. Це припущення є корисним, оскільки дозволяє замість шести незалежних компонентів напруженого стану розглядати лише три основні компоненти в площині елемента. У цьому випадку приймають:

$$\sigma_z = 0, \quad (8)$$

де  $\sigma_z$  – напруження по товщині матеріалу.

За таких умов матеріал має більшу можливість пластично деформуватися в напрямку товщини, а обмеження пластичної течії є меншим. Тому пластична зона біля вершини тріщини в умовах плоского напруженого стану має порівняно більші розміри.

Для елементів значної товщини більш придатною ідеалізацією є плоский деформований стан. У цьому випадку деформація в напрямку товщини також навряд чи є абсолютно нульовою, однак через значне обмеження деформування вона є малою порівняно з деформаціями в площині елемента. Тому приймають

$$\varepsilon_z = 0, \quad (9)$$

де  $\varepsilon_z$  – деформація по товщині матеріалу.

За таких умов у матеріалі виникає додатковий компонент напружень у напрямку товщини, що формує більш виражений тривісний напружений стан. Підвищення тривісності обмежує пластичну течію, тому пластична зона в умовах плоскої деформації є меншою, ніж у випадку плоского напруженого стану.

Пластична зона може змінювати свою форму та розміри по товщині, що схематично показано на рис. 2.

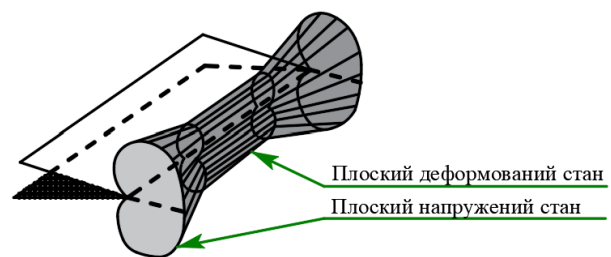


Рис. 2 Формування пластичної зони по товщині пластини

## 2. Підходи до оцінки та визначення пластичної зони

Оцінка пластичної зони біля вершини тріщини може виконуватись різними способами залежно від мети аналізу, наявних вихідних даних, складності геометрії конструкції та необхідної точності результатів. У загальному випадку підходи до визначення

пластичної зони можна поділити на аналітичні, експериментальні та чисельні.

Аналітичні підходи дають змогу отримати прості розрахункові залежності між розміром пластичної області, КІН і границею текучості матеріалу. Вони є зручними для попередніх інженерних оцінок і перевірки умови маломасштабної пластичності. Експериментальні методи дозволяють безпосередньо досліджувати прояви пластичного деформування в околі вершини тріщини. Чисельні методи, насамперед метод скінченних елементів, дають можливість враховувати реальну геометрію конструкції, нелінійні властивості матеріалу, тривимірний напружено-деформований стан, контактні взаємодії.

## 2.1. Аналітичні та ніпіваналітичні підходи: модель Irwin, Леонова – Панасюка – Dugdale та когезійні моделі

Одним із найпоширеніших підходів до оцінки розміру пластичної зони є модель Irwin. Її основна ідея полягає в тому, що поблизу вершини тріщини напруження, визначені за лінійно-пружним розв'язком, зростають за сингулярним законом. Тому пластичне деформування починається на такій відстані від вершини тріщини, де локальне напруження досягає границі текучості матеріалу [2].

Для умов плоского напруженого стану характерний розмір пластичної зони за Irwin визначається залежністю

$$r_p = \frac{1}{2\pi} \left( \frac{K}{\sigma_{0,2}} \right)^2, \quad (10)$$

де  $r_p$  – розмір пластичної зони.

Для умов плоскої деформації, коли пластичне деформування обмежене більш вираженим тривісним напруженим станом, розмір пластичної зони приймають меншим:

$$r_p = \frac{1}{6\pi} \left( \frac{K}{\sigma_{0,2}} \right)^2, \quad (11)$$

Таким чином, за однакового значення  $K_I$  пластична зона в умовах плоского напруженого стану приблизно втричі більша, ніж в умовах плоского деформованого стану. Модель Irwin є зручною для попередніх інженерних оцінок, оскільки використовує лише параметри, які зазвичай відомі в розрахунках механіки руйнування: КІН і границю текучості матеріалу.

Irwin також запропонував враховувати пластичну зону через введення ефективної довжини тріщини. Фізичний зміст такого підходу полягає в тому, що внаслідок пластичного деформування вершина

тріщини притуплюється, а реальна тріщина поводить ся так, ніби її довжина є більшою за видиму фізичну довжину:

$$a_{\text{eff}} = a + \Delta a, \quad (12)$$

де  $a_{\text{eff}}$  – ефективна довжина тріщини;

$a$  – фізична довжина тріщини;

$\Delta a$  – поправка, пов'язана з пластичною зоною.

Разом з тим модель Irwin має обмеження. Вона базується на спрощеному описі пластичної області та припущенні про маломасштабну пластичність. У випадку, коли віддалене напруження наближається до границі текучості, така модель може давати некоректну оцінку, оскільки передбачає скінченний розмір пластичної зони навіть у ситуації, коли пластичне деформування має поширюватися на значно більшу область. Якщо ж пластичне деформування поширюється на значну частину перерізу, припущення лінійно-пружної механіки руйнування втрачають коректність, і доцільніше використовувати моделі смугової текучості, зокрема схему Леонова-Панасюка-Dugdale. У літературі зазначається, що порівняно з такою схемою поправка Irwin може недооцінювати довжину пластичної зони приблизно на 20 % [10].

Іншим класичним підходом до оцінки пластичної зони є модель смугової текучості (strip-yield model), яку в літературі часто пов'язують із роботами Dugdale, Леонова та Панасюка [11, 12]. На відміну від моделі Irwin, у якій пластична зона часто інтерпретується як локальна область перед вершиною тріщини, в цьому підході пластичне деформування розглядається як вузька смуга, що лежить у площині тріщини та продовжує її перед вершиною.

Основне припущення полягає в тому, що вся пластична деформація зосереджена у вузькій смузі перед вершиною тріщини, а напруження в цій смузі дорівнюють границі текучості матеріалу.

Фізично модель смугової текучості можна представити як тріщину з ефективною довжиною:

$$2a + 2p = 2c, \quad (13)$$

де  $2a$  – фізична довжина тріщини;

$p$  – довжина пластичної зони біля кожної вершини тріщини;

$2c$  – ефективна довжина тріщини з урахуванням смугової пластичної зони.

Для центральної тріщини в нескінченній пластині вираз для пластичної зони за Dugdale можна записати як

$$p = \frac{\pi}{8} \left( \frac{K_I}{\sigma_{0,2}} \right)^2. \quad (14)$$

Із моделями смугової текучості тісно пов'язана когезійна модель тріщини. Її основна ідея полягає в

тому, що перед вершиною реальної тріщини вводиться додаткова зона зчеплення, або зона передруйнування, в якій поверхні тріщини ще не є повністю вільними, а взаємодіють між собою через розподілені когезійні напруження. Такі напруження перешкоджають розкриттю тріщини та усувають фізично нереалістичну сингулярність напружень у її вершині.

У сучасному вигляді когезійна модель задається через закон зв'язку між тяговим напруженням і розкриттям тріщини, тобто *traction-separation law* [13]. За цим законом когезійні напруження поступово зменшуються зі збільшенням розкриття, а площа під кривою "напруження – розкриття" відповідає енергії руйнування матеріалу. Такий підхід дозволяє описувати не лише розмір зони передруйнування, але й процес поступового пошкодження, втрати зчеплення та просування тріщини. У скінченно-елементному аналізі когезійний підхід реалізується за допомогою когезійних елементів або когезійних поверхонь, які розміщують уздовж потенційного шляху росту тріщини.

Також було запропоновано модифіковану модель Dugdale, яка враховує вплив двовісних полів напружень на умови текучості матеріалу [14]. Такий підхід дозволяє ширше застосовувати ідею смугової текучості для випадків, коли напружений стан відрізняється від простого одновісного розтягу.

Іншим напрямом розвитку стали моделі поля біля вершини тріщини, в яких ураховується пластично-індуковане екранування. До таких підходів належить CJP-модель, запропонована Christopher, James і Patterson [15, 16].

Таким чином, розвиток аналітичних моделей відбувався від простих оцінок характерного розміру пластичної зони до більш складних описів поля біля вершини тріщини, в яких враховуються пластичний слід, закриття тріщини, пружно-пластична сумісність, дислокаційні ефекти та притуплення вершини.

## 2.2. Експериментальні методи визначення пластичної зони

Експериментальне визначення пластичної зони є складним завданням, оскільки ця область має локальний характер і розташована безпосередньо біля вершини тріщини. Її розміри можуть бути малими порівняно з розмірами зразка, а напружено-деформований стан у цій області є різко неоднорідним. Тому для ідентифікації пластичної зони використовують методи, чутливі до локальних змін структури, деформацій або залишкових напружень.

Одним із традиційних підходів є метод мікротвердості. Після навантаження зразка в околі вершини тріщини виконують серію вимірювань мікротвердості. Зміна мікротвердості може свідчити про наявність пластично деформованої області, оскільки пластичне

деформування супроводжується зміною структури матеріалу та локальним зміцненням [17]. Перевагою цього методу є відносна простота, однак він потребує спеціальної підготовки зразка і не завжди дозволяє точно визначити межу пластичної зони.

Іншим методом є металографічне травлення, яке дозволяє виявляти пластично деформовані ділянки за зміною структури поверхні або особливостями травлення матеріалу. Такий підхід може бути корисним для якісного аналізу форми пластичної зони, однак його результати значною мірою залежать від матеріалу, режиму підготовки поверхні та умов травлення [17].

У сучасних дослідженнях значного поширення набули оптичні методи, зокрема цифрова кореляція зображень (*digital image correlation – DIC*) дозволяє отримувати повнопольові переміщення та деформації на поверхні зразка під час навантаження. На основі цих полів можна визначати зони, в яких локальні деформації або напруження досягають рівня, що відповідає початку пластичного деформування [18].

Перевагою DIC є можливість безконтактного вимірювання полів переміщень і деформацій у реальному часі. Це особливо важливо для дослідження еволюції пластичної зони під час циклічного навантаження та росту втомної тріщини. Крім того, DIC дозволяє порівнювати експериментальні поля деформацій із аналітичними або чисельними моделями, що робить цей метод зручним для верифікації розрахункових підходів [8].

Окрему групу становлять гібридні експериментально-аналітичні підходи, в яких повнопольові експериментальні дані використовуються для ідентифікації параметрів поля біля вершини тріщини. Зокрема, в сучасних дослідженнях застосовується поєднання цифрової кореляції зображень, апроксимації поля переміщень та моделей *crack-tip field*, таких як CJP model [19]. Для зменшення впливу шуму DIC-даних можуть застосовуватися методи згладжування або апроксимації, зокрема неймережеві підходи [19].

## 2.3. Чисельне моделювання пластичної зони

Метод скінченних елементів (МСЕ) є одним із найбільш універсальних інструментів для дослідження пластичної зони біля вершини тріщини. На відміну від аналітичних моделей, МСЕ дозволяє враховувати реальну геометрію конструкції, складне навантаження, нелінійні властивості матеріалу, контактні взаємодії, залишкові напруження та тривимірний характер напружено-деформованого стану [20].

У скінченно-елементних моделях пластична зона може визначатися різними способами. Найпоширенішим є визначення області, в якій еквівалентні напруження за Mises досягають границі текучості.

Для коректного моделювання поля напружень

біля вершини тріщини велике значення має якість сітки. У лінійно-пружних розрахунках для відтворення сингулярності напружень часто використовують спеціальні сингулярні елементи або згущення сітки в околі вершини тріщини. У пружно-пластичних розрахунках сітка повинна бути достатньо дрібною, щоб точно описати різкий градієнт деформацій і межу пластичної області.

### 3. Вплив пластичної зони на ріст втомної тріщини та розрахунки довговічності

У розрахунках довговічності авіаційних конструкцій тріщина розглядається як дефект, що поступово зростає під дією циклічного навантаження. При цьому локальні процеси в околі вершини тріщини, зокрема пластичне деформування, притуплення вершини, закриття тріщини та залишкові напруження після перевантажень, істотно впливають на швидкість її поширення [21].

У класичному підході лінійно-пружної механіки руйнування рушійною силою росту втомної тріщини є розмах коефіцієнта інтенсивності напружень:

$$\Delta K = K_{\max} - K_{\min}, \quad (15)$$

де  $K_{\max}$  – максимальне значення коефіцієнта інтенсивності напружень у циклі навантаження;

$K_{\min}$  – мінімальне значення коефіцієнта інтенсивності напружень у циклі.

Найпростішим і найбільш поширеним описом росту втомної тріщини в середній області діаграми  $da/dN - \Delta K$  є рівняння Paris:

$$\frac{da}{dN} = C(\Delta K)^m, \quad (16)$$

де  $\frac{da}{dN}$  – швидкість росту тріщини за один цикл навантаження;

$C$  і  $m$  – параметри моделі Paris.

#### 3.1. Монотонна та циклічна пластичні зони

При циклічному навантаженні слід розрізняти монотонну та циклічну пластичні зони. Монотонна пластична зона формується при максимальному значенні навантаження в циклі та характеризує область матеріалу, в якій було досягнуто пластичного деформування під дією  $K_{\max}$ . Циклічна пластична зона пов'язана з повторним пластичним деформуванням матеріалу під час циклу навантаження. Її розмір визначають не через  $K_{\max}$ , а через розмах коефіцієнта інтенсивності напружень  $\Delta K$  [18].

Циклічна пластична зона зазвичай є меншою за монотонну, однак саме вона безпосередньо пов'язана з локальним механізмом росту втомної тріщини. У її

межах відбувається повторне пластичне деформування, накопичення незворотних деформацій, мікропошкодження та поступове просування вершини тріщини (рис. 3).

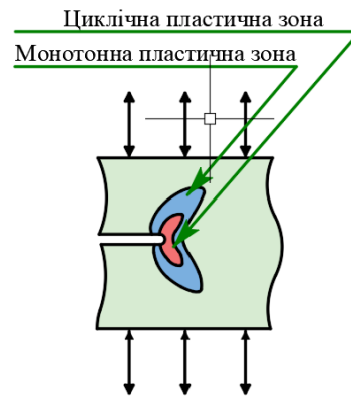


Рис. 3 Зони біля вершини втомної тріщини, що формуються внаслідок навантаження

#### 3.2. Пластично-індуковане закриття тріщини

Одним із найважливіших наслідків пластичного деформування біля вершини тріщини є явище пластично-індукованого закриття тріщини. Під час росту тріщини пластична зона переміщується разом із її вершиною, а в сліді тріщини виникають залишкові пластичні деформації. Унаслідок цього поверхні тріщини можуть контактувати між собою ще до досягнення мінімального навантаження в циклі [22, 23].

У такому випадку не весь розмах  $\Delta K$  є ефективним для росту тріщини. Тріщина починає відкриватися лише після досягнення певного рівня навантаження, який відповідає коефіцієнту інтенсивності напружень  $K_{op}$ . Тому для опису росту тріщини використовують ефективний розмах коефіцієнта інтенсивності напружень:

$$\Delta K_{eff} = K_{\max} - K_{op}, \quad (17)$$

де  $K_{op}$  – значення коефіцієнта інтенсивності напружень, при якому тріщина відкривається.

Саме  $\Delta K_{eff}$  більш коректно характеризує реальну рушійну силу росту втомної тріщини у випадку часткового закриття тріщини. Це пояснює, чому при однаковому значенні  $\Delta K$  швидкість росту тріщини може відрізнятися залежно від коефіцієнта асиметрії циклу, історії навантаження та попередніх перевантажень.

#### 3.3. Вплив перевантажень та взаємодії навантажень

Для авіаційних конструкцій характерним є змінне спектральне навантаження, яке включає послідовність циклів різної амплітуди. У таких умовах

важливим стає ефект взаємодії навантажень. Одним із найвідоміших проявів такої взаємодії є затримка росту тріщини після одиничного перевантаження.

Під час перевантаження біля вершини тріщини формується збільшена область пластично деформованого матеріалу. Після цього наступні цикли меншої амплітуди відбуваються всередині або поблизу вже сформованої області пластичного деформування. У сліді тріщини виникають залишкові пластичні деформації та стискальні залишкові напруження, які можуть сприяти закриттю тріщини. Унаслідок цього ефективний розмах  $\Delta K_{\text{eff}}$  зменшується, а швидкість росту тріщини тимчасово знижується [3, 4].

#### 4. Використання уявлень про пластичність у околі тріщини в моделях прогнозування росту втомної тріщини

Оцінка пластичної зони біля вершини тріщини має значення не лише для перевірки меж застосовності ЛПМР, але й для пояснення ефектів взаємодії навантажень при рості втомних тріщин. У реальних умовах експлуатації авіаційні конструкції зазнають дії спектрів навантажень, що містять цикли різної амплітуди, перевантаження та недовантаження. Вони можуть суттєво змінювати швидкість росту тріщини порівняно з розрахунком за сталим амплітудним навантаженням [21].

##### 4.1. Модель Wheeler

У моделі Wheeler затримка росту тріщини після перевантаження описується через співвідношення між поточною пластичною зоною біля вершини тріщини та пластичною зоною, сформованою під час перевантаження [3]. Ріст тріщини вважається сповільненим доти, доки поточна пластична зона перебуває всередині більшої пластичної зони перевантаження. У такому підході швидкість росту тріщини коригується за допомогою коефіцієнта затримки, який множиться на базову залежність для швидкості росту:

$$\left( \frac{da}{dN} \right)_{\text{retarded}} = \Phi_R \left[ C (\Delta K)^m \right], \quad (18)$$

де  $\Phi_R$  – коефіцієнт затримки росту тріщини.

У моделі Wheeler пластична зона виконує роль геометричного критерію, який визначає, чи зберігається вплив попереднього перевантаження на поточний ріст тріщини. Перевагою підходу є простота, однак його застосування потребує підбору емпіричного параметра та є обмеженим для складних послідовностей навантажень.

##### 4.2. Модель Willenborg

У моделі Willenborg вплив попереднього перевантаження описується через залишковий коефіцієнт інтенсивності напружень  $K_R^W$ , який характеризує різницю між коефіцієнтом інтенсивності напружень, необхідним для формування пластичної зони, що залишилася після перевантаження, та поточним максимальним значенням  $K_{\text{max}}$  [4]. У спрощеному вигляді цей залишковий коефіцієнт може бути записаний як

$$K_R^W = K_{\text{max}}^{\text{OL}} \left( 1 - \frac{\Delta a}{Z_{\text{OL}}} \right)^{1/2} - K_{\text{max}}, \quad (19)$$

де  $K_{\text{max}}^{\text{OL}}$  – максимальне значення коефіцієнта інтенсивності напружень під час перевантаження;

$\Delta a$  – приріст тріщини після перевантаження;

$Z_{\text{OL}}$  – розмір пластичної зони, створеної перевантаженням;

$K_{\text{max}}$  – максимальне значення коефіцієнта інтенсивності напружень у поточному циклі.

Розмір пластичної зони перевантаження в цьому підході може бути поданий як

$$Z_{\text{OL}} = \frac{\pi}{8} \left( \frac{K_{\text{max}}}{\alpha_g \sigma_{0,2}} \right)^2, \quad (20)$$

де  $\alpha_g$  – коефіцієнт обмеження пластичного деформування.

Фізично величина  $K_R^W$  показує, наскільки поточна вершина тріщини ще перебуває під впливом пластичної зони, створеної попереднім перевантаженням. Якщо тріщина проростає крізь цю зону, тобто  $\Delta a$  збільшується, залишковий ефект перевантаження поступово зменшується. У вихідному підході Willenborg затримка росту тріщини вважається наявною, якщо  $K_R^W > 0$  [16].

##### 4.3. Узагальнена модель Willenborg

В узагальненій моделі Willenborg залишковий коефіцієнт інтенсивності напружень модифікується за допомогою множника  $\phi$ :

$$K_R = \phi K_R^W, \quad (21)$$

Множник  $\phi$  дозволяє узагальнити вихідну модель Willenborg і керувати інтенсивністю ефекту затримки. Він пов'язаний із пороговим значенням розмаху коефіцієнта інтенсивності напружень  $\Delta K_{\text{th}}$ , поточним значенням  $\Delta K$  та параметром  $R_{\text{SO}}$ , який характеризує shut-off level, тобто рівень співвідношення перевантаження, за якого ріст тріщини може



бути зупинений [5].

Після визначення  $K_R$  в узагальненій моделі Willenborg обчислюється ефективний коефіцієнт асиметрії циклу:

$$R_{\text{eff}} = \frac{K_{\min} - K_R}{K_{\max} - K_R} = \frac{K_{\min, \text{eff}}}{K_{\max, \text{eff}}} \quad (22)$$

Саме  $R_{\text{eff}}$  використовується замість фактичного коефіцієнта асиметрії циклу  $R$  у рівнянні росту тріщини. Таким чином, ефект перевантаження враховується не прямим множенням швидкості росту тріщини на коефіцієнт затримки, як у моделі Wheeler, а через зміну ефективного коефіцієнта асиметрії циклу, що призводить до зменшення швидкості росту тріщини.

#### 4.4. Модель Hsu

Ще одним підходом до врахування взаємодії навантажень є Hsu Model, яка була розроблена в Lockheed-Georgia й пізніше реалізована в AFGROW [6]. У цій моделі поєднуються уявлення про ефективне напруження, відкриття тріщини та вплив пластичної зони, сформованої попередніми циклами навантаження. За своєю фізичною ідеєю Hsu Model близька до моделей Wheeler, Willenborg та Elber, оскільки також пов'язує затримку росту тріщини з локальною пластичністю біля її вершини, однак додатково враховує ефект стискальних частин циклу навантаження.

Основне припущення Hsu Model полягає в тому, що сингулярне поле напружень біля вершини тріщини не реалізується, якщо поверхні тріщини залишаються закритими. Відповідно, ріст тріщини відбувається лише протягом тієї частини циклу навантаження, коли її поверхні повністю відкриті. Для цього вводиться ефективний розмах напружень:

$$\Delta\sigma_{\text{eff}} = \sigma_{\max} - \sigma_0, \quad (23)$$

де  $\sigma_{\max}$  – максимальне напруження циклу;

$\sigma_0$  – напруження, що відповідають початку відкриття тріщини.

Якщо напруження відкриття тріщини є нижчим за мінімальне напруження циклу, ефективний розмах напружень приймається рівним фактичному розмаху циклу:

$$\Delta\sigma_{\text{eff}} = \sigma_{\max} - \sigma_{\min} \quad (24)$$

У випадку, коли тріщина частково закрита, в модель вводяться ефективне мінімальне напруження та ефективний коефіцієнт асиметрії циклу:

$$\Delta\sigma_{\text{eff}} = \sigma_{\max} - (\sigma_{\min})_{\text{eff}}, \quad (25)$$

$$R_{\text{eff}} = (\sigma_{\min})_{\text{eff}} / \sigma_{\max} \quad (26)$$

На основі ефективного розмаху напружень визначається ефективний розмах коефіцієнта інтенсивності напружень:

$$\Delta K_{\text{eff}} = \Delta\sigma_{\text{eff}} \sqrt{\pi a} \beta_T, \quad (27)$$

де  $a$  – довжина тріщини;

$\beta_T$  – геометричний поправочний коефіцієнт.

Після цього швидкість росту тріщини визначається за залежністю виду

$$da / dN = f(\Delta K_{\text{eff}}, R_{\text{eff}}, \dots) \quad (28)$$

Стискальне навантаження може зменшувати корисний ефект затримки, спричинений попереднім розтягувальним перевантаженням, оскільки при переході напружень у стискальну область може виникати зворотна пластичність. Тому в моделі виконується корекція ефективної пластичної зони та відповідного ефективного перевантаження.

#### 4.5. Модель FASTRAN

Окремо слід згадати FASTRAN Model, розроблену J. C. Newman, Jr., яка належить до моделей прогнозування росту втомної тріщини на основі пластично-індукованого закриття тріщини [24]. За своєю фізичною ідеєю цей підхід близький до strip-yield моделі смугової текучості матеріалу і базується на тому, що під час росту тріщини за її вершиною залишається пластично деформований матеріал. Саме цей пластичний слід спричиняє контакт поверхонь тріщини на частині циклу навантаження та змінює ефективну рушійну силу росту тріщини.

У FASTRAN напруження відкриття тріщини визначається з урахуванням довжини тріщини та історії навантаження. Після цього для прогнозування швидкості росту використовується ефективний розмах коефіцієнта інтенсивності напружень:

$$\Delta K_{\text{eff}} = K_{\max} - K_{\text{op}}, \quad (29)$$

де  $K_{\text{op}}$  – значення коефіцієнта інтенсивності напружень, при якому тріщина відкривається.

### 5. Урахування пластичної зони в нормативних і довідкових документах

Оцінка пластичної зони біля вершини тріщини використовується також у нормативних і довідкових документах, що регламентують аналіз тріщин, залишкової міцності та довговічності конструкцій. У більшості таких документів пластична зона не розглядається як самостійний об'єкт детального пружно-пластичного аналізу, а використовується як інженерна поправка до лінійно-пружного опису тріщини. Найчастіше для цього застосовується підхід Irwin,



який дозволяє врахувати збільшення ефективного розміру тріщини внаслідок локального пластичного деформування біля її вершини [25-29].

У довідкових матеріалах ESDU [25], зокрема в ESDU 80036, розглядається застосування лінійно-пружної механіки руйнування для оцінки росту вторинних тріщин і залишкової міцності елементів конструкцій. У цьому підході пластична зона враховується як при монотонному, так і при циклічному навантаженні, а для оцінки її розміру використовуються формули Irwin [25].

У стандарті ASTM E561-23 [26], який застосовується для визначення кривих опору росту тріщини, розмір пластичної зони також визначається за формулою Irwin. Особливістю цього підходу є те, що для узгодження з технікою прямого вимірювання розміру тріщини розрахунок пластичної зони має спиратися на фізичний розмір тріщини. Якщо використовується метод піддатливості, фізичний розмір тріщини визначається з урахуванням пластичної поправки, тому може знадобитися ітераційна процедура. У такому випадку спочатку оцінюють розмір пластичної зони, потім визначають фізичну довжину тріщини та повторно обчислюють коефіцієнт інтенсивності напружень до досягнення узгодженого значення пластичної поправки.

У BS 7910 [27], який є керівництвом з оцінки допустимості дефектів у металевих конструкціях, також використовується підхід, оснований на формулі Irwin для оцінки пластичної поправки до розміру тріщини. Подібна логіка застосовується й у API 579-1/ASME FFS-1 Fitness-For-Service, де при оцінці дефектів у конструкціях необхідно враховувати ефект пластичності [28]. У цих документах пластична зона розглядається насамперед як поправка, що дозволяє уточнити ефективний розмір тріщини або параметри руйнування в межах інженерної процедури оцінки придатності конструкції до експлуатації.

Окремий інтерес для авіаційної галузі становить USAF Damage Tolerant Design Handbook [29], у якому наведено рекомендації щодо аналізу та проектування авіаційних конструкцій за принципом допустимості пошкоджень. У цьому документі розмір пластичної зони біля вершини тріщини також визначається за підходом Irwin. При цьому підкреслюється, що реальна вершина тріщини внаслідок пластичного деформування притуплюється, й тому тріщина поводить себе як така, що має більший ефективний розмір порівняно з її фізично виміряною довжиною.

## 6. Обговорення застосованості розглянутих підходів

Розглянуті підходи до визначення та врахування

пластичної зони біля вершини втомної тріщини мають різну фізичну основу, різний рівень складності та різну область доцільного застосування. Тому їх не слід розглядати як взаємозамінні методи. Вибір конкретного підходу має залежати від мети розрахунку, типу конструктивного елемента, характеру навантаження, рівня пластичного деформування, наявності експериментальних даних і необхідної точності прогнозу довговічності.

Найпростішим і найбільш зручним для інженерного застосування залишається підхід Irwin. Його перевагою є простота, мінімальна кількість вихідних даних і безпосередній зв'язок із параметрами ЛПМР. Формули Irwin дозволяють швидко оцінити характерний розмір пластичної зони та перевірити, чи виконується умова маломасштабної пластичності. Саме тому цей підхід широко застосовується в нормативних і довідкових документах для врахування впливу пластичної зони біля вершини тріщини [25-29]. Водночас модель Irwin не описує реальну форму пластичної зони, не враховує історію навантаження, зміцнення матеріалу, залишкові напруження та тривимірність напружено-деформованого стану. Тому її доцільно використовувати насамперед для попередніх оцінок, а не як універсальний опис локальної пластичності біля вершини тріщини.

Модель Леонова-Панасюка-Dagdale та споріднена з нею модель смугової текучості краще відображають фізику пластичного деформування в тонких листових матеріалах, що працюють в умовах, близьких до плоского напруженого стану [11, 12]. Такі підходи є особливо корисними для аналізу тонкостінних елементів авіаційних конструкцій, зокрема обшивок, панелей, зон навколо отворів і заклепкових з'єднань. Водночас класична модель Dugdale для складних конструктивних елементів потребує уточнення.

Когезійні моделі розширюють можливості опису нелінійної області перед вершиною тріщини, оскільки дозволяють моделювати не лише пластичність, але й поступову втрату зчеплення. Вони є корисними для чисельного моделювання росту тріщин, а також у випадках, коли важливо описати процес руйнування без використання сингулярного поля напружень [2]. Основним обмеженням когезійного підходу є потреба в достовірному визначенні максимальної когезійної напруги, критичного розкриття та енергії руйнування.

Експериментальні методи, зокрема метод мікротвердості, металографічне травлення, рентгенівський аналіз залишкових напружень та цифрова кореляція зображень, доцільно застосовувати для валідації аналітичних і чисельних моделей.

МСЕ є найбільш гнучким інструментом для уточненого аналізу пластичної зони, оскільки дозволяє

враховувати реальну геометрію конструкції, нелінійні властивості матеріалу, контактні взаємодії, залишкові напруження та тривимірний напружено-деформований стан. Однак МСЕ-розрахунки потребують перевірки із використанням аналітичних оцінок або експериментальних даних.

Для реальних авіаційних конструкцій, що працюють за змінно-амплітудного навантаження, особливо важливими є моделі, які враховують взаємодію навантажень, пластично-індуковане закриття тріщини, залишкові пластичні деформації та вплив перевантажень. Їх не слід трактувати як прямі методи визначення пластичної зони. Їхня основна роль полягає у врахуванні наслідків локального пластичного деформування для прогнозування швидкості росту тріщини за змінного навантаження.

При виборі моделі взаємодії навантажень важливо враховувати не лише її математичну форму, але й характер експлуатаційного спектра навантаження конкретного типу літального апарата. З практичної точки зору, Hsu Model часто розглядається як більш придатна для транспортних літаків, для яких характерні відносно регулярні спектри навантаження, велика кількість циклів помірної амплітуди, вплив коефіцієнта асиметрії циклу та наявність стискальних ділянок навантаження. У таких умовах важливо коректно враховувати відкриття тріщини, ефективний розмах напружень і зміну ефективної пластичної зони під дією стискальних частин циклу [6].

Для винищувачів та інших маневрених літальних апаратів, навантаження яких характеризується різкими змінами, значним варіюванням амплітуд і вираженими ефектами затримки росту тріщини після окремих високих піків навантаження, більш доцільним може бути застосування Generalized Willenborg Model. Ця модель безпосередньо пов'язує ефект затримки з пластичною зоною, сформованою під час перевантаження, залишковим коефіцієнтом інтенсивності напружень і ефективним коефіцієнтом асиметрії циклу. Водночас таке розмежування не слід розглядати як універсальне правило.

### Висновки

У роботі систематизовано основні підходи до визначення пластичної зони в околі вершини втомної тріщини та показано її значення для розрахунків довговічності авіаційних конструкцій. Установлено, що пластична зона є природним наслідком обмеження сингулярного пружного поля напружень границею текучості матеріалу.

Розглянуті підходи до визначення пластичної зони доцільно поділяти на аналітичні, експериментальні та чисельні. Аналітичні моделі, зокрема модель Irwin, схема Леонова-Панасюка-Dugdale та когезійні

моделі, забезпечують фізичне розуміння формування нелінійної області біля вершини тріщини та можуть застосовуватися для попередніх інженерних оцінок. Експериментальні методи, зокрема цифрова кореляція зображень, є важливими для валідації розрахункових моделей, а чисельне моделювання дозволяє уточнювати форму й розмір пластичної зони для складної геометрії та реальних умов навантаження.

Встановлено, що моделі взаємодії навантажень, такі як Wheeler, Willenborg, узагальнена Willenborg, Hsu, FASTRAN та Strip Yield, не є безпосередніми методами визначення пластичної зони. Їх доцільно розглядати як моделі прогнозування росту втомної тріщини, у яких наслідки локального пластичного деформування враховуються через затримку або прискорення росту тріщини, залишковий коефіцієнт інтенсивності напружень, ефективний коефіцієнт асиметрії циклу, напруження відкриття тріщини та ефективний розмах коефіцієнта інтенсивності напружень.

Аналіз нормативних і довідкових документів показує, що в інженерній практиці найбільш поширеним способом урахування пластичної зони залишається поправка Irwin. Її застосування є доцільним за умови маломасштабної пластичності, однак при значному розвитку пластичної зони, складній геометрії, наявності залишкових напружень або спектрального навантаження необхідно використовувати уточнені підходи, зокрема strip-yield моделі, когезійне моделювання, пружно-пластичний МСЕ-аналіз або експериментальну валідацію.

Таким чином, оцінка пластичної зони є важливою складовою аналізу довговічності та залишкової міцності авіаційних конструкцій. Вона дозволяє обґрунтувати вибір розрахункової моделі, перевірити допустимість застосування лінійно-пружної механіки руйнування, врахувати вплив історії навантаження та підвищити достовірність прогнозування ресурсу елементів конструкцій із втомними тріщинами.

**Внесок авторів:** формулювання проблеми – **Сергій Ігнатович, Ірина Джавадова**; огляд та аналіз інформаційних джерел – **Ірина Джавадова**; постановка задачі – **Святослав Юцкевич, Сергій Ігнатович**; оцінка результатів – **Ірина Джавадова, Святослав Юцкевич**; формулювання висновків – **Ірина Джавадова**.

### Конфлікт інтересів

Автори заявляють, що немає конфлікту інтересів щодо цього дослідження, фінансового, особистого, авторського чи іншого, який міг би вплинути на дослідження та його результати, представлені в цій статті.

### Фінансування

Дослідження проводилося без фінансової підтримки.

### Доступність даних

Рукопис не має пов'язаних даних.

### Використання засобів штучного інтелекту

Автори підтверджують, що не використовували технології штучного інтелекту при створенні представленої роботи.

Усі автори прочитали та погодилися з опублікованою версією рукопису.

### Література

1. Janssen, M. *Fracture mechanics* / M. Janssen. – 2nd ed. – London : Spon Press, 2004. – 365 p.
2. Anderson, T. L. *Fracture mechanics: Fundamentals and applications* / T. L. Anderson. – 3rd ed. – Boca Raton, FL : Taylor & Francis, 2005. – 621 p.
3. Wheeler, O. E. Spectrum Loading and Crack Growth / O. E. Wheeler // *Journal of Basic Engineering*. – 1972. – Vol. 94, iss. 1. – P. 181–186. DOI: 10.1115/1.3425362
4. Willenborg, J. A Crack Growth Retardation Model Using an Effective Stress Concept / J. Willenborg, R. M. Engle, H. A. Wood. – Fort Belvoir, VA : Defense Technical Information Center, 1971. – 22p. DOI: 10.21236/ada956517
5. Gallagher, J. P. Influence of Yield Strength on Overload Affected Fatigue Crack Growth Behavior in 4340 Steel / J. P. Gallagher, T. F. Hughes. – Fort Belvoir, VA : Defense Technical Information Center, 1974. – 38p. DOI: 10.21236/ad0787655
6. Deiters, T. W. Hsu Model. TWD03ER009-1 / T. W. Deiters. – Kennesaw GA : Engineering Inc, 2004. – 58 p.
7. Newman, J. C. Jr. FASTRAN-II: A Fatigue Crack Growth Structural Analysis Program / J. C. Newman (Jr.). – NASA-TM-104159. – National Aeronautics and Space Administration, 1992. – 103p.
8. Assessment of crack tip plastic zone size and shape and its influence on crack tip shielding / J. M. Vasco-Olmo, M. N. James, C. J. Christopher et al. // *Fatigue & Fracture of Engineering Materials & Structures*. – 2016. – Vol. 39, iss. 8. – P. 969–981. DOI: 10.1111/ffe.12436
9. Harmain, G. A. Fatigue crack-tip plasticity revisited – The issue of shape addressed / G. A. Harmain, J. W. Provan // *Theoretical and Applied Fracture Mechanics*. – 1997. – Vol. 26, iss. 2. – P. 63–79. DOI: 10.1016/s0167-8442(96)00036-5
10. A Better Estimation of Plastic Zone Size at the Crack Tip Beyond Irwin's Model / Y. J. Jia, M. X. Shi, Y. Zhao, B. Liu // *Journal of Applied Mechanics*. – 2013. – Vol. 80, iss. 5. – 6 p. DOI: /10.1115/1.4023642
11. Dugdale, D. S. Yielding of steel sheets containing slits / D. S. Dugdale // *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*. – 1960. – Vol. 8, iss. 2. – P. 100–104. DOI: 10.1016/0022-5096(60)90013-2
12. Леонов, М. Я. Развитие мельчайших трещин в твердом теле / М. Я. Леонов, В. В. Панасюк // *Прикладная механика*. – 1959. – Т. 5, №4. – С.391–401.
13. Park, K. Cohesive Zone Models: A Critical Review of Traction-Separation Relationships Across Fracture Surfaces / K. Park, G. H. Paulino // *Applied Mechanics Reviews*. – 2011. – Vol. 64, iss. 6. – 20 p. DOI: 10.1115/1.4023110
14. Ferdjani, H. Application of the Dugdale model to a mixed mode loading of a semi infinite cracked structure / H. Ferdjani, J. Marigo // *European Journal of Mechanics - A/Solids*. – 2015. – Vol. 53. – P. 1–9. DOI: 10.1016/j.euromechsol.2015.02.006
15. Towards a new model of crack tip stress fields / C. J. Christopher, M. N. James, E. A. Patterson, K. F. Tee // *International Journal of Fracture*. – 2007. – Vol. 148, iss. 4. – P. 361–371. DOI: 10.1007/s10704-008-9209-3
16. Local crack plasticity and its influences on the global elastic stress field / M. N. James, C. J. Christopher, Y. Lu, E. A. Patterson // *International Journal of Fatigue*. – 2013. – Vol. 46. – P. 4–15. DOI: 10.1016/j.ijfatigue.2012.04.015
17. Uguz, A. Plastic zone size measurement techniques for metallic materials / A. Uguz, J. W. Martin // *Materials Characterization*. – 1996. – Vol. 37, iss. 2-3. – P. 105–118. DOI: 10.1016/s1044-5803(96)00074-5
18. Nowell, D. Application of digital image correlation to the investigation of crack closure following overloads / D. Nowell, P. F. P. de Matos // *Procedia Engineering*. – 2010. – Vol. 2, iss. 1. – P. 1035–1043. DOI: 10.1016/j.proeng.2010.03.112
19. Modified Model of Crack Tip Stress Field Considering Dislocation Slip Accumulation and Crack Tip Blunting / J. Li, B. Yang, S. Wang et al. // *Chinese Journal of Mechanical Engineering*. – 2023. – Vol. 36, no. 1. – 14 p. DOI: 10.1186/s10033-023-00875-9
20. Rahgozar, R. Finite Element Analysis of Plasticity- Induced Fatigue Crack Closure with Singular Element / R. Rahgozar, H. Saffari, R. Tabatabaei // *American Journal of Applied Sciences*. – 2007. – Vol. 4, no. 6. – P. 357–361. DOI: 10.3844/ajassp.2007.357.361
21. Beden, S. M. Review of Fatigue Crack Propagation Models for Metallic Components / S. M. Beden, S. Abdullah, A. K. Ariffin // *European Journal of Scientific Research*. – 2009. – Vol. 28, no. 3. – P. 364–397.
22. Elber, W. The Significance of Fatigue Crack Closure / W. Elber // *ASTM STP 486*. – 1971. – P. 230–242.
23. Newman, J. C. A Crack Opening Stress Equation for Fatigue Crack Growth / J. C. Newman // *International Journal of Fracture*. – 1984. – 5 p.
24. Newman, J. C. Jr. FASTRAN-II: A Fatigue Crack Growth Structural Analysis Program / J. C. Jr. Newman // *NASA-TM-104159*. National Aeronautics and Space Administration. – 1992. – 68 p.
25. ESDU 80036. Introduction to the Use of Linear Elastic Fracture Mechanics in Estimating Fatigue Crack

*Growth Rates and Residual Strength of Components.* – 2003. – 29 p.

26. ASTM E561-23. *Standard Test Method for K-R Curve Determination.* – West Conshohocken : ASTM International, 2023. – 18 p.

27. BS 7910-19. *Guide to methods for assessing the acceptability of flaws in metallic structures.* – London : Standards Policy and Strategy Committee, 2019. – 306 p.

28. Anderson, T. L. *API 579: a comprehensive fitness-for-service guide* / T. L. Anderson, D. A. Osage // *International Journal of Pressure Vessels and Piping.* – 2000. – Vol. 77, iss. 14-15. – P. 953–963. DOI: 10.1016/S0308-0161(01)00018-7

29. Wood, H. A. *Damage Tolerant Design Handbook: Guidelines for the Analysis and Design of Damage Tolerant Aircraft Structures* / H. A. Wood, R. M. Engle Jr. – Ohio : Structures and Dynamics Division, 1979. – 447 p.

## References

1. Janssen, M. *Fracture mechanics.* London, Spon Press, 2004. 365 p.

2. Anderson, Ted L. *Fracture mechanics: Fundamentals and applications.* Boca Raton, Taylor & Francis, 2005. 621 p.

3. Wheeler, O. E. Spectrum Loading and Crack Growth. *Journal of Basic Engineering*, 1972, vol. 94, iss. 1, pp. 181–186. DOI: 10.1115/1.3425362

4. Willenborg, J., Engle, R. M., Wood, H. A. *A Crack Growth Retardation Model Using an Effective Stress Concept.* Fort Belvoir, Defense Technical Information Center, 1971. 22p. DOI: 10.21236/ada956517

5. Gallagher, J. P., Hughes, T. F. *Influence of Yield Strength on Overload Affected Fatigue Crack Growth Behavior in 4340 Steel.* Fort Belvoir, Defense Technical Information Center, 1974. 38p. DOI: 10.21236/ad0787655

6. Deiters, T.W. *Hsu Model.* TWD03ER009-1. Kennesaw GA, Engineering Inc, 2004. 58 p.

7. Newman, J.C. Jr. *FASTRAN-II: A Fatigue Crack Growth Structural Analysis Program.* National Aeronautics and Space Administration, 1992. 103p.

8. Vasco-Olmo, J. M., James, M. N., Christopher, C. J., Patterson, E. A., Díaz, F. A. Assessment of crack tip plastic zone size and shape and its influence on crack tip shielding. *Fatigue & Fracture of Engineering Materials & Structures*, 2016, vol. 39, iss. 8, pp. 969–981. DOI: 10.1111/ffe.12436

9. Harmain, G. A., Provan J. W. Fatigue crack-tip plasticity revisited – The issue of shape addressed. *Theoretical and Applied Fracture Mechanics*, 1997, vol. 26, no. 2, pp. 63–79. DOI: 10.1016/S0167-8442(96)00036-5

10. Jia, Y.J., Shi, M.X., Zhao, Y., Liu, B. Better Estimation of Plastic Zone Size at the Crack Tip Beyond Irwin's Model. *Journal of Applied Mechanics*, 2013, vol. 80, no. 5. 6 p. DOI:10.1115/1.4023642

11. Dugdale, D. S. Yielding of steel sheets containing slits. *Journal of the Mechanics and Physics of*

*Solids*, 1960, vol. 8, no. 2, pp. 100–104. DOI: 10.1016/0022-5096(60)90013-2

12. Leonov, M. Ia, Panasiuk, V. V. Razvytye melchaishykh treshchyn v tverdom tele [Development of the smallest cracks in a solid body]. *Prykladnaia mekhanika*, 1959, vol. 5, no.4, pp. 391–401.

13. Park, K., Paulino, G. H. Cohesive Zone Models: A Critical Review of Traction-Separation Relationships Across Fracture Surfaces. *Applied Mechanics Reviews*, 2011, vol. 64, iss. 6. 20 p. DOI: 10.1115/1.4023110

14. Ferdjani, H., Marigo, J. Application of the Dugdale model to a mixed mode loading of a semi infinite cracked structure. *European Journal of Mechanics*, 2015, vol. 53, pp. 1–9. DOI: 10.1016/j.euromechsol.2015.02.006

15. Christopher, C. J., James, M. N., Patterson, E. A. Tee, K. F. Towards a new model of crack tip stress field. *International Journal of Fracture*, 2007, vol. 148, no. 4, pp. 361–371. DOI: 10.1007/s10704-008-9209-3

16. James, M. N., Christopher, C. J., Lu, Y., Patterson, E. A. Local crack plasticity and its influences on the global elastic stress field. *International Journal of Fatigue*, 2013, vol. 46, pp. 4–15. DOI: 10.1016/j.ijfatigue.2012.04.015

17. Uguz, A., Martin, J. W. Plastic zone size measurement techniques for metallic materials. *Materials Characterization*, 1996, vol. 37, iss. 2-3, pp. 105–118. DOI: 10.1016/S0144-5803(96)00074-5

18. Nowell, D., de Matos, P. F. P. Application of digital image correlation to the investigation of crack closure following overloads. *Procedia Engineering*, 2010, vol. 2, no. 1, pp. 1035–1043. DOI: 10.1016/j.proeng.2010.03.112

19. Li, J., Yang, B., Wang, S., James, M. N., Xiao, S., Zhu, T., Yang, G. Modified Model of Crack Tip Stress Field Considering Dislocation Slip Accumulation and Crack Tip Blunting. *Chinese Journal of Mechanical Engineering*, 2023, vol. 36, no. 1. 14 p. DOI: 10.1186/s10033-023-00875-9

20. Rahgozar, R., Saffari, H., Tabatabaei, R. Finite Element Analysis of Plasticity- Induced Fatigue Crack Closure with Singular Element. *American Journal of Applied Sciences*, 2007, vol. 4, no. 6, pp. 357–361. DOI: 10.3844/ajassp.2007.357.361

21. Beden, S. M., Abdullah, S., Ariffin, A. K. Review of Fatigue Crack Propagation Models for Metallic Components. *European Journal of Scientific Research*, 2009, vol. 28, no. 3, pp. 364–397.

22. Elber, W. The Significance of Fatigue Crack Closure. *ASTM STP 486*, 1971, pp. 230–242.

23. Newman, J. C. A Crack Opening Stress Equation for Fatigue Crack Growth. *International Journal of Fracture*, 1984. 5 p.

24. Newman, J. C. Jr. *FASTRAN-II: A Fatigue Crack Growth Structural Analysis Program.* NASA-TM-104159. National Aeronautics and Space Administration, 1992. 68 p.

25. *ESDU 80036 Introduction to the Use of Linear Elastic Fracture Mechanics in Estimating Fatigue Crack*

Growth Rates and Residual Strength of Components, 2003. 29 p.

26. ASTM E561-23 Standard Test Method for K-R Curve Determination. ASTM International, West Conshohocken, 2023. 18 p.

27. BS 7910-19 Guide to methods for assessing the acceptability of flaws in metallic structures. British Standard, London, 2019. 306 p.

28. Anderson, T. L., Osage, D. A. API 579: a

comprehensive fitness-for-service guide. *International Journal of Pressure Vessels and Piping*, 2000, vol. 77, iss. 14-15, pp. 953–963. DOI: 10.1016/S0308-0161(01)00018-7

29. Wood, H. A., Engle Jr, R. M. *Damage Tolerant Design Handbook: Guidelines for the Analysis and Design of Damage Tolerant Aircraft Structures*. Structures and Dynamics Division, 1979. 447 p.

Надійшла до редакції 27.06.2026, отримано в доопрацьованому вигляді 27.07.2026,  
Дата ухвалення 17.08.2026, дата публікації 26.08.2026

## APPROACHES TO DETERMINING THE PLASTIC ZONE NEAR THE CRACK TIP IN FATIGUE LIFE CALCULATIONS

**Sergii Ignatovich, Svyatoslav Yutskevych, Iryna Dzhavadova**

This paper reviews the primary approaches to assessing the plastic zone formed in the vicinity of a fatigue crack tip, and analyses how this is considered in fatigue life calculations for aircraft structures. This topic is relevant because most airframe components experience high-cycle, variable-amplitude loading, and the presence of cracks or stress concentrators can induce local plastic deformation even at relatively low nominal stress levels. Within the framework of linear elastic fracture mechanics (LEFM), stresses exhibit a singularity at the crack tip; that is, they increase infinitely as the crack tip is approached. In real structural materials, however, such an increase is limited by reaching the yield strength, resulting in the formation of a plastic zone. The size and shape of this zone affect the validity of applying LEFM parameters. The paper analyzes the stress state near the crack tip, the role of the stress intensity factor (SIF), and the conditions for the onset of plastic deformation according to the Mises and Tresca criteria. It also considers the differences between plane stress and plane strain states. Particular focus is given to the classical analytical models of Irwin, Leonov–Panasyuk–Dugdale and their modifications. The analysis includes experimental and numerical methods for refining the plastic zone, such as microhardness measurements, metallographic etching, digital image correlation (DIC), and the finite element method (FEM). The influence of the plastic zone on fatigue crack growth is considered, including the distinction between monotonic and cyclic plastic zones, plasticity-induced crack closure, and the effects of overload, underload, and load interaction in a loading spectrum. Approaches that account for the effects of local plastic deformation both at the crack tip and in the crack wake are critically evaluated, including the Wheeler, Willenborg, Generalized Willenborg, Modified Generalized Willenborg, Hsu, FASTRAN and strip-yield models. The inclusion of the plastic zone in regulatory and reference documents is also discussed. It is demonstrated that the Irwin plastic zone correction method is the most widely used approach in engineering practice for accounting for the plastic zone. It is also established that plastic zone assessment is an important component of analysing the fatigue life and residual strength of aircraft structures. This makes it possible to determine the limits of LEFM applicability, justify the selection of appropriate calculation model, account for the influence of load history and improve the reliability of durability prediction for cracked structural elements.

**Keywords:** plastic zone, plastic deformation, stress-strain state, crack tip, stress intensity factor, linear elastic fracture mechanics, fatigue crack growth, durability, residual strength, service life, fracture criteria, loading, modelling, aircraft structures.

**Ігнатович Сергій Ромуальдович** – д.т.н., професор каф. авіаційної інженерії, Національний університет «Київський авіаційний інститут», Київ, Україна.

**Джавадова Ірина Іксамівна** – інженер- конструктор, АТ «АНТОНОВ», Київ, Україна.

**Юцкевич Святослав Сергійович** – к.т.н., доцент, декан аерокосмічного факультету, Національний університет «Київський авіаційний інститут», Київ, Україна.

**Sergii Ignatovich** – Doctor of Science, Professor of Design Department, National University "Kyiv Aviation Institute" Kyiv, Ukraine,

e-mail: ignatovich@nau.edu.ua, ORCID: 0000-0001-9322-2195, Scopus Author ID: 6603696962,

**Dzhavadova Iryna** – Design Engineer, "ANTONOV" JSC, Kyiv, Ukraine,

e-mail: 296961@stud.kai.edu.ua, ORCID: 0009-0007-1525-5769.

**Svyatoslav Yutskevych** – Candidate of Technical Sciences, Dean of the Aerospace Faculty, National University "Kyiv Aviation Institute" Kyiv, Ukraine,

e-mail: sviatoslav.yutskevych@npp.kai.edu.ua, ORCID: 0000-0001-6650-4453, Scopus Author ID: 59710426900.