

О. Ю. ГАВАЗА, Д. І. КОНОТОП

Національний технічний університет України «Київський політехнічний інститут імені Ігоря Сікорського», Київ, Україна

ДОСЛІДЖЕННЯ ВПЛИВУ СТІЛОПОДІБНОСТІ КРИЛА НА КРИТИЧНУ ШВИДКІСТЬ ДИВЕРГЕНЦІЇ МЕТОДОМ СКІНЧЕННО-ЕЛЕМЕНТНОЇ ЛІНІЙНОЇ АПРОКСИМАЦІЇ

Предметом вивчення в статті є вплив стрілоподібності крила на критичну швидкість дивергенції як одну з основних характеристик статичної аеропружної стійкості несучої поверхні літального апарата. **Метою** статті є визначення якісного та кількісного впливу прямої та зворотної стрілоподібності на критичну швидкість дивергенції за допомогою методу скінченно-елементної лінійної апроксимації. **Завдання:** сформулювати спрощену двоелементну модель крила, в якій геометрична форма в плані враховується через параметр відносного зміщення пружних осей; записати матриці жорсткості, аеродинамічного впливу та матриці перетворення координат у єдиній глобальній системі; отримати характеристичне рівняння дивергенції після застосування методу вузлової конденсації; проаналізувати три характерні випадки, що відповідають прямій, зворотній та нульовій стрілоподібності; порівняти отримані значення критичної швидкості у відносній формі. Методи дослідження ґрунтуються на скінченно-елементній лінійній апроксимації, матричному поданні пружних і аеродинамічних операторів, переведенні матриць локальних операторів у єдину глобальну систему координат та аналітичному розв'язанні характеристичного рівняння. **Отримані результати** показують, що позитивне відносне зміщення пружних осей, яке відповідає стрілоподібному крилу, збільшує критичну швидкість дивергенції порівняно з прямим крилом. Для прямого крила відносне значення швидкості дивергенції становить близько 0,618 від максимального значення, тоді як для крила зворотної стрілоподібності це значення зменшується до 0,560, 0,518 і 0,484 залежно від величини від'ємного зміщення. **Практична цінність** результатів полягає в можливості швидкого порівняння варіантів конструювання без побудови детальної просторової моделі крила. **Висновки.** Запропонована двоелементна модель дозволяє наочно простежити зв'язок між параметром стрілоподібності та умовою втрати статичної аеропружної стійкості. **Наукова новизна** полягає у використанні компактної скінченно-елементної лінійної моделі для попередньої аналітичної оцінки впливу форми крила в плані на критичну швидкість дивергенції, що може бути корисним на ранніх етапах проектування літальних апаратів.

Ключові слова: стрілоподібне крило; зворотна стрілоподібність; аеропружність; дивергенція крила; критична швидкість дивергенції; скінченно-елементна лінійна апроксимація; вузлова конденсація.

Вступ

Стрілоподібність крила є одним із ключових геометричних параметрів літального апарата, що визначає не лише аеродинамічні характеристики, а й характер статичної аеропружної взаємодії. Зміна форми крила у плані змінює взаємне положення пружної осі, аеродинамічного фокуса та центрів тиску окремих ділянок крила. Унаслідок цього змінюються плечі дії аеродинамічних сил відносно центрів жорсткості, а отже – умови виникнення дивергенції як втрати статичної стійкості пружної несучої поверхні.

Мотивація дослідження пов'язана з потребою отримувати швидкі інженерні оцінки аеропружної стійкості ще до створення деталізованої просторової моделі конструкції. На ранніх етапах проектування конструктору важливо не лише отримати числове значення критичної швидкості, а й бачити, як саме

зміна геометричного параметра впливає на характеристичне рівняння дивергенції.

Класичне дослідження Ф. Дідеріха та Б. Будянського показало, що форма стрілоподібного крила істотно впливає на швидкість дивергенції [1]. У фундаментальній праці Р. Бісслінгтофа, Г. Ешлі та Р. Гальфмана дивергенцію подано як базову задачу статичної аеропружності, у якій визначальними є крутильна жорсткість, положення аеродинамічного фокуса та похідна підйомної сили [2]. Дж. Райт і Дж. Купер узагальнили інженерні підходи до розрахунку аеропружних навантажень і підкреслили роль спрощених моделей на попередніх стадіях проектування [3]. Д. Годжес і Г. Пірс показали, що для крил із просторовою геометрією взаємозв'язок згину, кручення та аеродинамічного навантаження потребує узгодженого матричного подання [4].

Для крил зворотної стрілоподібності проблема дивергенції є особливо важливою. Експериментальні



дослідження NASA, виконані Р. Рікеттсом і Р. Доггеттом, підтвердили підвищену чутливість таких крил до статичної аеропружної нестійкості [5]. Надалі для зменшення цього ризику почали застосовувати аеропружне проєктування композиційних конструкцій: зокрема, В. Тіан, З. Ян, І. Гу та І. Оуянґ розглядали підвищення швидкостей дивергенції й флатеру через раціональний вибір параметрів композиційного крила зворотної стрілоподібності [6].

Сучасний стан досліджень характеризується одночасним розвитком високоточних CFD/CSD-моделей і швидких інженерних методів. Р. Аццара, М. Філіппі, М. Петроло, Р. Річчі та Дж. Дзеккін у 2026 р. запропонували уточнену аеропружну схему, яка враховує зсув і деформівність поперечного перерізу та демонструє стабілізуючий вплив кутів стрілоподібності [7]. Ф. Ю, К. Себастья Саез і М. Хорнунг у 2026 р. показали доцільність багаторівневих аеропружних інструментальних ланцюжків для введення аеропружних обмежень на ранніх етапах проєктування [8]. К. Райнбольд, К. Брайтзамтер і К. Сьоренсен у 2026 р. виконали аеродинамічний і статичний аеропружний аналіз високоманеврового літального апарата, що підтверджує актуальність зв'язку між формою крила, деформаціями та аеродинамічними характеристиками [9]. Ф. Саккі та співавтори в 2026 р. розглянули аеропружну поведінку крил зворотної стрілоподібності з відхиленими складними законцівками, акцентуючи увагу на зменшенні аеропружних нестійкостей [10]. О. Гребеніков і О. Соболев [11] проаналізували вплив кута стрілоподібності крила навчально-тренувального літака на характеристики статичної аеропружності.

Окрему увагу в сучасних працях приділено впливу початкової геометрії крила на межі аеропружної стійкості. С. А. Фазелзаде, М. Резаї та А. Мазіді дослідили сумісний вплив стрілоподібності, звуження та змінної попередньої крутки на аеропружні характеристики балкової моделі крила [12]. М. Р. Амоозгар та співавтори на геометрично точній моделі показали, що задана початкова просторовість конструкції може змінювати межі аеропружної стійкості, тому висновки спрощених лінійних моделей мають формулюватися в межах прийнятих припущень [13].

Огляд Р. М. Аджа та співавторів систематизує сучасні підходи до аналізу дивергенції, флатеру та керування навантаженнями для крил зі змінною геометрією [14]. А. А. Саїд та співавтори застосували компактну модель для дослідження дивергенції та реверсу керування літака схеми «літаюче крило» зі змінною геометрією [15]. Д. Кампанья, В. Гуліцці та

І. Бенедетті запропонували DG–VLM-схему статичного аеропружного аналізу композиційних крил, орієнтовану, зокрема, на ранні етапи проєктування [16]. Вплив кута стрілоподібності на репрезентативний переріз для оцінювання дивергенції та флатеру досліджено М. Ньето Гомесом і М. Чімено Мангуаном [17], а сучасну експериментальну перевірку механізму аеропружної дивергенції наведено Г. Матуром, Е. Хуангом та Е. Доуеллом [18].

Незважаючи на розвиток високоточних моделей, для попереднього проєктування залишаються потрібними компактні аналітичні схеми. У цій роботі для такої оцінки використано метод скінченно-елементної лінійної апроксимації (МС-ЕЛА), який дає змогу подати крило як упорядковану систему скінченно-елементних ділянок із пружними та аеродинамічними операторами. Порівняно з високодеталізованими чисельними моделями, перевагою такого підходу є прозорий зв'язок між параметрами геометрії та характеристичним рівнянням дивергенції.

Метою статті є визначення впливу прямої та зворотної стрілоподібності на критичну швидкість дивергенції крила з використанням МС-ЕЛА. Підхід полягає у побудові спрощеної двоелементної моделі, введенні параметра відносного зміщення пружних осей, отриманні характеристичного рівняння та аналізі залежності відносної критичної швидкості від цього параметра. Структура статті є такою: у розділі 1 сформульовано постановку задачі та припущення; у розділі 2 наведено методичну основу дослідження; у розділі 3 побудовано розрахункову схему, отримано характеристичне рівняння та подано приклад реалізації та числове порівняння; у розділі 4 обговорено межі застосування результатів; у висновку сформульовано основні результати та напрями подальших досліджень.

1. Постановка задачі

Предметом дослідження в цій статті є вплив форми стрілоподібності крила на величину критичної швидкості дивергенції, визначеної методом скінченно-елементної лінійної апроксимації.

Розглядається ідеалізована модель крила, що складається з двох однакових скінченно-елементних ділянок. Кожна ділянка має однакові пружні та аеродинамічні параметри, а форма крила у плані враховується через відносне зміщення пружних осей цих ділянок. Для спрощення враховується статична взаємодія пружних і аеродинамічних сил; інерційні складові не розглядаються.

У межах цієї роботи досліджується параметрична модель консолі крила з жорстким закріпленням у кореновому перерізі. Центроплан не подається

як окремий деформівний елемент: його вплив замінено прийнятою граничною умовою. Тому жорсткість і положення центра жорсткості центроплану не є змінними параметрами наведеного порівняння та не входять до отриманого характеристичного рівняння. Для аналізу податливого центроплану він може бути введений у МС-ЕЛА як додаткова скінченно-елементна ділянка з власною матрицею жорсткості та матрицею перетворення координат.

Геометрична кривка в прийнятій лінійній постановці трактується як заданий початковий розподіл кутів установки перерізів. За незмінних локальних аеродинамічних похідних і секційних жорсткостей вона змінює вектор вихідного аеродинамічного навантаження, але не однорідну матрицю умови втрати стійкості, а тому не змінює критичний корінь дивергенції саме в межах цієї моделі. Це твердження не поширюється на просторово попередньо закручені конструкції зі структурним зв'язком, геометричною нелінійністю або змінними за розмахом аеродинамічними характеристиками.

Задача полягає у побудові характеристичного рівняння дивергенції для двоелементної моделі крила та у визначенні впливу параметра стрілоподібності на відносну критичну швидкість. Окремо аналізуються три характерні випадки: крило прямої стрілоподібності, пряме крило та крило зворотної стрілоподібності.

2. Матеріали та методи дослідження

Методичною основою дослідження є метод скінченно-елементної лінійної апроксимації, відповідно до якого крило подається у вигляді впорядкованої системи скінченно-елементних ділянок. Кожна ділянка описується сукупністю пружних та аеродинамічних операторів, що у матричній формі характеризують дію пружних відновлювальних сил і аеродинамічного навантаження.

Теоретичні засади МС-ЕЛА, зокрема формування операторів аеропружної системи для попереднього проектування несучих поверхонь, наведені у роботі О. Гавази, В. Сухова та Р. Нікітіна [19]. Методичні підходи до врахування аеропружності під час визначення характеристик крила розглянуто І. Балабановим, Т. Балабановою та О. Гавазою [20]. Метод вузлової конденсації, який використано для зведення вихідної розрахункової схеми до узагальненої результуючої матриці, подано І. Балабановим і Т. Балабановою [21]. Зазначені праці [12–14] цитуються як першоджерела використаного математичного апарату — формування операторів МС-ЕЛА та процедури вузлової конденсації, а не як незалежне підтвердження отриманих у цій статті результатів.

У цій статті зазначений математичний апарат використано для окремої задачі оцінювання впливу форми стрілоподібності крила на критичну швидкість дивергенції. Зміна форми крила враховується не через детальну просторову геометрію, а через параметр відносного зміщення пружних осей скінченно-елементних ділянок, що дає змогу отримати компактне характеристичне рівняння та виконати аналітичне порівняння.

3. Приклад реалізації

Продемонструємо особливості застосування МС-ЕЛА для дослідження дивергенції моделі крила, що складається з двох скінченно-елементних ділянок (рис. 1).

Спочатку розділимо досліджуване крило на 2 ділянки. Потім, згідно з вимогами МС-ЕЛА, складемо розрахункову схему (рис. 2), де матриця жорсткості $C_{[k-1,k]}^{(2)}$ обумовлюється дією пружних відновлювальних сил, аеродинамічна матриця $A_{[k,0]}^{(2)}$ характеризує вплив аеродинамічних сил, діючих на k -й $k = \overline{1, 2}$ ділянці крила.

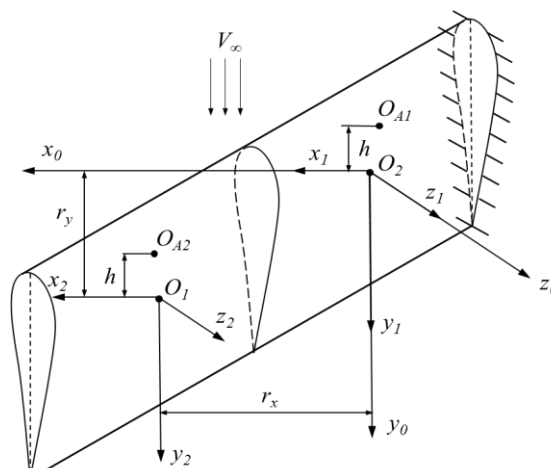


Рис. 1. Двоелементна модель стрілоподібного крила

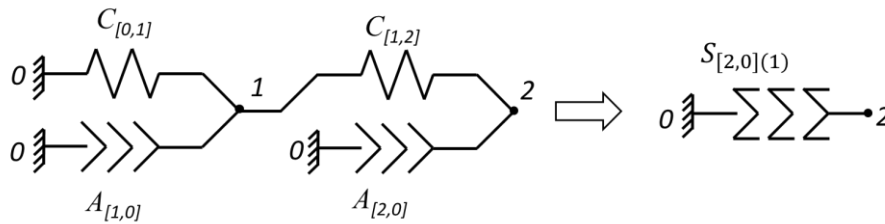


Рис. 2. Розрахункова схема двоелементної моделі крила

Відповідно до МС-ЕЛА всі використані в розрахунках матриці ($C_{[1,0]}^{(2)}$, $C_{[1,2]}^{(2)}$, $A_{[1,0]}^{(2)}$, $A_{[2,0]}^{(2)}$) мають бути переведені з локальних систем координат і подані в єдиній глобальній системі координат $Ox_0y_0z_0$.

При цьому для зниження громіздкості аналітичних викладок маємо систему координат $Ox_0y_0z_0$ наступним чином:

- початок координат (точка O) збігається з центром жорсткості першої скінченно-елементної ділянки;
- координатна вісь Ox_0 лежить у напрямку - від першої ділянки до другої;
- напрямок осі Oz_0 - вертикально вгору, а осі Oy_0 - по потоку.

У формулах статті використано такі позначення: C – матриця жорсткості скінченно-елементної ділянки; A – матриця аеродинамічного впливу; Λ – матриця перетворення координат; c_3 , c_4 , c_5 – коефіцієнти жорсткості пружних відновлювальних сил; a – похідна підйомної сили за кутом атаки у матричному записі; ρ – густина повітря; V – швидкість польоту; h – відстань між центром жорсткості та аеродинамічним фокусом; r_x і r_y – відносні зміщення скінченно-елементних ділянок у глобальній системі координат; k – безрозмірний параметр характеристичного рівняння дивергенції.

Вплив аеродинамічного профілю в моделі задається не безпосередньо його координатами, а через параметри аеродинамічного оператора: похідну підйомної сили за кутом атаки, локальну хорду та плече h між центром жорсткості й аеродинамічним фокусом. Вплив геометрії та розподілу товщини профілю на секційну жорсткість узагальнено враховується коефіцієнтами c_3 , c_4 і c_5 . У наведеному прикладі ці параметри прийнято однаковими для обох ділянок; за аеродинамічної крутки або зміни профілю за розмахом вони мають задаватися окремо для кожної ділянки у відповідних матрицях A_{-i} та C_{-i} .

Для спрощення вважаємо конструкцію двох скінченно-елементних ділянок ідентичної. Зазначимо, що зроблене припущення обумовлює рівність наступних величин на двох скінченно-елементних ділянках:

- коефіцієнтів жорсткості пружних відновлювальних сил

$$c_{\{1\}3,3} = c_{\{2\}3,3} = c_3, \quad c_{\{1\}4,4} = c_{\{2\}4,4} = c_4,$$

$$c_{\{1\}5,5} = c_{\{2\}5,5} = c_5, \quad (1)$$

- похідних підйомної сили за кутом атаки

$$a_{\{1\}3,4} = a_{\{2\}3,4} = a, \quad (2)$$

$$a_i = c_{zi}^{\alpha} b_{yi} l_{xi} \rho \frac{V^2}{2}; \quad (3)$$

- відстаней h між відповідними центрами жорсткості та тиску.

Зазначені рівності (1) і (2) дозволяють записати матриці жорсткості та аеродинамічного впливу для двох скінченно-елементних ділянок у вигляді

$$C_{\{1\}[1,0]}^{(2)} = C_{\{2\}[1,2]}^{(2)} = \begin{bmatrix} c_3 & 0 & 0 \\ 0 & c_4 & 0 \\ 0 & 0 & c_5 \end{bmatrix},$$

$$A_{\{1\}[1,0]}^{(2)} = A_{\{2\}[2,0]}^{(2)} = \begin{bmatrix} 0 & a & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (4)$$

У свою чергу, матриці перетворення координат набувають вигляду.

$$\Lambda_{0,1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \Lambda_{0,1}^{(A)} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -h & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

$$\Lambda_{0,2} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ r_y & 1 & 0 \\ -r_x & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \Lambda_{0,2}^{(A)} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -h + r_y & 1 & 0 \\ -r_x & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (5)$$

Тепер, відповідно до вимог МС-ЕЛА, використовуючи вирази (4), (5), переведемо матриці локальних операторів розрахункової схеми та подамо їх у базовій глобальній системі координат $Ox_0y_0z_0$:

$$C_{[1,0]}^{(2)} = \Lambda_{0,1} C_{\{1\}[1,0]}^{(2)} (\Lambda_{0,1})^T = \begin{bmatrix} c_3 & 0 & 0 \\ 0 & c_4 & 0 \\ 0 & 0 & c_5 \end{bmatrix},$$

$$A_{[1,0]}^{(2)} = \Lambda_{0,1}^{(A)} A_{\{1\}[1,0]}^{(2)} (\Lambda_{0,1}^{(A)})^T = \begin{bmatrix} 0 & a & 0 \\ 0 & -ha & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

$$C_{[1,2]}^{(2)} = \Lambda_{0,2} C_{[2][1,2]}^{(2)} (\Lambda_{0,2})^T = \begin{bmatrix} c_3 & r_y c_3 & -r_x c_3 \\ r_y c_3 & c_4 + r_y^2 c_3 & -r_x r_y c_3 \\ -r_x c_3 & -r_x r_y c_3 & c_5 + r_x^2 c_3 \end{bmatrix},$$

$$A_{[2,0]}^{(2)} = \Lambda_{0,2}^{(A)} A_{[2][2,0]}^{(2)} (\Lambda_{0,2}^{(A)})^T = \begin{bmatrix} 0 & a & 0 \\ 0 & -a(h - r_y) & 0 \\ 0 & -a r_x & 0 \end{bmatrix} \quad (6)$$

Використовуючи рекурентну формулу у відповідності до методу вузлової конденсації [13], для випадку, що розглядається, ідеалізованої моделі крила

$$\det S_{[2,0](1)}^{(2)} = c_3 c_5 \frac{a^2 h^2 - 3c_4 a h + c_4^2 + c_4 a r_y}{8c_4 c_5 - 4c_5 a h - 2c_5 a r_y + 2c_3 c_4 r_x^2 + 2c_3 c_5 r_y^2 - c_3 a h r_x^2}. \quad (8)$$

Використовуючи вираз (8), отримаємо потрібне характеристичне рівняння, що описує умову виникнення дивергенції,

$$(a h - c_4)^2 - c_4 a (h - r_y) = 0. \quad (9)$$

У стандартному вигляді характеристичне рівняння (9) запишеться так:

$$(k-1)^2 - k(1 - \frac{r_y}{h}) = 0, \quad (10)$$

$$\text{де } k = \frac{a h}{c_4}.$$

Аналіз виразів (3) та (10) показує, що за умови $r_y = h$ в рамках ряду введених спрощень дивергенція настане за максимальної швидкості літака,

$$V_{D \max} = \sqrt{\frac{2c_4}{\rho c'_x b_y l_x h}}.$$

Значить, стрілоподібність крила літака, що характеризується позитивною величиною $0 < r_y \leq h$ відносного зміщення пружних осей (рис. 1) скінченних елементів, істотно покращує показник стійкості пружного крила під дією аеродинамічного навантаження.

У разі зворотної стрілоподібності крила літака, що характеризується негативною величиною $r_y < 0$ відносного зміщення пружних осей (рис. 1) скінченних елементів, аеропружна стійкість крила погіршується. При цьому, якщо зворотна стрілоподібність крила буде досить великою ($|r_y| \gg h$), то характеристичне рівняння (10) наближено може мати вигляд

$$-a|r_y| + c_4 \approx 0. \quad (11)$$

Потім з характеристичного рівняння (11) знаходимо значення параметра a , при якому починається

літака, розділеної на дві скінченно-елементних ділянки, отримаємо такий вираз узагальненої результуючої матриці $S_{[2,0](1)}^{(2)}$:

$$S_{[2,0](1)}^{(2)} = [(C_{[1,0]}^{(2)} + A_{[1,0]}^{(2)})^{-1} + (C_{[1,2]}^{(2)})^{-1}]^{-1} + A_{[2,0]}^{(2)} \quad (7)$$

Тепер, підставляючи матриці (6) у формулу (7) і провівши відповідні розрахунки, знаходимо загальний визначник узагальненої результуючої матриці $S_{[2,0](1)}^{(2)}$

дивергенція:

$$a_D^{(oc)} \approx \frac{c_4}{|r_y|} \quad (12)$$

Підставляючи у вираз (12) значення з формули (3), отримуємо наближений вираз критичної швидкості дивергенції для крила зворотної стрілоподібності:

$$V_D^{(oc)} \approx \sqrt{\frac{2c_4}{\rho c'_x b_y l_x |r_y|}}, \quad (|r_y| \gg h). \quad (13)$$

Для прикладу реалізації розглянемо набір безрозмірних значень параметра відносного зміщення пружних осей, який охоплює пряму стрілоподібність, пряме крило та зворотну стрілоподібність. Для кожного значення параметра записується відповідне характеристичне рівняння, визначається корінь, що відповідає початку дивергенції, і обчислюється відносне значення критичної швидкості. Результати наведено в табл. 1.

Представлені результати показують, що за критерієм критичної швидкості дивергенції стрілоподібні крила мають перевагу порівняно з прямими крилами та крилами зворотної стрілоподібності. Для $r_y/h = 1$ відносна швидкість дорівнює $V_{D \max}$, тоді як для прямого крила вона зменшується до $0,618 V_{D \max}$, а для $r_y/h = -1,5$ — до $0,484 V_{D \max}$.

4. Дискусія

Отримані результати узгоджуються з фізичною інтерпретацією дивергенції стрілоподібних крил. Позитивне зміщення пружних осей зменшує дестабілізуювальний момент від аеродинамічного навантаження в прийнятій розрахунковій схемі, тоді як від'ємне зміщення, характерне для зворотної стрілоподібності, збільшує схильність системи до самопідсилення кутової деформації.

Таблиця 1

Залежність відносної критичної швидкості дивергенції від параметра стрілоподібності

Позначення форми крила (стрілоподібне $0 < r_y / h \leq 1$) (пряме $r_y / h = 0$) (Зворотної стрілоподібності)	Відносне зміщення двох скінченно-елементних ділянок r_y / h	Характеристичне рівняння дивергенції $k^2 - (3 - \frac{r_y}{h})k + 1 = 0$	Розв'язання характеристичного рівняння $k_{\min}$	Відносне значення швидкості дивергенції $V_{\mathcal{D}} =$ $= V_{\mathcal{D} \max} \sqrt{k_{\min}}$
Стрілоподібне крило	1	$-k + 1 = 0$	1	$V_{\mathcal{D} \max}$
Стрілоподібне крило	0,5	$k^2 - 2,5 k + 1 = 0$	0,5	$0,707 V_{\mathcal{D} \max}$
Пряме крило	0	$k^2 - 3k + 1 = 0$	0,382	$0,618 V_{\mathcal{D} \max}$
Крило зворотної стрілоподібності	-0,5	$k^2 - 3,5 k + 1 = 0$	0,314	$0,56 V_{\mathcal{D} \max}$
Крило зворотної стрілоподібності	-1	$k^2 - 4k + 1 = 0$	0,268	$0,518 V_{\mathcal{D} \max}$
Крило зворотної стрілоподібності	-1,5	$k^2 - 4,5 k + 1 = 0$	0,234	$0,484 V_{\mathcal{D} \max}$

На відміну від високоточних CFD/CSD-моделей, запропонована двоелементна схема не претендує на повний опис просторової конструкції крила. Її призначення полягає в швидкій попередній оцінці впливу геометричного параметра на умову статичної аеропружної нестійкості. Такий підхід є корисним на етапі вибору компонування, коли необхідно порівняти альтернативні форми крила без побудови детальної розрахункової моделі.

Основними обмеженнями моделі є припущення про ідентичність двох скінченно-елементних ділянок, жорстке закріплення консолі в кореновому перерізі без окремого моделювання податливого центроплану, лінійний характер аеродинамічного навантаження, відсутність інерційних складових, незмінність за розмахом секційної жорсткості, хорди, похідної підйомної сили та положення аеродинамічного фокуса, а також неврахування стисливості. Тому отримані залежності слід розглядати як інженерну оцінку та аналітичну ілюстрацію ізольованого впливу параметра стрілоподібності, а не як завершений розрахунок реального крила транспортного літака.

За прийнятих припущень задана геометрична кривка не змінює характеристичної матриці дивергенції, оскільки входить лише до початкового навантаження. Водночас аеродинамічна кривка, тобто зміна профілю, хорди, похідної підйомної сили або положення фокуса за розмахом, у загальному випадку змінює аеродинамічні матриці ділянок і може впливати на критичну швидкість. Аналогічно, реальна попередньо закручена просторова конструкція може мати додаткові згинально-крутильні зв'язки; такі ефекти виходять за межі двоелементного прикладу та мають враховуватися окремими матрицями елементів або моделлю вищого рівня [15, 16].

Положення аеродинамічного фокуса та похідна підйомної сили вже присутні у вихідній математичній моделі через параметри h та a . Розподіл товщини профілю не задається як окрема геометрична функція, але його інтегральний структурний вплив міститься у коефіцієнтах секційної жорсткості. Отже, отримані результати можуть бути перенесені на інші однакові за розмахом профілі після підстановки відповідних параметрів, але не повинні без додаткової дискретизації поширюватися на крила зі змінним профілем або вираженою аеродинамічною кривкою.

Практичне значення результату полягає в тому, що параметр r_y/h може використовуватися як узагальнений індикатор впливу планової форми крила на дивергенцію. Це дозволяє формувати початкові вимоги до крутильної жорсткості, положення пружної осі та допустимого зміщення несучих ділянок ще до переходу до детального скінченно-елементного або багатодисциплінарного аналізу.

Висновки

У роботі досліджено вплив стрілоподібності крила на критичну швидкість дивергенції методом скінченно-елементної лінійної апроксимації. Побудовано спрощену двоелементну модель, у якій форма несучої поверхні враховується через параметр відносного зміщення пружних осей скінченно-елементних ділянок.

Отримано характеристичне рівняння дивергенції, що дає змогу оцінити вплив параметра стрілоподібності на статичну аеропружну стійкість. Показано, що додатне зміщення, яке відповідає прямій стрілоподібності, підвищує критичну швидкість дивергенції, тоді як від'ємне зміщення, характерне для крила зворотної стрілоподібності, знижує її.

Наукова новизна роботи полягає у компактному аналітичному поданні впливу стрілоподібності через параметр відносного зміщення пружних осей у двоелементній моделі. Практичне значення результатів полягає у можливості використання моделі для попереднього інженерного оцінювання аеропружної стійкості на ранніх етапах проектування.

Напрями майбутніх досліджень передбачають узагальнення моделі на більшу кількість скінченно-елементних ділянок, введення податливого центроплану як окремого елемента, урахування геометричної та аеродинамічної крутки, змінних профілю, хорди й жорсткості за розмахом, порівняння з високоточними FEM/CFD/CSD-моделями, аналіз чутливості критичної швидкості до положення пружної осі та поширення підходу на задачі аеропружного проектування композиційних крил.

Внесок авторів: концептуалізація та методологія – **О. Ю. Гаваза**; формулювання задачі та аналіз літератури – **О. Ю. Гаваза, Д. І. Конотоп**; розроблення математичної моделі та аналіз результатів – **О. Ю. Гаваза**; наукове консультування, критичний перегляд і редагування – **Д. І. Конотоп**; формулювання висновків – **О. Ю. Гаваза, Д. І. Конотоп**.

Конфлікт інтересів

Автори заявляють, що у них немає конфлікту інтересів щодо цього дослідження, фінансового, особистого, авторського чи іншого, який міг би вплинути на дослідження та його результати, представлені в цій статті.

Фінансування

Дослідження проводилося без фінансової підтримки.

Доступність даних

Рукопис не має пов'язаних даних.

Використання засобів штучного інтелекту

Автори використовували технології штучного інтелекту в допустимих рамках для мовного редагування та структурування рукопису; всі наукові результати, формули, числові значення та висновки перевірені авторами.

Усі автори прочитали та погодилися з опублікованою версією рукопису.

Література

1. Diederich, F. W. *Divergence of swept wings* / F. W. Diederich, B. Budiansky. – Washington : National Advisory Committee for Aeronautics, 1948. – NACA

Technical Note 1680. – 43 p. – Available at: <https://digital.library.unt.edu/ark:/67531/metadc54760/> (accessed: 04.05.2026).

2. Bisplinghoff, R. L. *Aeroelasticity* / R. L. Bisplinghoff, H. Ashley, R. L. Halfman. – Cambridge, MA : Addison-Wesley, 1955. – 860 p.

3. Wright, J. R. *Introduction to Aircraft Aeroelasticity and Loads* / J. R. Wright, J. E. Cooper. – 2nd ed. – Chichester : Wiley, 2015. – 544 p.

4. Hodges, D. H. *Introduction to Structural Dynamics and Aeroelasticity* / D. H. Hodges, G. A. Pierce. – 2nd ed. – Cambridge : Cambridge University Press, 2011. – 274 p.

5. Ricketts, R. H. *Wind-tunnel experiments on divergence of forward-swept wings* / R. H. Ricketts, R. V. Doggett Jr. – Washington : National Aeronautics and Space Administration, 1980. – NASA Technical Paper 1685. – Available at: <https://ntrs.nasa.gov/citations/19800020786> (accessed: 04.05.2026).

6. *Aeroelastic tailoring of a composite forward-swept wing using a novel hybrid pattern search method* / W. Tian, Z. Yang, Y. Gu, Y. Ouyang // *Journal of Aerospace Engineering*. – 2016. – Vol. 29, iss. 6. – 12 p. DOI: 10.1061/(ASCE)AS.1943-5525.0000652.

7. *Improved aeroelastic analysis framework to assess shear and cross-section deformability effects on static aeroelastic response* / R. Azzara, M. Filippi, M. Petrolo et al. // *Proceedings of the Institution of Mechanical Engineers, Part G: Journal of Aerospace Engineering*. – 2026. – 18 p. DOI: 10.1177/09544100261437337.

8. Yu, F. *A multi-fidelity aeroelastic toolchain: from UAVs to hydrogen transport aircraft* / F. Yu, C. S. Saez, M. Hornung // *Aerospace*. – 2026. – Vol. 13, iss. 3. – 25 p. DOI: 10.3390/aerospace13030286.

9. Reinbold, C. *Aerodynamic and static aeroelastic analysis of a high-agility aircraft* / C. Reinbold, C. Breitsamter, K. Sørensen // *Journal of Aircraft*. – 2026. – P. 1–15. DOI: 10.2514/1.C038409.

10. *Aeroelastic behaviour of forward-swept wings with flared folding wingtips* / F. Sacchi, J. Sneddon, F. Healy et al. // *AIAA Science and Technology Forum and Exposition, AIAA SciTech Forum 2026*. – Orlando, 2026. – 12 p. DOI: 10.2514/6.2026-1445.

11. Hrebenikov, O. H. *Jet trainer aircraft wing sweep angle influence analysis on the characteristics of static aeroelasticity* / O. H. Hrebenikov, O. O. Soboliev // *Open Information and Computer Integrated Technologies*. – 2024. – № 100. – P. 4–22. DOI: 10.32620/oikit.2024.100.01.

12. Fazelzadeh, S. A. *Aeroelastic analysis of swept pre-twisted wings* / S. A. Fazelzadeh, M. Rezaei, A. Mazidi // *Journal of Fluids and Structures*. – 2020. – Vol. 95. – 15 p. DOI: 10.1016/j.jfluidstructs.2020.103001.

13. *Aeroelastic stability analysis of aircraft wings with initial curvature* / M. R. Amoozgar, S. A. Fazelzadeh, H. Haddad Khodaparast et al. // *Aerospace Science and Technology*. – 2020. – Vol. 107. – 10 p. DOI: 10.1016/j.ast.2020.106241.

14. Recent developments in the aeroelasticity of morphing aircraft / R. M. Ajaj, M. S. Parancheerivilakkathil, M. R. Amoozgar et al. // *Progress in Aerospace Sciences*. – 2021. – Vol. 120. – 47 p. DOI: 10.1016/j.paerosci.2020.100682.

15. Aeroelasticity of flying-wing aircraft subject to morphing: a stability study / A. A. Syed, M. Moshtaghzadeh, D. H. Hodges, P. Mardanpour // *AIAA Journal*. – 2022. – Vol. 60, iss. 9. – P. 5372–5385. DOI: 10.2514/1.J061574.

16. Campagna, D. A DG–VLM framework for computational static aeroelastic analysis of composite wings / D. Campagna, V. Gulizzi, I. Benedetti // *Composite Structures*. – 2025. – Vol. 353. – 13 p. DOI: 10.1016/j.compstruct.2024.118697.

17. Nieto Gómez, M. On the definition and location of the aeroelastic typical section in swept wings / M. Nieto Gómez, M. Chimeno Manguán // *Aerospace*. – 2025. – Vol. 12, iss. 9. – 13 p. DOI: 10.3390/aerospace12090783.

18. Mathur, H. Experimental study of aeroelastic divergence / H. Mathur, E. Huang, E. H. Dowell // *AIAA Journal*. – 2026. – Vol. 64, iss. 5. – P. 2988–2993. DOI: 10.2514/1.J066300.

19. Havaza, O. Mathematical method for prediction aeroelastic phenomena and multidisciplinary optimization lifting surfaces of flight vehicle at preliminary stage design / O. Havaza, V. Sukhov, R. Nikitin // *International Forum on Aeroelasticity and Structural Dynamics IFASD 2024*. – The Hague, 2024. – Paper IFASD-2024-235. – Available at: https://conf.ifasd2024.nl/proceedings/display_manuscript/235.htm (accessed: 01.04.2026).

20. Balabanov, I. V. Methods of calculating the aircraft wing characteristics with the influence of aeroelasticity / I. V. Balabanov, T. V. Balabanova, O. I. Havaza // *Mechanics of Gyroscopic Systems*. – 2015. – № 29. – P. 63–76. DOI: 10.20535/0203-377129201563837.

21. Balabanov, I. V. Nodal condensation method for calculating elastic spatial systems / I. V. Balabanov, T. V. Balabanova // *Analitichna Mekhanika ta Yii Zastosuvannia: Zbirnyk Prats Instytutu Matematyky NAN Ukrainy*. – 2012. – Vol. 9, iss. 1. – P. 11–37.

References

1. Diederich, F. W., Budiansky, B. *Divergence of swept wings*, NACA Technical Note 1680, National Advisory Committee for Aeronautics, Washington, 1948. 43 p. Available at: <https://digital.library.unt.edu/ark:/67531/metadc54760/> (accessed 04 May 2026).

2. Bisplinghoff, R. L., Ashley, H., Halfman, R. L. *Aeroelasticity*, Addison-Wesley, Cambridge, MA, 1955. 860 p.

3. Wright, J. R., Cooper, J. E. *Introduction to Aircraft Aeroelasticity and Loads*, 2nd ed., Wiley, Chichester, 2015. 544 p.

4. Hodges, D. H., Pierce, G.A. *Introduction to*

Structural Dynamics and Aeroelasticity, 2nd ed., Cambridge University Press, Cambridge, 2011. 274 p.

5. Ricketts, R. H., Doggett, R. V. Jr. *Wind-tunnel experiments on divergence of forward-swept wings*, NASA Technical Paper 1685, National Aeronautics and Space Administration, Washington, 1980. Available at: <https://ntrs.nasa.gov/citations/19800020786> (accessed 04 May 2026).

6. Tian, W., Yang, Z., Gu, Y., Ouyang, Y. Aeroelastic tailoring of a composite forward-swept wing using a novel hybrid pattern search method, *Journal of Aerospace Engineering*, 2016, vol. 29, iss. 6. 12 p. DOI: 10.1061/(ASCE)AS.1943-5525.0000652.

7. Azzara, R., Filippi, M., Petrolo, M., Ricci, R., Zecchin, G. Improved aeroelastic analysis framework to assess shear and cross-section deformability effects on static aeroelastic response, *Proceedings of the Institution of Mechanical Engineers, Part G: Journal of Aerospace Engineering*, 2026. 18 p. DOI: 10.1177/09544100261437337.

8. Yu, F., Saez, C. S., Hornung, M. A multi-fidelity aeroelastic toolchain: from UAVs to hydrogen transport aircraft. *Aerospace*, 2026, vol. 13, iss. 3. 25 p. DOI: 10.3390/aerospace13030286.

9. Reinbold, C., Breitsamter, C., Sørensen, K. Aerodynamic and static aeroelastic analysis of a high-agility aircraft, *Journal of Aircraft*, 2026, pp. 1–15. DOI: 10.2514/1.C038409.

10. Sacchi, F., Sneddon, J., Healy, F., Rezgui, D., Cooper, J., Wilson, T., Castrichini, A. Aeroelastic behaviour of forward-swept wings with flared folding wingtips, *AIAA Science and Technology Forum and Exposition, AIAA SciTech Forum 2026*, Orlando, 2026. 12 p. DOI: 10.2514/6.2026-1445.

11. Hrebenikov, O. H., Soboliev, O. O. Jet trainer aircraft wing sweep angle influence analysis on the characteristics of static aeroelasticity, *Open Information and Computer Integrated Technologies*, 2024, no. 100, pp. 4–22. DOI: 10.32620/oikit.2024.100.01.

12. Fazelzadeh, S. A., Rezaei, M., Mazidi, A. Aeroelastic analysis of swept pre-twisted wings. *Journal of Fluids and Structures*, 2020, vol. 95. 15 p. DOI: 10.1016/j.jfluidstructs.2020.103001.

13. Amoozgar, M. R., Fazelzadeh, S. A., Haddad Khodaparast, H., Friswell, M. I., Cooper, J. E. Aeroelastic stability analysis of aircraft wings with initial curvature. *Aerospace Science and Technology*, 2020, vol. 107. 10 p. DOI: 10.1016/j.ast.2020.106241.

14. Ajaj, R. M., Parancheerivilakkathil, M. S., Amoozgar, M. R., Friswell, M. I., Cantwell, W. J. Recent developments in the aeroelasticity of morphing aircraft. *Progress in Aerospace Sciences*, 2021, vol. 120. 47 p. DOI: 10.1016/j.paerosci.2020.100682.

15. Syed, A. A., Moshtaghzadeh, M., Hodges, D. H., Mardanpour, P. Aeroelasticity of flying-wing aircraft subject to morphing: a stability study. *AIAA Journal*, 2022, vol. 60, iss. 9. P. 5372–5385. DOI: 10.2514/1.J061574.

16. Campagna, D., Gulizzi, V., Benedetti, I. A DG–VLM framework for computational static aeroelastic

analysis of composite wings. *Composite Structures*, 2025, vol. 353. 13 p. DOI: 10.1016/j.compstruct.2024.118697.

17. Nieto Gómez, M., Chimenó Manguán, M. On the definition and location of the aeroelastic typical section in swept wings. *Aerospace*, 2025, vol. 12, iss. 9. 13 p. DOI: 10.3390/aerospace12090783.

18. Mathur, H., Huang, E., Dowell, E. H. Experimental study of aeroelastic divergence. *AIAA Journal*, 2026, vol. 64, iss. 5, pp. 2988–2993. DOI: 10.2514/1.J066300.

19. Havaza, O., Sukhov, V., Nikitin, R. Mathematical method for prediction aeroelastic phenomena and multidisciplinary optimization lifting surfaces of flight vehicle at preliminary stage design. *International Forum on Aeroelasticity and Structural*

Dynamics IFASD 2024, The Hague, paper IFASD-2024-235. Available at: https://conf.ifasd2024.nl/proceedings/display_manuscript/235.htm (accessed 01 April 2026).

20. Balabanov, I. V., Balabanova, T. V., Havaza, O. I. Methods of calculating the aircraft wing characteristics with the influence of aeroelasticity. *Mechanics of Gyroscopic Systems*, 2015, no. 29, pp. 63–76. DOI: 10.20535/0203-377129201563837.

21. Balabanov, I. V., Balabanova, T. V. Nodal condensation method for calculating elastic spatial systems. *Analitichna Mekhanika ta Yii Zastosuvannia: Zbirnyk Prats Instytutu Matematyky NAN Ukrainy* [Analytical mechanics and its applications. Transactions of Institute of Mathematics of NAS of Ukraine], 2012, vol. 9, iss. 1, pp. 11–37.

*Надійшла до редакції 15.05.2026, отримано в доопрацьованому вигляді 29.07.2026,
Дата ухвалення 17.08.2026, дата публікації 26.08.2026*

INVESTIGATION OF THE INFLUENCE OF WING SWEEP ON THE CRITICAL DIVERGENCE SPEED USING THE FINITE-ELEMENT LINEAR APPROXIMATION METHOD

Oleh Havaza, Dmytro Konotop

The **subject matter** of the article is this influence of wing sweep on the critical divergence speed as one of the principal indicators of the static aeroelastic stability of an aircraft lifting surface. The **goal** of the article is to determine the qualitative and quantitative effects of backward and forward sweep on the critical divergence speed using the finite-element linear approximation method. To achieve this, the following **tasks** were addressed: to construct a simplified two-element wing model in which the planform geometry is represented by the parameter of relative displacement of the elastic axes; to express the stiffness matrices, aerodynamic influence matrices and coordinate transformation matrices in a single global coordinate system; to obtain the characteristic divergence equation after applying the nodal condensation method; to analyze three representative cases corresponding to swept, unswept and forward-swept wings; and to compare the resulting critical speeds in a relative form. The **methods** used are based on finite-element linear approximation, matrix representation of elastic and aerodynamic operators, transformation of local elastic and aerodynamic operators into a common global coordinate system and an analytical solution of the characteristic equation. The following **results** were obtained. It was shown that a positive relative displacement of the elastic axes, which corresponds to a swept wing, increases the critical divergence speed in comparison with a straight wing. For the unswept wing, the relative divergence speed is approximately 0.618 of the maximum value, whereas for the forward-swept wing this value decreases to 0.560, 0.518 and 0.484 depending on the magnitude of the negative displacement. **Conclusions.** The proposed two-element model enables clear tracing of the relationship between the sweep parameter and the condition for static aeroelastic instability. The **scientific novelty** consists in using a compact finite-element linear model for a preliminary analytical assessment of the influence of wing planform geometry on the critical divergence speed, which serves as a valuable tool at the early stages of aircraft design.

Keywords: swept wing; forward-swept wing; aeroelasticity; wing divergence; critical divergence speed; finite-element linear approximation; nodal condensation.

Олег Гаваза – аспірант третього року навчання кафедри авіа- та ракетобудування НН ІАТ КПІ ім. Ігоря Сікорського, Київ, Україна.

Дмитро Конотоп – кандидат технічних наук, доцент кафедри авіа- та ракетобудування НН ІАТ КПІ ім. Ігоря Сікорського (за сумісництвом), Київ, Україна.

Oleh Havaza – Third year PhD Student of the Department of Aviation and Rocket Engineering of ES IAT of National Technical University of Ukraine "Igor Sikorsky Kyiv Polytechnic Institute", Kyiv, Ukraine, email: o.gavaza@kpi.ua, ORCID: 0000-0002-7956-695X.

Dmytro Konotop – Associate Professor at the Department of Aviation and Rocket Engineering of ES IAT of National Technical University of Ukraine "Igor Sikorsky Kyiv Polytechnic Institute", Kyiv, Ukraine, email: konotop.dmitriy@gmail.com, ORCID: 0000-0001-6989-5277, Scopus Author ID: 55635484800.