ISSN 1814-4225 (print)
ISSN 2663-2012 (online)

УДК 517.9; 519.6; 533.6 **doi: 10.32620/aktt.2025.4.02**

Ю. О. КРАШАНИЦЯ

Національниий аерокосмічний університет «Харківський авіаційний інститут», Харків, Україна

МЕТОД ГРАНИЧНИХ ІНТЕГРАЛЬНИХ РІВНЯНЬ В НЕЛІНІЙНИХ КРАЙОВИХ ЗАДАЧАХ ДИНАМІКИ В'ЯЗКОГО ГАЗУ

***Предметом дослідження** є математична модель процесів обтікання несучих систем задовільної просторової форми потоком в'язкого газу. Більш ніж півтори століття виконуються дослідження система диференціальйних рівнянь у частинних похідних законів збереження механіки рідин та газів, відомої як система рівнянь Навьє-Стокса, в силу своєї нелінійності до дійсного часу не набула того розвитку, який би гарантував умови існування та єдиності розв'язків. Саме з цієї нагоди викликає багато питань та непорозумінь щодо розв'язків початково-крайових задач, насамперед, аерогідродинаміки за допомогою широко розповсюджених пакетів прикладних програм, побудованих на базі скінченно-різницевих підходів. **Метою статті** є розробка альтернативного методу граничних інтегральних рівнянь, який в силу граничних умов обтікання/протікання суцільного середовища призводить до системи лінійних граничних інтегральних рівнянь з наявною єдиністю розв'язків. **Завдання**: побудова інтегральних представлень розв'язків системи диференціальних рівнянь законів збереження методом узагальненої теорії потенціалу для диференціальних операторів консервативних форм рівнянь відповідних законів збереження маси, завихорності та імпульсу. **Наукова новизна.** Розвинуно та узагальнено диференціальні операції векторно-тензорного аналізу. Доведено узагальнені інтегральні теореми для диференціальних операторів другого порядку адекватних законам збереження. **Отримані результати**. На основі створеного узагальненого апарату векторно-тензорного аналізу побудовано інтегральні представлення основних динамічних та кінематичних характеристик задачі обтікання несучих систем задовільної просторової форми потоком в'язкого газу. Одержані граничними переходами відповідні граничні інтегральні рівняння коректно алгоритмизуються та пристосовані до зручної числової реалізації. **Висновки**. Крайова задача обтікання тілесних несучих систем потоком в'язкого газу приведена до системи лінійних, завдяки фізичним крайовим умовам, граничних інтегральних рівнянь, які мають єдині розв'язки, відносно кінематичних та динамічних характеристик задачі. Окрім того, вперше доведено, що всі характеристики залежать від, вперше одержаного, безвихорного векторного потенціалу імпульса, що суттєво спрощує інегральні представлення розв'язків та їх числову реалізацію.*

***Ключові слова**: закони збереження механіки суцільних середовищ; узагальнений векторно-тензорний аналіз; векторний потенціал; граничні інтегральні рівняння; аеро- та газодинамічні характеристики.*

Вступ

Багаторічні дослідження система диференціальйних рівнянь у частинних похідних законів збереження механіки рідин та газів, відомої як система рівнянь Навьє-Стокса [1], в силу своєї нелінійності до дійсного часу не набула того розвитку, який би гарантував умови існування та єдиності розв'язків [2, 3].В останні роки, перш за все, в механіці рідин і газів, в аерогідродинаміці спостерігалося значне розширення використання арсеналу математичних засобів [2, 3]. Поряд з удосконаленням класичних методів аналізу, таких як теорія функцій комплексної змінної, теорія лінійних рівнянь у частинних похідних усіх типів, популярним виявився апарат математичного аналізу, такий як метод граничних інтегральних рівнянь [4, 5], що дозволяє досліджувати нелінійні початково-крайові задачі, також аерогідродинаміки. Але впровадження цього апарату призвело до значного поширення та розвитку класичного векторно-тензорного аналізу [6]. Йдеться про суттєве узагальнення відомих диференціальних операцій векторно-тензорного аналізу, а також побудову та доведення відповідних інтегральних теорем, що забезпечують інтегральні представлення розв'язків основної системи диференціальних рівнянь у частинних похідних Нав'є-Стокса.

В даний час для вирішення актуальних задач аерогідродинаміки широко застосовуються різноманітні методи наближеного розв'язку крайових задач у вигляді диференціальних форм математичних моделей. Їх загальними недоліками є громоздкість та непередбачуваність результатів, високі вимоги до обчислювальних ресурсів і, як наслідок, складність вирішення задач оптимізації та економічної доцільності [7]. Особливо слід зазначити, що дотепер не розроблено якісних методів розв'язання системи нелінійних диференціальних рівнянь законів збереження механіки рідин і газів. Крім того, ні існування, ні єдинність розв’язків таких систем не доведені [2], що викликає багато питань щодо відповідності отриманих таким чином розв’язків досліджуваним фізичним процесам. Саме з цієї нагоди, відбуваються пошуки тих моделей, які дозволяють коректно застосовувати існуючи числові методи. Значних зусиль сучасні дослiджувачі спрямовують на побудову різноманітних моделей турбулентності, яких на сьогодення налічується більше 50, а пошук продовжується, але одержані результати бажають на краще [2, 3]. Тут вважається малоймовірним, щоб у рамках класичної механіки та аерогідродинаміці можна було побудувати розрахункову модель, однаково придатну для опису як турбулентних течій в'язких рідин, що стискуються, так і течій в'язко-пружних і пластичних твердих тіл. Уникнути цих проблем можна за допомогою точних або наближених аналітичних залежностей, які дозволяють вирішити деякі актуальні задачі дослідження взаємодії в’язкого газу з несучими елементами як авіакосмічної техніки, так і інженерних конструкцій та споруд. Треба зазначити, що досить привабливі існуючі методи розрахунку аеродинамічних характеристик, засновані на ідеології математичної моделі руху ідеального середовища без в'язкої взаємодії, не відповідають реальним процесам і запитам практики.

В силу багатопараметричності і нелінійності основних задач механіки суцільних середовищ, разом з фізичним, отримав істотний розвиток обчислювальний експеримент. Значні досягнення слід зазначити в обчислювальному аналізі, особливо в числовій реалізації конкретних математичних моделей в механіці. У газовій динаміці значний прогрес досягнутий в механіці в'язкого газу [7], де враховуються фізико-хімічні процеси, що дозволяє визначати аеродинамічні характеристики в трансзвукових режимах польоту, створювати обчислювальні моделі в режимі реального часу. У динаміці в'язкого газу найбільша увага приділяється якісному методу характеризації початково-крайових задач. Слід зауважити, що проблеми розв'язання початково-крайових задач призводять до утворення нових математичних моделей задач течії в'язкого газу при малих і середніх числах Рейнольдса. Такі проблеми займають провідне місце в областях природознавства і екології. У аеродинаміці дослідження проблеми підвищення ефективності авіаційної техніки і транспорту спрямовані на забезпечення виконання техніко-економічних вимог з урахуванням безпечної експлуатації. Вирішення цієї проблеми пов'язане з теоретичними і експериментальними дослідженнями відповідних аерогідродинамічних характеристик з обґрунтуванням існуючих і нових принципів утворення сил і управління ними. Зокрема, в аеродинаміці складних несучих систем отримані розподілені і сумарні аеродинамічні характеристики для двух- і тривимірних форм за допомогою методу граничних інтегральних рівнянь і варіантів його числової реалізації [6]. Окрім цього, в науковій літературі широко висвітлені процеси, що викликають розділення потоку, формування і стійкість вихрових структур. Це призводить до необхідності проводити значні теоретичні і експериментальні дослідження для ефективних поновлюваних джерел енергії, таких як повітряні, що самозапускаються, і гідротурбіни для різних рівнів потужностей.

1. Закони збереження як математична модель механіки суцільних середовищ

Найбільш надійною і перевіреною математичною моделлю в'язкого газу, заснованою на фундаментальних законах фізики, є початково-крайова задача для системи диференціальних рівнянь у частинних похідних, вперше опублікована в сучасній формі Дж. Максвеллом [1]. Пошук розв'язків початково-крайової задачі Нав'є-Стокса для системи диференціальних рівнянь з частинними похідними є важливою і складною задачею прикладної математики та механіки. У той же час, наявність розв'язків даної задачі істотно змінить способи проведення гідро - і аеродинамічних експериментів, поліпшить якість розрахунків і підвищить достовірність результатів.

1.1. Узагальний апарат векторно-тензорного аналізу

Теоретичне вивчення фізичних процесів засновано на побудові несуперечливій фізичним законам відповідної математичної моделі. В механіці суцільних середовищ основним математичним апаратом є векторно-тезорний аналіз. Але поряд з існучими результатами в даному випадку виникає природна потреба в значному узагальненні класичних формул та теорем.

1.1.1. Диференціальні операції векторно-тензорного аналізу

Для подальшого розвитку методу граничних інтегральних рівнянь розв'язання крайових завдань динаміки в'язкого газу мають місце, доведені в [6], наступні узагальнені диференціальні операції векторно-тензорного аналізу у разі, коли функції φ та складові векторів **A**, **B**, **G** та тензора **Γ** мають необхідні диференціальні властивості у тривимірному фізичному просторі.

АВІАЦІЙНО-КОСМІЧНА ТЕХНІКА І ТЕХНОЛОГІЯ, 2025, № 4(204)
ISSN 1814-4225 (print)
ISSN 2663-2012 (online)

На початку треба ввести в розгляд стандартну тензорну одиницю, яка у декартовому базисі має вигляд:

$$\mathbf{I}=\begin{vmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{vmatrix}=\mathbf{ii}+\mathbf{jj}+\mathbf{kk}\,, \qquad (1.1)$$

а також тензорні оператори: градієнта вектора **G**

$$\nabla\mathbf{G}=\mathbf{i}\frac{\partial\mathbf{G}}{\partial x}+\mathbf{j}\frac{\partial\mathbf{G}}{\partial y}+\mathbf{k}\frac{\partial\mathbf{G}}{\partial z}, \qquad (1.2)$$

та його сполученого аналогу

$$\nabla^{*}\mathbf{G}=\mathbf{i}\nabla G_x+\mathbf{j}\nabla G_y+\mathbf{k}\nabla G_z. \qquad (1.3)$$

Тоді мають місце наступні або очевидні, або просто доказувані, але вкрай необхідні у подальшому узагальнені диференціальні формули векторно-тензорного аналізу:

$$(\nabla,(\mathbf{I}\varphi))=\nabla\varphi; \qquad (1.4_1)$$

$$[\nabla,\mathbf{I}\varphi]=[\mathbf{I},\nabla\varphi]; \qquad (1.4_2)$$

$$(\nabla,[\mathbf{I},\mathbf{G}])=[\nabla,\mathbf{G}]; \qquad (1.4_3)$$

$$\left[\nabla,\left[\mathbf{I},\mathbf{G}\right]\right]=\nabla^{*}\mathbf{G}-\mathbf{I}\left(\nabla,\mathbf{G}\right); \qquad (1.4_4)$$

$$\left[\mathbf{I},\left[\nabla,\mathbf{G}\right]\right]=\nabla^{*}\mathbf{G}-\nabla\mathbf{G}; \qquad (1.4_5)$$

де $[\nabla,\mathbf{G}]$ - звичайний вектор завихорності.

Таким чином, основна диференціальна формула класичного векторного аналізу набуває вигляду:

$$\nabla(\nabla,\mathbf{G})=\Delta\mathbf{G}+\left[\nabla,\left[\mathbf{G}\right]\right]= \\ =\left(\nabla,\left\{\nabla\mathbf{G}+\nabla^{*}\mathbf{G}-\nabla\mathbf{G}\right\}\right)=(\nabla,\nabla^{*}\mathbf{G}) \qquad (1.5)$$

З метою подальшого використання доцільно узагальнити деякі диференціальні операції з двома векторно-тензорними функціями, які дещо відрізняються від класичних завдяки можливої присутності тензора **B**:

$$\nabla\left(\mathbf{A},\mathbf{B}\right)=\left(\nabla\mathbf{A},\mathbf{B}\right)+\left(\mathbf{A},\nabla^{*}\mathbf{B}\right); \qquad (1.6)$$

$$\left[\nabla,\left[\mathbf{A},\mathbf{B}\right]\right]=\left(\left(\nabla^{*}A\right),\mathbf{B}\right)-\left(\nabla,\mathbf{A}\right)\mathbf{B}- \\ -\left(\mathbf{A},\nabla\mathbf{B}\right)+\mathbf{A}\left(\nabla,\mathbf{B}\right)=\left(\left[\nabla,\left[\mathbf{I},\mathbf{A}\right]\right],\mathbf{B}\right)- \qquad (1.7) \\ -\left(\mathbf{A},\left[\nabla,\left[\mathbf{I},\mathbf{B}\right]\right]\right)+\left[\mathbf{A},\left[\nabla,\mathbf{B}\right]\right];$$

також із метою подальшого застосування в інтегральних теоремах із (1.7) маємо:

$$\mathbf{n},\left[\nabla,\ \mathbf{A},\mathbf{B}\right]\ = \\ =\ \mathbf{n},\ \left[\nabla,\ \mathbf{I},\mathbf{A}\right],\mathbf{B}\ -\ \mathbf{A},\ \text{n},\ \left[\nabla,\ \mathbf{I},\mathbf{B}\right]\ \ . \qquad (1.8)$$

$$\left[\mathbf{n},\nabla\left(\mathbf{A},\mathbf{B}\right)\right]=\left(\left[\mathbf{n},\nabla\mathbf{A}\right],\mathbf{B}\right)+\left(\left[\mathbf{n},\nabla\mathbf{B}\right],\mathbf{A}\right). \qquad (1.9)$$

1.1.2. Узагальнені інтегральні теореми векторно-тензорного аналізу

Всі відомі інтегральні представлення розв'язків класичних крайових задач математичної фізики грунтуються на інтегральних теоремах векторного аналізу відомих як теореми Остроградського-Гауссв та Стокса-Гріна.

По-перше, теорема Остроградського-Гаусса

$$\iiint\limits_{(E)}\left(\nabla,\mathbf{A}\right)dE=\oiint\limits_{(\partial E)}\left(\mathbf{n},\mathbf{A}\right)dS. \qquad (1.10_1)$$

з використанням формул (1.4), може бути застосована у декількох видах з урахуванням алгебраїчних дій з тензорними функціями:

$$\iiint\limits_{(E)}\nabla\varphi dE=\iiint\limits_{(E)}\left(\nabla,\mathbf{I}\varphi\right)dE=\oiint\limits_{(\partial E)}\mathbf{n}\varphi dS; \qquad (1.10_2)$$

$$\iiint\limits_{(E)}\left[\nabla,\mathbf{A}\right]dE=\oiint\limits_{(\partial E)}\left[\mathbf{n},\mathbf{A}\right]dS. \qquad (1.10_3)$$

$$\iiint\limits_{(E)}\nabla\left(\mathbf{A},\mathbf{B}\right)dE= \\ =\iiint\limits_{(E)}\left(\nabla,\mathbf{I}\left(\mathbf{A},\mathbf{B}\right)\right)dE=\oiint\limits_{(\partial E)}\mathbf{n}\left(\mathbf{A},\mathbf{B}\right)dS; \qquad (1.10_4)$$

$$\iiint\limits_{(E)}\left[\nabla,\left[\mathbf{A},\mathbf{B}\right]\right]dE=\iiint\limits_{(E)}\left[\nabla,\left[\mathbf{I},\left(\mathbf{A},\mathbf{B}\right)\right]\right]dE= \\ =\oiint\limits_{(\partial E)}\left[\mathbf{n},\left[\mathbf{A},\mathbf{B}\right]\right]dS=\oiint\limits_{(\partial E)}\left\{\mathbf{A}\left(\mathbf{n},\mathbf{B}\right)-\left(\mathbf{n},\mathbf{A}\right)\mathbf{B}\right\}dS.$$

(1.10_5)

І нарешті маємо наступні узагальнення класичної теореми Остроградського-Гаусса, пов’язані з самосполученими диференціальними операторами другого порядку:

$$\iiint\limits_{(E)}\left\{\left(\mathbf{B}^{*},\nabla\left(\nabla,\mathbf{A}\right)\right)-\left(\mathbf{A},\nabla\left(\nabla,\mathbf{B}\right)\right)\right\}dE= \\ =\iiint\limits_{(E)}\left(\nabla,\left\{\mathbf{B}\left(\nabla,\mathbf{A}\right)-\mathbf{A}\left(\nabla,\mathbf{B}\right)\right\}\right)dE=$$

$$= \oint\!\!\oint_{(\partial E)} \left\{ (\nabla, \mathbf{A})(\mathbf{n}, \mathbf{B}) - (\mathbf{n}, \mathbf{A})(\nabla, \mathbf{B}) \right\} dS. \quad (1.11)$$

$$\iiint_{(E)} \left\{ \left(\left[\nabla, [\nabla, \mathbf{A}] \right], \mathbf{B} \right) - \left(\mathbf{A}, \left[\nabla, [\nabla, \mathbf{B}] \right] \right) \right\} dE =$$

$$= \iiint_{(E)} \left(\nabla, \left\{ \left[\mathbf{A}, [\nabla, \mathbf{B}] \right] + \left[[\nabla, \mathbf{A}], \mathbf{B} \right] \right\} \right) dE =$$

$$= \oint\!\!\oint_{(\partial E)} \left\{ \left(\left[\mathbf{n}, [\nabla, \mathbf{A}] \right], \mathbf{B} \right) - \left(\mathbf{A}, \left[\mathbf{n}, [\nabla, \mathbf{B}] \right] \right) \right\} dS. \quad (1.12)$$

де тензор $\mathbf{B}^*$ - сполучений тензору $\mathbf{B}$.

Формула Стокса для векторно-тензорних виразів (1.6, 1.7,) набувають виглядів:

$$\iiint_{(E)} \left[\nabla, \nabla(\mathbf{A}, \mathbf{B}) \right] dS = \oint\!\!\oint_{(\partial E)} \left[\mathbf{n}, \nabla(\mathbf{A}, \mathbf{B}) \right] dS =$$

$$= \oint\!\!\oint_{(\partial E)} \left\{ \left([\mathbf{n}, \nabla \mathbf{A}], \mathbf{B} \right) + \left([\mathbf{n}, \nabla \mathbf{B}], \mathbf{A} \right) \right\} dS. \quad (1.13)$$

$$\oint\!\!\oint_{(\partial E)} \left(\mathbf{n}, \left[\left[\nabla, [\mathbf{A}, \mathbf{B}] \right] \right] \right) dS = \oint\!\!\oint_{(\partial E)} \left\{ \left(\mathbf{n}, \left\{ \nabla^* \mathbf{A} - \mathbf{I}(\nabla, \mathbf{A}) \right\} \right), \mathbf{B} \right\} -$$

$$- \left(\mathbf{A}, \left(\mathbf{n}, \left\{ \nabla^* \mathbf{B} - \mathbf{I}(\nabla, \mathbf{B}) \right\} \right) \right) \Big\} dS = \oint\!\!\oint_{(\partial E)} \left\{ \left(\left(\mathbf{n}, \left[\nabla, [\mathbf{I}, \mathbf{A}] \right] \right), \mathbf{B} \right) - \right.$$

$$\left. - \left(\left(\mathbf{n}, \left[\nabla, [\mathbf{I}, \mathbf{B}] \right] \right), \mathbf{A} \right) \right\} dS. \quad (1.14)$$

1.2. Консервативні форми законів збереження в динаміці в'язкого газу та векторний потенціал імпульсу

У науці є свої храми, над створенням яких працювало багато поколінь дослідників. Згодом деякі їх розділи розрослися і набули статусу канонічних; до них належить і теорія потенціалу. Але, не зважаючи на строгу будівлю класичної теорії, там і зараз є майстерні, де ведуться пошукові роботи. Направлені вони на створення методів, які відкривають шлях до вирішення проблем, які досі залишалися недоступними.

Теорія потенціалу є розділ математичної фізики, що розвинувся у зв'язку з теорією класичних крайових завач математичної фізики (рівняння Лапласа. теплопровідності, хвильове та інших). Очевидно, перший істотний етап був із вивченням потенційних течій ідеальної нестислової рідини. Набір таких течій виявився досить широким, а математичні можливості їх дослідження майже досконалими. Однак усі спроби усунення відомих парадоксів у межах теорії ідеальної нестислової рідини виявилися марними, що й довело недосконаліть цієї теорії.

Найбільш доведеною та апрбованою математичною моделлю механіки рідини та газу є система законів збереження у диференціальній формі, які містять закон збереження маси або ж рівняння нерозривності

$$(\nabla, \rho \mathbf{V}) = 0; \quad (\mathbf{V}, \nabla \rho) + \rho (\nabla, \mathbf{V}) = 0 \quad (1.15)$$

та закон збереження імпульсу

$$\left(\nabla, \left\{ \rho \mathbf{V}\mathbf{V} + \mathbf{I}p - \mathbf{T} \right\} \right) = 0, \quad (1.16)$$

де $\mathbf{T} = \{\tau_{ij}\}$ тензор швидкостей деформацій, елементи якого обчислюються за формулами:

$$\tau_{ii} = \frac{2\mu}{Re} \frac{\partial v_i}{\partial x_i} - \frac{2\mu}{3Re} (\nabla, \mathbf{V});$$

$$\tau_{ij} = \frac{\mu}{Re} \left(2 \frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \Omega_k \right); \Omega_k = \frac{\partial v_i}{\partial x_j} - \frac{\partial v_j}{\partial x_i}. \quad (1.17)$$

Система рівнянь (1.15 - 1.16) відома також як система рівнянь Нав'є-Стокса [1 - 3].

Цю систему доцільно доповнити очевидним, за визначенням, законом збереження завихорності:

$$(\nabla, \mathbf{\Omega}) = 0. \quad (1.18)$$

Закон збереження імпульсу (1.16) відображає консервативність тензора імпульсу

$$\mathbf{\Pi} = \rho \mathbf{V}\mathbf{V} + \mathbf{I} \left\{ p + \frac{2}{3} \frac{\mu}{Re} (\nabla, \mathbf{V}) \right\} - \frac{\mu}{Re} \left\{ \nabla \mathbf{V} + \nabla^* \mathbf{V} \right\}, \quad (1.19)$$

який натурально пов'язати з векторний потенціалом $\mathbf{\Psi}$

$$\mathbf{\Pi} = \left[\nabla, [\mathbf{I}, \mathbf{\Psi}] \right] = \nabla^* \mathbf{\Psi} - \mathbf{I}(\nabla, \mathbf{\Psi}), \quad (1.20)$$

з урахуванням виразу (1.4_4).

Симетричність тензора імпульсу (1.19): $\Pi_{ij} = \Pi_{ji}$ забезпечує безвихорність потенціалу $\mathbf{\Psi}$:

$$[\mathbf{i}, \mathbf{\Pi}_x] + [\mathbf{j}, \mathbf{\Pi}_y] + [\mathbf{k}, \mathbf{\Pi}_z] = \mathbf{i}(\Pi_{yz} - \Pi_{zy}) +$$
$$+ \mathbf{j}(\Pi_{zx} - \Pi_{xz}) + \mathbf{k}(\Pi_{xy} - \Pi_{yx}) = -[\nabla, \mathbf{\Psi}] = 0, \quad (1.21)$$

а його консервативність (1.16), з використанням (1.4_3)

$$(\nabla, \mathbf{\Pi}) = \Delta \mathbf{\Psi} - \nabla(\nabla, \mathbf{\Psi}) = -\left[\nabla, [\nabla, \mathbf{\Psi}] \right],$$

встановлює, так би мовити, закон збереження потенціалу імпульсу

$$\left[\nabla, [\nabla, \mathbf{\Psi}] \right] = 0. \quad (1.22)$$

ISSN 1814-4225 (print)
ISSN 2663-2012 (online)

Тут також відмітимо, що вираз

$$\left(\mathbf{i},\mathbf{\Pi}_x\right)+\left(\mathbf{j},\mathbf{\Pi}_y\right)+\left(\mathbf{k},\mathbf{\Pi}_z\right)=\rho V^2+3p=-2\left(\nabla,\mathbf{\Psi}\right),$$

доводить наступну властивість векторного потенціалу $\mathbf{\Psi}$:

$$\left(\nabla,\mathbf{\Psi}\right)=-\rho\frac{V^2}{2}-\frac{3}{2}p. \quad (1.23)$$

1.3. Фундаментальні розв'язки диференціальних операторів

Побудова інтегральних представлень розв'язків крайових задач механіки суцільних середовищ за допомогою інтегральних теорем векторно-тензорного аналізу грунтується на використуванні фундаментальних розв'язків відповідних диференціальних операторів, пов'язаних з вирішуємою задачею.

У зв'язку з тим, що інтегральні теореми (1.11, 1.12) перетверюють об'ємні інтеграли від комбінації операторів другого порядку у поверхневі, доцільно закони збереження (1.15, 1.16, 1.18) також розглядати в такому вигляді:

$$\nabla\left(\nabla,\mathbf{A}\right)=0,\quad \text{де}\ \mathbf{A}=\begin{cases}\rho\mathbf{V};\\ \mathbf{\Pi}_i\ (i=x,y,z);\\ \mathbf{\Omega}.\end{cases} \quad (1.24)$$

Закон збереження векторного потенціалу імпульсу (1.22) одержано у відповідній формі стосовно інтегральної теореми (1.12).

Уведемо в розгляд тензор $\mathbf{\Gamma}=\mathbf{I}\varphi-\left[\mathbf{I},\mathbf{G}\right]$ такий, що

$$\left(\nabla,\mathbf{\Gamma}\right)=0\Leftrightarrow\nabla\varphi=\left[\nabla,\mathbf{G}\right] \quad (1.25)$$

а

$$\left[\nabla,\mathbf{\Gamma}\right]=\left[\nabla,\mathbf{I}\varphi\right]-\left[\nabla,\left[\mathbf{I},\mathbf{G}\right]\right]=-\nabla\mathbf{G}+\mathbf{I}\left(\nabla,\mathbf{G}\right). \quad (1.26)$$

де $\varphi=\left(4\pi\left|\mathbf{x}-\mathbf{y}\right|\right)^{-1}$ - відомий фундаментальний розв'язок рівняння Лапласа, а вектор $\mathbf{G}$ саме й визначається рівнянням (1.25). Наприклад,

$$\mathbf{G}=\frac{\cos\theta\nabla\omega}{4\pi}=\frac{z}{4\pi\sqrt{x^2+y^2+z^2}}\nabla\mathrm{arctg}\frac{y}{x}; \quad (1.27)$$

$$\left[\nabla,\mathbf{G}\right]==-\frac{\mathbf{r}}{4\pi r^3}=\nabla\left(\frac{1}{4\pi\left|\mathbf{x}-\mathbf{y}\right|}\right),\quad \text{а}\ \left(\nabla,\mathbf{G}\right)=0$$

Застосовуючи оператор з (1.24) до тензору $\mathbf{\Gamma}$, за допомогою формул (1.4), послідовно одержуємо:

$$\nabla(\nabla,\mathbf{\Gamma}(|\mathbf{x}\text{-}\mathbf{y}|))=\nabla(\nabla,\mathbf{I}\varphi)-\nabla(\nabla,[\mathbf{I},\boldsymbol{G}])=$$
$$=\mathbf{I}\Delta\varphi+[\nabla,[\nabla,\mathbf{I}\varphi]]-[\mathbf{I},\Delta\boldsymbol{G}]-[\nabla,[\nabla,[\mathbf{I},\boldsymbol{G}]]]=$$
$$=\mathbf{I}\Delta\varphi+[\nabla,[\mathbf{I},\nabla\varphi]]-[\mathbf{I},\Delta\boldsymbol{G}]-[\nabla,(\nabla^*\mathbf{G}-\nabla\mathbf{G})=\mathbf{I}\Delta\varphi+$$
$$+[\nabla,\{\nabla^*\mathbf{G}-\mathbf{I}(\nabla,\mathbf{G})\}]-[\mathbf{I},\Delta\boldsymbol{G}]-[\nabla,(\nabla^*\mathbf{G})]=\mathbf{I}\Delta\varphi, \quad (1.28)$$

тобто тензор $\mathbf{\Gamma}$ відповідає умовам існування фундаментального розв'язку операторів збереження маси, імпульсу та завихорності.

Щодо оператора векторного потенціала імпульсу, то маємо:

$$\left[\nabla,\left[\nabla,\mathbf{\Gamma}\right]\right]=-\left[\nabla,\left\{\nabla\mathbf{G}-\mathbf{I}\left(\nabla,\mathbf{G}\right)\right\}\right]=0, \quad (1.29)$$

що доводить фундаментальність тензора $\mathbf{\Gamma}$ і у випадку оператора (1.22), якщо користуватися вектором з (1.27), саме для якого $\left(\nabla,\mathbf{G}\right)=0$.

Окрім цього, декартовим складовим тензору $\mathbf{\Gamma}$:

$$\begin{aligned}\mathbf{\Gamma}_x&=\mathbf{i}\varphi+\mathbf{j}G_z-\mathbf{k}G_y;\\ \mathbf{\Gamma}_y&=-\mathbf{i}G_z+\mathbf{j}\varphi+\mathbf{k}G_x;\\ \mathbf{\Gamma}_x&=\mathbf{i}G_y-\mathbf{j}G_x+\mathbf{k}\varphi,\end{aligned} \quad (1.30)$$

придатні наступні властивості ($\left(\nabla,\mathbf{G}\right)=0$):

$$\left(\nabla,\mathbf{\Gamma}_x\right)=2\frac{\partial\varphi}{\partial x};\left(\nabla,\mathbf{\Gamma}_x\right)=2\frac{\partial\varphi}{\partial y};\left(\nabla,\mathbf{\Gamma}_x\right)=2\frac{\partial\varphi}{\partial z}; \quad (1.31)$$

$$\begin{aligned}\left[\nabla,\mathbf{\Gamma}_x\right]&=\frac{\partial\mathbf{G}}{\partial x}-\left[\mathbf{i},\nabla\varphi\right]=2\frac{\partial\mathbf{G}}{\partial x}-\nabla^*G_x;\\ \left[\nabla,\mathbf{\Gamma}_y\right]&=\frac{\partial\mathbf{G}}{\partial y}-\left[\mathbf{j},\nabla\varphi\right]=2\frac{\partial\mathbf{G}}{\partial y}-\nabla^*G_y;\\ \left[\nabla,\mathbf{\Gamma}_z\right]&=\frac{\partial\mathbf{G}}{\partial z}-\left[\mathbf{k},\nabla\varphi\right]=2\frac{\partial\mathbf{G}}{\partial z}-\nabla^*G_z.\end{aligned} \quad (1.32)$$

2. Постановка крайової задачі обтікання несучих аеродинамічних систем задовільної просторової форми потоком в'язкого газу

Постановка крайових задач обтікання несучих аеродинамічних систем задовільної просторової форми потоком в'язкого газу формулюється для системи законв збереження механіки рідин та газів (1.15, 1.16) в наступному розгорнутому вигляді:

$$\left(\nabla,\rho\mathbf{V}\right)=\left(\mathbf{V},\nabla\rho\right)+\rho\left(\nabla,\mathbf{V}\right)=0. \quad (2.1)$$

$$\left(\nabla,\mathbf{\Pi}\right)=\rho\left(\mathbf{V},\nabla\mathbf{V}\right)+\nabla p-\frac{4\mu}{3Re}\nabla\left(\nabla,\mathbf{V}\right)+\frac{\mu}{Re}\left[\nabla,\mathbf{\Omega}\right]=0;$$

$$(\nabla,\mathbf{\Pi}_{x})=0;\quad \left(\nabla,\mathbf{\Pi}_{y}\right)=0;\quad (\nabla,\mathbf{\Pi}_{z})=0, \qquad (2.2)$$

де

$$\mathbf{\Pi}=\begin{cases}\rho\mathbf{VV}+\mathbf{I}\left\{p+\frac{2}{3}\frac{\mu}{Re}(\nabla,\mathbf{V})\right\}-2\frac{\mu}{Re}\nabla^{*}\mathbf{V}+\\ +\frac{\mu}{Re}[\mathbf{I},\mathbf{\Omega}]=[\nabla,[\mathbf{I},\mathbf{\Psi}]]=\nabla^{*}\mathbf{\Psi}-\mathbf{I}(\nabla,\mathbf{\Psi});\\ \rho\mathbf{VV}+\mathbf{I}\left\{p+\frac{2}{3}\frac{\mu}{Re}(\nabla,\mathbf{V})\right\}-2\frac{\mu}{Re}\nabla\mathbf{V}-\\ -\frac{\mu}{Re}[\mathbf{I},\mathbf{\Omega}]=\nabla\mathbf{\Psi}-\mathbf{I}(\nabla,\mathbf{\Psi});\end{cases} \qquad (2.3)$$

а

$$\begin{cases}\mathbf{\Pi}_{x}=\rho u\mathbf{V}+\mathbf{i}\left\{p+\frac{2}{3}\frac{\mu}{Re}(\nabla,\mathbf{V})\right\}-2\frac{\mu}{Re}\nabla V_{x}+\\ +\frac{\mu}{Re}[\mathbf{i},\mathbf{\Omega}]=-[\nabla,[\mathbf{i},\mathbf{\Psi}]];\\ \mathbf{\Pi}_{y}=\rho v\mathbf{V}+\mathbf{j}\left\{p+\frac{2}{3}\frac{\mu}{Re}(\nabla,\mathbf{V})\right\}-2\frac{\mu}{Re}\nabla V_{y}+\\ +\frac{\mu}{Re}[\mathbf{j},\mathbf{\Omega}]=-[\nabla,[\mathbf{j},\mathbf{\Psi}]];\\ \mathbf{\Pi}_{z}=\rho w\mathbf{V}+\mathbf{k}\left\{p+\frac{2}{3}\frac{\mu}{Re}(\nabla,\mathbf{V})\right\}-2\frac{\mu}{Re}\nabla V_{z}+\\ +\frac{\mu}{Re}[\mathbf{k},\mathbf{\Omega}]=-[\nabla,[\mathbf{k},\mathbf{\Psi}]];\end{cases} \qquad (2.4)$$

консервативні складові тензора імпульсу (1.19, 1.20), завдяки його симетричності ($\Pi_{ij}=\Pi_{ji}$). Розв'язання даної крайової задачі методом граничних інтегральних рівнянь коректно формулювати в межах контрольного об'єму (рис, 2.1) з розташуванням зовнішніх меж (Σ) на достатньому удаленні від несучої системи, де гарантована відсутність збурення потоку в'язкого газу.

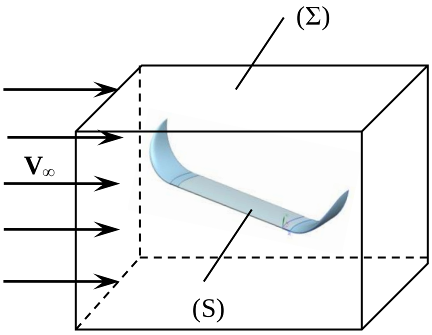

Рис. 2.1. Крило (S) у контрольній області, обмеженою поверхнею (Σ), під впливом набігаючого незбуреного потоку із швидкістю V∞

Як доведено багарічними фізичними експериментами, головною граничною умовою в крайових задачах обтікання непроникнених несучих систем є непрослизання повз поверхню (S) частин середовища, тобто

$$\mathbf{V}\big|_{(S)}=0;\quad \mathbf{V}\big|_{(\Sigma)}=\mathbf{V}_{\infty}=\mathrm{const}. \qquad (2.5)$$

а з (2.1) маємо

$$(\nabla,\mathbf{V})\big|_{(S)}=0. \qquad (2.6)$$

З метою визначення тензора імпульсу (1.19) на поверхні (S) з урахуванням (2.5, 2.6), розглянемо вектор завихорності $\mathbf{\Omega}$ у криволінійній ортогональній системі координат. (s, τ, n):

$$\mathbf{\Omega}(s,\tau,n)\big|=\frac{\mathbf{s}}{H_{\tau}H_{n}}\left\{\frac{\partial(H_{n}v_{n})}{\partial\tau}-\frac{\partial(H_{\tau}v_{\tau})}{\partial n}\right\}+$$
$$+\frac{\boldsymbol{\tau}}{H_{n}H_{s}}\left\{\frac{\partial(H_{s}v_{s})}{\partial n}-\frac{\partial(H_{n}v_{n})}{\partial s}\right\}+$$
$$+\frac{\mathbf{n}}{H_{s}H_{\tau}}\left\{\frac{\partial(H_{\tau}v_{\tau})}{\partial s}-\frac{\partial(H_{s}v_{s})}{\partial n}\right\}. \qquad (2.7)$$

На твердій непроникній поверхні (S), завдяки умові (2.5),

$$\mathbf{\Omega}\big|_{(S)}(s,\tau,n)=-\frac{\mathbf{s}}{H_{n}}\frac{\partial v_{\tau}}{\partial n}+\frac{\boldsymbol{\tau}}{H_{n}}\frac{\partial v_{s}}{\partial n}, \qquad (2.8)$$

а граничне значення має вигляд:

$$\mathbf{\Omega}_{n}\big|_{(S)}(s,\tau,n)=\frac{1}{H_{s}}\frac{\partial v_{\tau}}{\partial s}-\frac{1}{H_{\tau}}\frac{\partial v_{s}}{\partial\tau}=0. \qquad (2.9)$$

Таким чином, складові тензора імпульсу на поверхні тіла у криволінійних координатах мають вигляд:

$$\begin{cases}\mathbf{\Pi}_{s}\big|_{(S)}=\mathbf{s}p-\frac{\mu}{Re}\frac{\mathbf{n}}{H_{n}}\frac{\partial v_{s}}{\partial n};\\ \mathbf{\Pi}_{\tau}\big|_{(S)}=\boldsymbol{\tau}p-\frac{\mu}{Re}\frac{\mathbf{n}}{H_{n}}\frac{\partial v_{\tau}}{\partial n};\\ \mathbf{\Pi}_{n}\big|_{(S)}=\mathbf{n}p-\frac{\mu}{Re}\frac{\mathbf{s}}{H_{n}}\frac{\partial v_{s}}{\partial n}-\frac{\mu}{Re}\frac{\boldsymbol{\tau}}{H_{n}}\frac{\partial v_{\tau}}{\partial n},\end{cases} \qquad (2.10)$$

а декарта складова, наприклад, $\mathbf{\Pi}_{x}$ дорівнює:

$$\mathbf{\Pi}_{x}=\mathbf{i},\mathbf{s}\ \mathbf{\Pi}_{s}+\mathbf{i},\boldsymbol{\tau}\ \mathbf{\Pi}_{s\tau}+\mathbf{i},\mathbf{n}\ \mathbf{\Pi}_{n}. \qquad (2.11)$$

3. Інтегральні представлення розв'язків крайової задачі обтікання несучої системи потоком в'язкого газу

Метод граничних інтегральних рівнянь має низку безумовних переваг перед кінцево-різницевими

ISSN 1814-4225 (print)
ISSN 2663-2012 (online)

методами та методом кінцевих елементів. Саме тому в даний час даний метод з успіхом застосовується для вирішення складних інженерних задач: плоских та просторових, стаціонарних та залежних від часу [6, 8].

Метод інтегральних рівнянь або метод потенціалу для отримання розв'язання деяких диференціальних рівнянь у частинних похідних заснований на класичному аналізі. Останніми роками цей метод набув серйозного розвитку внаслідок істотних переваг перед класичними методами числової реалізації початково-крайових задач механіки, значною мірою затребуваних аерокосмічним комплексом розвинутих країн світу.

Суть методу граничних інтегральних рівнянь (ГІУ) вирішення задач математичної фізики полягає у зведенні крайової задачі для диференціальних рівнянь до інтегрального рівняння по межі області, внаслідок чого її розмірність задачі знижується на одиницю і з'являється можливість вирішувати складніші класи задач, ніж ті, що вирішуються іншими методами. Перевагою методу ГІУ є також те, що він дозволяє відразу визначати невідомі величини на межах, не обчислюючи їх по всій області. Крайові задачі з використанням інтегральних рівнянь дають можливість вирішувати складніші задачі як у плоскій, так і в об'ємній постановці. Тому знову відроджується інтерес до теорії потенціалу.

На жаль, в існуючих пакетах прикладних програм числові розв'язки нелінійної системи диференціальних законів збереження механіки суцільних середовищ базуються на скінченно-різницевих і скінченно-елементних підходах [7], незважаючи на те, що до теперішнього часу не доведені ні існування, ні єдиність розв'язку таких систем [2]. Запропонована в цьому дослідженні математична модель процесу обтікання несучої системи потоком в'язкого газу представлена лінійною системою граничних інтегральних рівнянь, для якої ці питання вирішуються також і передбачуваною збіжністю обчислювального процесу.

У зв'язку з вищевикладеним, проблема узагальнення та поширення методу граничних інтегральних рівнянь в крайових задачах газодинаміки і побудова алгоритмічних основ програмних засобів для реалізації даного методу є актуальним завданням.

3.1. Інтегральні представлення розв'язків диференціальних рівнянь консервативних законів збереження

З метою побудови інтегральних представлень розв'язків для рівнянь класу (1.24), скористаємося теоремою (1.11) при умові, що $\mathbf{B} \equiv \mathbf{\Gamma} = \mathrm{I}\varphi - [\mathrm{I}, \mathbf{G}]$. Тоді

$$\iiint\limits_{(E)} \left\{ \left(\mathbf{\Gamma}^*, \nabla(\nabla, \mathbf{A}) \right) - \left(\mathbf{A}, \nabla(\nabla, \mathbf{\Gamma}) \right) \right\} dE =$$
$$= \oint\!\!\!\oint\limits_{(\partial E)} \left\{ (\nabla, \mathbf{A})(\mathbf{n}, \mathbf{\Gamma}) - (\mathbf{n}, \mathbf{A})(\nabla, \mathbf{\Gamma}) \right\} dS,$$

а після тотожних перетворень, з урахуванням теорем (1.4), одержуємо:

$$\oint\!\!\!\oint\limits_{(\partial E)} \left\{ \left(\left([\mathbf{n}, [\nabla, \mathbf{A}]] + \left(\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial n} \right) \right), \mathbf{\Gamma} \right) - \right.$$
$$\left. - \left(\left(\mathbf{A}, [\mathbf{n}, [\nabla, \mathbf{\Gamma}]] \right) + \left(\mathbf{A}, \frac{\partial \mathbf{\Gamma}}{\partial n} \right) \right) \right\} dS \; = 0.$$

Звертаючи увагу на те, що $\frac{\partial \mathbf{\Gamma}}{\partial n} = \mathbf{I} \frac{\partial \varphi}{\partial n} - \left[\mathbf{I}, \frac{\partial \mathbf{G}}{\partial n} \right]$, та користуючись відомими властивостями потенціалу подвійного шару $\frac{\partial \varphi}{\partial n}$, після граничного переходу до точок поверхонь, маємо інтегральне представлення розв'язку рівнянь консервативних законів (1.24):

$$\mathbf{A} = \oint\!\!\!\oint\limits_{(\partial E)} \left\{ \left(\left([\mathbf{n}, [\nabla, \mathbf{A}]] + \left(\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial n} \right) \right), \mathbf{\Gamma} \right) - \right.$$
$$\left. - \left(\left(\mathbf{A}, [\mathbf{n}, [\nabla, \mathbf{\Gamma}]] \right) + \left(\mathbf{A}, \frac{\partial \mathbf{\Gamma}}{\partial n} \right) \right) \right\} dS. \tag{3.1}$$

Для подальшого коректного використання представлення (3.1), доведемо його консервативність:

$$\left(\nabla_x, \mathbf{A}(\mathbf{x}) \right) = \oint\!\!\!\oint\limits_{(S)} \left(\nabla_x, \left\{ \left(\left([\mathbf{n}, [\nabla, \mathbf{A}(\mathbf{y})]] + \right. \right. \right. \right.$$
$$\left. + \left(\frac{\partial \mathbf{A}(\mathbf{y})}{\partial n} \right) \right), \mathbf{\Gamma}(|x - \mathbf{y}|) \Bigg) -$$
$$- \left(\mathbf{A}(\mathbf{y}), \left\{ [\mathbf{n}, [\nabla, \mathbf{\Gamma}(|x - \mathbf{y}|)]] + \frac{\partial \mathbf{\Gamma}(|x - \mathbf{y}|)}{\partial n} \right\} \right) \Bigg\} \Bigg) dS. \tag{3.2}$$

Тут диференціювання інтегралу

$$\oint\!\!\!\oint\limits_{(S)} \left(\mathbf{A}(\mathbf{y}), [\mathbf{n}, [\nabla, \mathbf{\Gamma}(|\mathbf{x} - \mathbf{y}|)]] \right) dS$$

по зовнішній змінній $\mathbf{x}$ (див. (1.31))

$$\left(\nabla_x,\left(\left[\mathbf{n},\left[\nabla,\mathbf{A}(\mathbf{y})\right]\right]+\left(\frac{\partial\mathbf{A}(\mathbf{y})}{\partial n}\right)\right),\mathbf{\Gamma}(|x-\mathbf{y}|)\right)=$$

$$=2\left(\left[\mathbf{n},\left[\nabla,\mathbf{A}(\mathbf{y})\right]\right]+\left(\frac{\partial\mathbf{A}(\mathbf{y})}{\partial n}\right)\right)\nabla\varphi,$$

після інтегрування по частинах, завдяки консервативності вектора **G**, зникає, а

$$\left(\nabla_x,\left(\mathbf{A}(\mathbf{y}),\frac{\partial\mathbf{\Gamma}(|\mathbf{x-y}|)}{\partial n}\right)\right)=\left(\mathbf{A}(\mathbf{y}),\frac{\partial\nabla\varphi}{\partial n}\right)+$$

$$+\left(\mathbf{A}(\mathbf{y}),\frac{\partial[\nabla,\mathbf{G}]}{\partial n}\right)=2\left(\mathbf{A}(\mathbf{y}),(\mathbf{n},\nabla\nabla\varphi)\right).$$

$$\left[\nabla,\left[\mathbf{A},\nabla\varphi\right]\right]=\left(\left(\nabla^*A\right),\nabla\varphi\right)-(\nabla,\mathbf{A})\nabla\varphi-$$

$$-\left(\mathbf{A},\nabla\nabla\varphi\right)+\mathbf{A}\Delta\varphi;$$

$$\left(\mathbf{A},(\mathbf{n},\nabla\nabla\varphi)\right)=\left(\left(\mathbf{n},\left[\nabla,\left[\mathbf{I},\mathbf{A}\right]\right]\right),\nabla\varphi\right).$$

Таким чином доведено, що інтегральне представлення (3.1) є розв'язком крайової задачі для класу рівнянь (1.24), відповідних законам збереження (2.1, 2.2).

Одержаний вираз (3.1) дозволяє виписати інтегральне представлення розв'язку закону збереження маси (1.15):

$$\mathbf{V}=\oiint\limits_{(\partial E)}\left\{\left(\left(\left[\mathbf{n},[\nabla,\mathbf{V}]\right]+\left(\frac{\partial\mathbf{V}}{\partial n}\right)\right),\mathbf{\Gamma}\right)-\right.$$
$$\left.-\left(\left(\mathbf{V},\left[\mathbf{n},[\nabla,\mathbf{\Gamma}]\right]\right)+\left(\mathbf{V},\frac{\partial\mathbf{\Gamma}}{\partial n}\right)\right)\right\}dS, \tag{3.3}$$

де (див. (1.19) та умови (2.5 - 2.9))

$$\left[\mathbf{n},[\nabla,\mathbf{V}]\right]+\frac{\partial\mathbf{V}}{\partial n}=\frac{Re}{\mu}\left(\mathbf{n}\left\{\mathbf{I}p-\left[\nabla,[\mathbf{I},\mathbf{\Psi}]\right]\right\}\right)-\left[\mathbf{n},\Omega_s\right]. \tag{3.4}$$

Таким чином, представлення (3.2) набуває остаточного вигляду

$$\mathbf{V}=\oiint\limits_{(\partial E)}\left\{-\frac{Re}{4\mu}p(\mathbf{n},\mathbf{\Gamma})+\frac{1}{2}\left([\mathbf{n},\Omega],\mathbf{\Gamma}\right)-\right.$$
$$\left.-\frac{Re}{2\mu}\left(\frac{\partial\mathbf{\Psi}}{\partial n},\mathbf{\Gamma}\right)-\left(\mathbf{V},\frac{\partial\mathbf{\Gamma}}{\partial n}\right)\right\}dS. \tag{3.5}$$

Якщо, представленням (3.1) скористатися щодо вектора завихорності **Ω**, отримаємо

$$\mathbf{\Omega}=\oiint\limits_{(\partial E)}\left\{\left(\left(\left[\mathbf{n},[\nabla,\mathbf{\Omega}]\right]+\left(\frac{\partial\mathbf{\Omega}}{\partial n}\right)\right),\mathbf{\Gamma}\right)-\right.$$
$$\left.-\left(\left(\mathbf{\Omega},\left[\mathbf{n},[\nabla,\mathbf{\Gamma}]\right]\right)+\left(\mathbf{\Omega},\frac{\partial\mathbf{\Gamma}}{\partial n}\right)\right)\right\}dS. \tag{3.6}$$

Зв'язок вектора завихорності **Ω** з векторним потенціалом тензора імпульсу **П**, дозволяє ротація тензора імпульсу (1.20)

$$[\nabla,\mathbf{\Pi}]=[\nabla,\rho\mathbf{VV}]+\left[\mathbf{I},\nabla\left\{p+\frac{2}{3}\frac{\mu}{Re}(\nabla,\mathbf{V})\right\}\right]-$$
$$-\frac{\mu}{Re}\left\{\left[\mathbf{I},[\nabla,\mathbf{\Omega}]\right]+\nabla\mathbf{\Omega}\right\}=\left[\nabla,\left[\nabla,[\mathbf{I},\mathbf{\Psi}]\right]\right]. \tag{3.7}$$

Звідки маємо

$$\left[\mathbf{n},[\nabla,\mathbf{\Omega}]\right]+\left(\frac{\partial\mathbf{\Omega}}{\partial n}\right)=\left[\mathbf{n},\nabla\left\{\frac{Re}{\mu}p+\frac{2}{3}(\nabla,\mathbf{V})\right\}\right]+$$
$$+\left(\mathbf{n},\left[\nabla,\frac{Re}{\nu}\mathbf{VV}\right]\right)-\frac{Re}{\mu}\left(\mathbf{n},\left[\nabla,\left[\nabla,[\mathbf{I},\mathbf{\Psi}]\right]\right]\right). \tag{3.8}$$

Після відповідних інтегрувань у (3.5) по частинах одержуємо остаточний вираз інтегрального представлення вектору завихорності **Ω**:

$$\mathbf{\Omega}=\oiint\limits_{(\partial E)}\left\{\frac{Re}{\mu}\frac{\partial p}{\partial n}\mathbf{G}-\frac{Re}{2\mu}\left([\mathbf{n},\nabla p],\mathbf{\Gamma}\right)-\left(\mathbf{\Omega},\frac{\partial\mathbf{\Gamma}}{\partial n}\right)\right\}dS. \tag{3.9}$$

Нарешті, за зразком (3.1), побудуємо інтегральне представлення тензора імпульсу **П** (1.19), яке натурально формулювати для векторних складових $\mathbf{\Pi}_i$ (i = x, y, z*)* (2.4)

$$\mathbf{\Pi}_i=\oiint\limits_{(\partial E)}\left\{\left(\left(\left[\mathbf{n},[\nabla,\mathbf{\Pi}_i]\right]+\left(\frac{\partial\mathbf{\Pi}_i}{\partial n}\right)\right),\mathbf{\Gamma}\right)-\right.$$
$$\left.-\left(\left(\mathbf{\Pi}_i,\left[\mathbf{n},[\nabla,\mathbf{\Gamma}]\right]\right)+\left(\mathbf{\Pi}_i,\frac{\partial\mathbf{\Gamma}}{\partial n}\right)\right)\right\}dS. \tag{3.10}$$

Тут також, існує зв'язок з вектором потенціалу імпульса (2.3), який дозволяє виконати перетворення за допомогою інтегрування по частинах та одержати остаточний результат, наприклад для вектора $\mathbf{\Pi}_{ч}$:

$$\mathbf{\Pi}_x=-\oiint\limits_{(\partial E)}\left\{\left(\left(\mathbf{n},\left[\nabla,\left[\mathbf{I},\left[\nabla[\mathbf{i},\mathbf{\Psi}]\right]\right]\right]\right),\mathbf{\Gamma}\right)-\right.$$
$$\left.-\left(\left(\mathbf{\Pi}_x,\left[\mathbf{n},[\nabla,\mathbf{\Gamma}]\right]\right)+\left(\mathbf{\Pi}_x,\frac{\partial\mathbf{\Gamma}}{\partial n}\right)\right)\right\}dS. \tag{3.11}$$

Для інтегрування по частинах першої складової

ISSN 1814-4225 (print)
ISSN 2663-2012 (online)

у (3.11) скористаємося варіантом формули Стокса, де (**AB**) — тензорна діада:

$$\oiint_{(\partial E)} \left(\mathbf{n},\left[\nabla,(\mathbf{AB})\right]\right) dS=$$

$$= \oiint_{(\partial E)} \left\{\left((\mathbf{n},[\nabla,\mathbf{A}]),\mathbf{B}\right)-\left(\mathbf{n},[\mathbf{B},\nabla\mathbf{A}]\right)\right\} dS.$$

Після очевидних перетворень, одержимо

$$\mathbf{\Pi}_x = \oiint_{(\partial E)} \left\{\left(\mathbf{\Pi}_x,\left(\mathbf{n},\nabla^*\mathbf{\Gamma}\right)\right)- -\frac{3}{2}\left(\mathbf{i},[\mathbf{n},\nabla p]\mathbf{G}\right)-\left(\mathbf{\Pi}_x,\frac{\partial\mathbf{\Gamma}}{\partial n}\right)\right\} dS. \quad (3.12)$$

Враховуючи аналогічний вигляд складових $\mathbf{\Pi}_y$та $\mathbf{\Pi}_z$ не складно побудувати загальне представлення тензора імпульсу

$$\mathbf{\Pi} = \oiint_{((dE))} \left\{\left(\mathbf{\Pi},\left(\mathbf{n},\nabla^*\mathbf{\Gamma}\right)\right)- -\frac{3}{2}\left(\mathbf{I},[\mathbf{n},\nabla p]\right)\mathbf{G}-\left(\mathbf{\Pi},\frac{\partial\mathbf{\Gamma}}{\partial n}\right)\right\} dS. \quad (3.13)$$

З метою побудови інтегрального представлення векторного потенціалу $\mathbf{\Psi}$, скористаємося теоремою Стокса (1.13)

$$\oiint_{(\partial E)} \left\{\left(\left[\mathbf{n},[\nabla,\mathbf{\Psi}]\right],\mathbf{\Gamma}\right)-\left(\mathbf{\Psi},\left[\mathbf{n},[\nabla,\mathbf{\Gamma}]\right]\right)\right\} dS = 0,$$

звідки після граничного переходу, маємо:

$$\mathbf{\Psi} = \oiint_{(\partial E)} \left\{\left(\frac{\partial\mathbf{\Psi}}{\partial n},\mathbf{\Gamma}\right)-(\mathbf{n},\mathbf{\Gamma})(\nabla,\mathbf{\Psi})-\left(\mathbf{\Psi},\frac{\partial\mathbf{\Gamma}}{\partial n}\right)\right\} dS. \quad (3.14)$$

Виконуючи перетворення відповідно (1.4_3, 1.4_4), інтегруванням по частинах за правилом (1.9) та зв'язком векторного потенціалу з тензором імпульсу **П** (1.20), а також потенційністю вектора **Ψ:** $\left[\mathbf{n},[\nabla,\mathbf{\Psi}]\right]=\left(\mathbf{n},\nabla^*\mathbf{\Psi}\right)-\frac{\partial\mathbf{\Psi}}{\partial n}=0$, одержимо:

$$\mathbf{\Psi} = \oiint_{(\partial E)} \left\{\left((\mathbf{n},\mathbf{\Pi}),\mathbf{\Gamma}\right)-\left(\mathbf{\Psi},\frac{\partial\mathbf{\Gamma}}{\partial n}\right)\right\} dS. \quad (3.15)$$

З урахуванням представлення (1.20), маємо остаточно

$$\mathbf{\Psi} = \oiint_{(\partial E)} \left\{p(\mathbf{n},\mathbf{\Gamma})-\frac{2\mu}{Re}\left(\frac{\partial\mathbf{V}}{\partial n},\mathbf{\Gamma}\right)- -\frac{\mu}{Re}\left([\mathbf{n},\mathbf{\Omega}],\mathbf{\Gamma}\right)-\left(\mathbf{\Psi},\frac{\partial\mathbf{\Gamma}}{\partial n}\right)\right\} dS. \quad (3.16)$$

Доведемо потенційність загального представлення (3.14), виконуючи диференціювання по зовнішній змінній, користуючись властивостями тензору **Г** (1.31 - 1.33) маємо послідовно:

$$[\nabla,\mathbf{\Psi}] = \oiint_{(S)} \left[\nabla,\left\{\left(\frac{\partial\mathbf{\Psi}}{\partial n},\mathbf{\Gamma}\right)-(\mathbf{n},\mathbf{\Gamma})(\nabla,\mathbf{\Psi})-\left(\mathbf{\Psi},\frac{\partial\mathbf{\Gamma}}{\partial n}\right)\right\}\right] dS =$$

$$= \oiint_{(S)} \left\{2\left(\frac{\partial\mathbf{\Psi}}{\partial n},\nabla\mathbf{G}\right)-\left(\frac{\partial\mathbf{\Psi}}{\partial n},\nabla^*\mathbf{G}\right)-\left(2\frac{\partial\mathbf{G}}{\partial n}- -\left(\mathbf{n},\nabla^*\mathbf{G}\right)\right)(\nabla,\mathbf{\Psi})-\left(\mathbf{\Psi},\frac{\partial}{\partial n}\left\{2\nabla\mathbf{G}-\nabla^*\mathbf{G}\right\}\right)\right\} dS.$$

Тут доцільно виконати інтегрування по частинах за допомогою теореми (1.15):

$$\oiint_{(S)} \left(\mathbf{n},[\nabla,[\mathbf{\Psi},\nabla\mathbf{G}]]\right) dS = \oiint_{(S)} \left\{\left(\left(\mathbf{n},\nabla^*\mathbf{\Psi}\right),\nabla\mathbf{G}\right)+ +(\mathbf{n},\mathbf{\Psi})\Delta\mathbf{G}-(\nabla,\mathbf{\Psi})\frac{\partial\mathbf{G}}{\partial n}-\left(\mathbf{\Psi},(\mathbf{n},\nabla)\nabla\mathbf{G}\right)\right\} dS = 0;$$

$$\oiint_{(S)} \left(\mathbf{n},\left[\nabla,\left[\mathbf{\Psi},\nabla^*\mathbf{G}\right]\right]\right) dS = \oiint_{(S)} \left\{\left(\left(\mathbf{n},\nabla^*\mathbf{\Psi}\right),\nabla^*\mathbf{G}\right)- -(\nabla,\mathbf{\Psi})\left(\mathbf{n},\nabla^*\mathbf{G}\right)+(\mathbf{n},\mathbf{\Psi})\nabla(\nabla,\mathbf{G})-\left(\mathbf{n},(\mathbf{\Psi},\nabla)\nabla^*\mathbf{G}\right)\right\} dS = 0.$$

Складові з виразами $\nabla(\nabla,\mathbf{G})$ та $\Delta\mathbf{G}=\nabla(\nabla,\mathbf{G})- -[\nabla,[\nabla,\mathbf{G}]]$ дорівнюють нулю, завдяки тому, що $(\nabla,\mathbf{G})=0$, а $[\nabla,\mathbf{G}]=\nabla\varphi$.

Отже, остаточно маємо

$$[\nabla,\mathbf{\Psi}] = \oiint_{(S)} \left\{\left([\mathbf{n},[\nabla,\mathbf{\Psi}]],\nabla^*\mathbf{G}\right)-2\left([\mathbf{n},[\nabla,\mathbf{\Psi}]],\nabla\mathbf{G}\right)\right\} dS,$$

що забезпечує існування єдиного розв'язку $[\nabla,\mathbf{\Psi}]=0$.

Висновки

Подано методологію створення коректного з математичної точки зору методу граничних інтегральних рівнянь вирішення початково-крайових задач динаміки в'язкого газу в практичному діапазоні критеріїв подібності на основі розвиненого апарату векторно-тензорного аналізу та сучасних методів математичної фізики.

Систематично досліджено інтегральні представлення розв'язків просторових нелінійних крайових задач динаміки в'язкого газу на базі математичної моделі – повної системи рівнянь Нав'є-Стокса. Обґрунтовано, що інтегральні представлення розв'язків – як аналітичні – можуть становити інтерес при оптимальному проектуванні транспортних засобів та інженерних споруд, а також з метою отримання екстремальних характеристик несучих систем аерокосмічної техніки.

Вперше виконано зведення просторових крайових задач динаміки в'язкого газу до системи адекватних граничних інтегральних рівнянь; досліджено диференціальні властивості ядер узагальнених потенціалів.

Наведено рекомендації щодо перспективного аерогідродинамічного проектування високонесучих систем транспортних засобів з оптимальними характеристиками.

Конфлікт інтересів

Автор декларує, що не має конфлікту інтересів стосовно даного дослідження, в тому числі фінансового, особистісного характеру, авторства чи іншого характеру, що міг би вплинути на дослідження та його результати, представлені в даній статті.

Фінансування

Дослідження проводилися без фінансової підтримки.

Доступність даних

Рукопис не має пов’язаних даних.

Використання засобів штучного інтелекту

Автор підтверджує, що не використовував технології штучного інтелекту при створенні представленої роботи.

Автор прочитав та погодився з опублікованою версією рукопису.

Література

1. Maxwell, J. C. On the dynamical theory of gases [Text] / J. C. Maxwell // Poc. Roy. Soc. Lond. – 1867. – Vol. XV. – P. 167-171. EUL: [The paper was printed in full in Phil. Trans. Roy. Soc. Lond. for the year 1867, 1868, vol. CLVII, pp. 49-88.]

2. Lemarie, P. G. The Navier–Stokes problem in the 21st century [Text] / P. G. Lemarie. – CRC Press. Taylor&Francis Group, 2016. – 718 p.

3. Galdi, G. P. An Introduction to the Mathematical Theory of the Navier–Stokes Equations [Text] / G. P. Galdi. – New York; Dordrecht; Heidelberg; London: Springer. – 2011. – 1018 p.

4. Shaw, R. P. Boundary-Integral Equation Method [Text] / R. P. Shaw // Computational Applications in Applied Mechanics; ed. T. A. Cruse, F. J. Rizso. ASME, 1975. – 346 p.

5. Hall, M. G. Computational Fluid Dynamics. A Revolutionary Force in Aerodynamics [Text] / M. G. Hall // AIAA. – Paper 81-1014, Palo-Alto, California. – 238 p.

6. Крашаница, Ю. А. Векторно-тензорный анализ, теория потенциала и метод граничных интегральных уравнений в начально-краевых задачах аэрогидродинамики [Текст] / Ю. А. Крашаница. – К. : Наук. думка, 2016. – 274 с.

7. Pletcher, R. H. Computational Fluid Mechanics and Heat Transfer [Text] / R. H. Pletcher, J. C. Tannehill, D. A. Anderson. – CRC Press Taylor&Francis Group, Boca Raton, London, New York. 2013. – 753 p.

8. Constanda, Ch. Boundary Integral Equation Methods and Numerical Solutions [Text] / Ch. Constanda, D. Doty, & W. Hamill. – New York : Dordrecht; Heidelberg; London : Springer, 2016. – 232 p.

References

1. Maxwell, J. C. On the dynamical theory of gases. *Poc. Roy. Soc. Lond.*, 1867, vol. XV, pp. 167-171. EUL: [The paper was printed in full in Phil. Trans. Roy. Soc. Lond. for the year 1867, 1868, vol. CLVII, pp. 49-88.]

2. Lemarie, P. G. *The Navier–Stokes problem in the 21st century*. CRC Press. Taylor&Francis Group, 2016. 718 p.

3. Galdi, G. P. *An Introduction to the Mathematical Theory of the Navier–Stokes Equations*. New York, Dordrecht; Heidelberg; London, Publ. Springer, 2011. 1018 p.

4. Shaw, R. P. Boundary-Integral Equation Method. *Computational Applications in Applied Mechanics*, ASME, 1975. 346 p.

5. Hall, M. G. Computational Fluid Dynamics. A Revolutionary Force in Aerodynamics. *AIAA*, Paper 81-1014, Palo-Alto, California. 238 p.

6. Krashanitsa Yu. A. *Vektorno-tenzornyy analiz, teoriya potentsiala i metod granichnykh integral'nykh uravneniy v nachal'no-krayevykh zadachakh aerogidrodinamiki* [Vector-tensor analysis, potential theory and the method of boundary integral equations in initial-boundary problems of aerohydrodynamics]. Kyiv, Publ. Nauk. dumka, 2016. 273 c. (In Russian)

ISSN 1814-4225 (print)
ISSN 2663-2012 (online)

7. Pletcher, R. H., Tannehill, J. C., & Anderson D. A. *Computational Fluid Mechanics and Heat Transfer*. CRC Press Taylor&Francis Group, Boca Raton, London, New York. 2013. 753 p.

8. Constanda, Ch., Doty, D., & Hamill, W. *Boundary Integral Equation Methods and Numerical Solutions*. New York; Dordrecht; Heidelberg; London: Springer, 2016. 232 p.

Надійшла до редакції 10.07.2025, розглянута на редколегії 18.08.2025

THE METHOD OF BOUNDARY INTEGRAL EQUATIONS IN NONLINEAR BOUNDARY BODY PROBLEMS OF VISCOUS GAS DYNAMICS

Yurii Krashanytsya

The subject of the research is a mathematical model of the processes of flow around carrying systems of arbitrary spatial shape by a viscous gas flow. For more than one and a half centuries, studies have been carried out on the system of partial differential equations of conservation laws in fluid and gas mechanics, known as the Navier-Stokes system of equations, and due to its non-linearity, to date has not seen the development that would guarantee the conditions for the existence and uniqueness of solutions. It is for this reason that many questions and misunderstandings arise regarding the solution of initial-boundary value problems, primarily in aerohydrodynamics, using widespread software packages built on the basis of finite-difference approaches. **The purpose of the article** is to develop an alternative method of boundary integral equations, which, due to the boundary conditions of flow past/with respect to a continuous medium, leads to a system of linear boundary integral equations with guaranteed uniqueness of solutions. **Problem**: construction of integral representations of solutions of a system of differential equations of conservation laws by the method of generalized potential theory for differential operators of conservative forms of equations of the corresponding conservation laws of mass, vorticity and momentum. **Scientific novelty**. Differential operations of vector-tensor analysis are developed and generalized. Generalized integral theorems for second-order differential operators adequate to conservation laws are proved. **Results**. Based on the created generalized apparatus of vector-tensor analysis, integral representations of the main dynamic and kinematic characteristics of the problem of viscous gas flow past load-bearing systems of arbitrary spatial shape are constructed. The corresponding boundary integral equations obtained by standard limit transform are correctly algorithmized and adapted to convenient numerical implementation. **Conclusions**. The boundary value problem of viscous gas flow past solid load-bearing systems is reduced to a system of linear equations, due to physical boundary conditions, boundary integral equations that have unique solutions with respect to the kinematic and dynamic characteristics of the problem. In addition, it is proven for the first time that all characteristics depend on the irrotational vector potential of momentum obtained for the first time, which significantly simplifies the integral representations of solutions and their numerical implementation.

Keywords: laws of conservation of mechanics of a continuous medium; viscous gas; generalized vector-tensor analysis; vector potential; boundary integral equations; aero- and gas-dynamic characteristics.

Крашаниця Юрій Олександрович – д-р техн. наук, проф., проф. каф. аерогідродинаміки, Національний аерокосмічний університет «Харківський авіаційний інститут», Харків, Україна

Yurii Krashanytsya – Dr. Tech. Sc., Professor, Professor at the Department of Aerohydrodynamics, National Aerospace University "Kharkiv Aviation Institute", Kharkiv, Ukraine,
e-mail: u.krashanitsa@khai.edu, ORCID: 0009-0006-5088-044X.