УДК 517.27 О.М. Прохорова, канд. физ.-мат. наук

О ВКЛАДЕ КИЕВСКОГО МАТЕМАТИКА М.Е. ВАЩЕНКО-ЗАХАРЧЕНКО В ТЕОРИЮ ЭКСТРЕМУМОВ ФУНКЦИЙ МНОГИХ ПЕРЕМЕННЫХ

Введение

Актуальность данной темы определяется тем, что методы решения задач на экстремум функций многих переменных, полученные в конце XIX – начале XX веков О. Коши, Ж.-Л. Лагранжем, К. Вейерштрассом, применяются в современных задачах оптимизации, сводящихся, например, к задачам математического программирования.

Это касается и задач оптимизации проектирования и конструирования летательных аппаратов [1], и задач безопасности различных систем.

Так, оптимизационная задача определения структуры и состава территориальных систем техногенной безопасности (ТСТБ), которым соответствует оптимальное значение критерия эффективности функционирования системы, имеет вид

$$(s^*,t^*) = arg\max_{s\in D} \Im(\Re(t), P(s,t), \omega(t), Z(s), s, t),$$

где D – множество допустимых вариантов состава ТСТБ, определяемое ресурсными и другими ограничениями задачи [2].

Здесь функционал

$$\Im(\Re(t), P(s,t), \omega(t), Z(s), s, t)$$

представляет собой динамическую векторную оценку эффективности ТСТБ.

Следовательно, указанная оптимизационная задача поставлена как прямая задача максимизации функционала качества системы.

Данная статья является продолжением исследований автора о развитии теории экстремумов функций многих переменных в XIX и XX веках [3, 4]. В них выяснен вклад О. Коши и К. Вейерштрасса в теорию экстремальных задач.

Следует отметить, что задачи на экстремум появились задолго до возникновения дифференциального исчисления как целостной науки. Собственно они были одними из предвестников этой науки. Сначала это были задачи на экстремум функции одной переменной. Они разрабатывались в русле теории функции одной действительной переменной. При распространении некоторых ее результатов на функции нескольких переменных сталкивались с существенными затруднениями. Между тем, для нужд математики, естествознания и техники более важным был именно случай нескольких переменных.

Особый интерес математиков к задачам на экстремум функций многих переменных наблюдается в конце XIX века с появлением соответствующего алгебраического аппарата, например теории квадратичных форм, а именно критерия Дж. Сильвестра положительной определенности квадратичных форм (1852).

Необходимостью теоретической разработки этого случая объясняется, по-видимому, тот факт, что крупные математики XIX столетия интересовались этим вопросом.

Важное место в этом процессе занимают отечественные математики. Вклад одного из них, Б.Я. Букреева, установлен и исследован в [5]. Об исследованиях профессора киевского университета М. Е. Ващенко-Захарченко пойдет речь в данной статье.

Постановка задачи исследования

Целью данной статьи является исследование работы М.Е. Ващенко-Захарченко «Признаки наибольшего и наименьшего значения функций» [6] (1867) с точки зрения теории квадратичных форм и сравнение его результатов с изложением данного вопроса в современных учебниках по высшей математике и математическому анализу. Метод исследования – историко-научный анализ первоисточника, позволяющий научные результаты, полученные в конце XIX – начале XX века, оценить с позиций современного математического анализа.

О М.Е. Ващенко-Захарченко

Михаил Егорович Ващенко-Захарченко (1825 – 1912) после окончания с серебряной медалью гимназии в Киеве поступил в Киевский университет на математическое отделение философского факультета. Через два года уезжает в Париж, где продолжает учебу в Сорбонне и Коллеж де Франс. Здесь он слушает лекции О. Коши, Ж.А. Серре и Ж. Лиувилля.

Он одним их первых отечественных математиков занялся разработкой символического исчисления. Его магистерская диссертация «Символическое исчисление и его приложение к интегрированию линейных дифференциальных уравнений» – одно из первых отечественных исследований по операционному исчислению. М.Е. Ващенко-Захарченко правильно оценил важность нового исчисления для дальнейшего развития математики. В то время многие думали, что символическое исчисление позволяет лишь более коротко получать уже известные результаты. В предисловии к своей магистерской диссертации он подчеркивал, что символическое исчисление не является сокращением, а такой же могущественный метод, инструмент для исследований, как и другие методы математического анализа. Эта работа и в настоящее время играет большую роль в математике и ее приложениях.

Профессуру он получил в 1867 году вскоре после защиты докторской диссертации «Риманова теория функций составного переменного». Это также одно из первых отечественных исследований по этому вопросу.

Важна была его работа по переводу «Начал» Евклида с «пояснениями и толкованиями» (1880). Другие его работы по истории математики были посвящены элементарной геометрии, истории аналитической геометрии, истории математики халдеев, индусов и других народов. Он написал также общий курс истории математики (1883), а также ряд руководств по математике («Элементарная геометрия в объеме четырехгодичного курса», «Краткий курс теории определителей», «Аналитическая геометрия и алгебраический анализ»).

М. Е. Ващенко-Захарченко работал в Киевском университете с 1868 по 1902 год. Он является одним из организаторов физико-математического общества в Киеве. Его учениками были знаменитые отечественные математики: уже упомянутый Б.Я. Букреев, и В.П. Ермаков.

Своими трудами и педагогической деятельностью М.Е. Ващенко-Захарченко оказал большое влияние на развитие отечественной математической культуры.

Исследование работы М.Е. Ващенко-Захарченко «Признаки наибольшего и наименьшего значения функций»

Статья «Признаки наибольшего и наименьшего значения функций» (написана в 1867 г., опубликована в 1868 г.) начинается с изложения основных понятий теории квадратичных форм. Сначала следует определение квадратичной формы сначала двух, а затем n переменных, которую он называет «видом». Такое название автор объясняет тем, что термин «форма» не удобен, так как его приходится часто употреблять в другом значении. В остальном его определения не отличаются от современных [7].

Затем М.Е. Ващенко-Захарченко утверждает, что любому виду

$$\begin{gathered} A_{11}t_1t_1 + A_{12}t_1t_2 + \ldots + A_{1n}t_1t_n + \\ +A_{21}t_2t_1 + A_{22}t_2t_2 + \ldots + A_{2n}t_2t_n + \\ \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ +A_{n1}t_nt_1 + A_{n2}t_nt_2 + \ldots + A_{nn}t_nt_n, \end{gathered} \tag{1}$$

где $A_{rs} = A_{sr}$ $(s = 1,2,\ldots,n;\, r = 1,2,\ldots,n)$, можно всегда придать следующую форму:

$$E_1X_1^2+E_2X_2^2+E_3X_3^2+...+E_nX_n^2,$$

где E_1, E_2, ..., E_n равны ±1, которую называет «канонической формой» данного вида [6, с. 219], в современной терминологии – нормальный вид данной квадратичной формы с действительными коэффициентами [7].

Призначной (discriminant) или определителем данного вида М.Е. Ващенко-Захарченко называет следующее выражение

$$\begin{vmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} & ... & A_{1n} \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} & ... & A_{2n} \\ A_{31} & A_{32} & A_{33} & ... & A_{3n} \\ . & . & . & . & . \\ A_{n1} & A_{n2} & A_{n3} & ... & A_{nn} \end{vmatrix}. \qquad (2)$$

«Призначная вида есть его неизменная (invariant), то есть такая функция коэффициентов вида, которая равна той же самой функции, составленной из коэффициентов вида, полученного из данного линейным преобразованием, или же равна той же самой функции, умноженной на коэффициенты, независящей от коэффициентов вида» [6, с. 219].

Исследования в этом направлении идут, как известно, от Ф. Гаусса [8]. В «Арифметических исследованиях» (1801 г.) Ф. Гаусс рассмотрел квадратичную форму

$$P=ax^2+2bxy+cy^2$$

при линейных преобразованиях неизвестных x и y:

$$x=\alpha x'+\beta y', \quad y=\gamma x'+\delta y'.$$

При этом преобразовании форма P примет вид

$$P'=a'x'^2+2b'x'y'+c'y'^2.$$

Гаусс находит такие величины, которые после преобразования не менялись бы или менялись определенным образом, и приходит, прежде всего, к детерминанту

$$D'=b'^2-a'c'=r^2D,$$

где $r=\alpha\delta-\beta\gamma, \quad D=b^2-ac$.

Аналогичные выкладки мы встречаем и у М.Е. Ващенко-Захарченко при доказательстве, что призначная

$$\begin{vmatrix} a & b \\ b & c \end{vmatrix}=ac-b^2,$$

есть неизменная вида $ax^2+2bxy+cy^2$. В самом деле, при линейном преобразовании данного вида

$$x=\lambda X+\mu Y,\quad y=\lambda_1 X+\mu_1 Y$$

получаем вид

$$AX^2+2BXY+CY^2, \tag{3}$$

где

$$A=a\lambda^2+2b\lambda\lambda_1+c\lambda_1^2,\quad C=a\mu^2+2b\mu\mu_1+c\mu_1^2,$$
$$B=a\lambda\mu+b(\lambda\mu_1+\lambda_1\mu)+c\lambda_1\mu_1.$$

Если эти величины подставить в признаčную вида (3) $AC-B^2$, то получим

$$AC-B^2=(\lambda\mu_1-\mu\lambda_1)^2(ac-b^2).$$

Далее он находит условия, при которых вид (1) для всех возможных значений переменных $t_1,t_2,\ldots,t_n$ будет всегда величиной положительной или отрицательной (то есть положительно или отрицательно определенной квадратичной формой). Это произойдет, когда в канонической форме записи данного вида все коэффициенты E_k $(k=1,2,\ldots,n)$ будут равны $+1$ или -1. В определении этих условий играет роль лишь определитель (2), а точнее, его главные миноры, которыми он называет следующие выражения: миноры первого порядка

$$A_{11},\ A_{22},\ A_{33},\ldots,\ A_{nn};$$

миноры второго порядка

$$\begin{vmatrix}A_{11} & A_{12}\\ A_{21} & A_{22}\end{vmatrix},\quad \begin{vmatrix}A_{11} & A_{13}\\ A_{31} & A_{33}\end{vmatrix},\quad \ldots,$$

$$\begin{vmatrix}A_{11} & A_{1n}\\ A_{n1} & A_{nn}\end{vmatrix},\quad \begin{vmatrix}A_{22} & A_{23}\\ A_{32} & A_{33}\end{vmatrix},\quad \ldots;$$

миноры третьего порядка

$$\begin{vmatrix}A_{11} & A_{12} & A_{13}\\ A_{21} & A_{22} & A_{23}\\ A_{31} & A_{32} & A_{33}\end{vmatrix},\quad \begin{vmatrix}A_{11} & A_{12} & A_{14}\\ A_{21} & A_{22} & A_{24}\\ A_{41} & A_{42} & A_{44}\end{vmatrix},\ldots$$

и так далее. Наконец, минором n-го порядка будет сам определитель (2).

Отсюда Ващенко-Захарченко выводит следующие необходимые и достаточные условия для того, чтобы $E_k = 1$ $(k = 1, 2, \ldots, n)$: все миноры первого, второго и т.д. порядков, включительно до n-го должны быть положительные; чтобы $E_k = -1$ $(k = 1, 2, \ldots, n)$ – все миноры четного порядка должны быть положительны, а нечетного – отрицательны.

После этого автор переходит к рассмотрению экстремумов функции n переменных $F(z_1, z_2, \ldots, z_n)$:

$$F(z_1, z_2, \ldots, z_n) \to extr\,?$$

Пусть $x_1, x_2, \ldots, x_n$ – одна из систем, удовлетворяющих уравнениям

$$\frac{\partial F}{\partial z_1} = 0, \quad \frac{\partial F}{\partial z_2} = 0, \ldots, \quad \frac{\partial F}{\partial z_n} = 0\,.$$

«Чтобы при этих значениях функция $F(z_1, z_2, \ldots, z_n)$ имела наибольшее или наименьшее значение необходимо, чтобы вид

$$\begin{gathered}
\frac{d^2F}{dx_1 dx_1} t_1 t_1 + \frac{d^2F}{dx_1 dx_2} t_1 t_2 + \frac{d^2F}{dx_1 dx_3} t_1 t_3 + \ldots + \frac{d^2F}{dx_1 dx_n} t_1 t_n + \\
+ \frac{d^2F}{dx_2 dx_1} t_2 t_1 + \frac{d^2F}{dx_2 dx_2} t_2 t_2 + \frac{d^2F}{dx_2 dx_3} t_2 t_3 + \ldots + \frac{d^2F}{dx_2 dx_n} t_2 t_n + \\
. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \\
\frac{d^2F}{dx_n dx_1} t_n t_1 + \frac{d^2F}{dx_n dx_2} t_n t_2 + \frac{d^2F}{dx_n dx_3} t_n t_3 + \ldots + \frac{d^2F}{dx_n dx_n} t_n t_n\,,
\end{gathered}$$

где $t_1, t_2, \ldots, t_n$ – приращения частных значений $x_1, x_2, \ldots, x_n$ соответственно, имел для всех возможных значений переменных $t_1, t_2, \ldots, t_n$ величину отрицательную или положительную». [6, с. 224].

(Величины

$$\frac{d^2F}{dx_i dx_j} \quad (i = 1, 2, \ldots, n;\ j = 1, 2, \ldots, n)$$

у Ващенко-Захарченко означают соответствующие частные производные.)

Условия для этого даются определителем

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial^2 F}{\partial x_1 \partial x_1} & \frac{\partial^2 F}{\partial x_1 \partial x_2} & \cdots & \frac{\partial^2 F}{\partial x_1 \partial x_n} \\ \frac{\partial^2 F}{\partial x_2 \partial x_1} & \frac{\partial^2 F}{\partial x_2 \partial x_2} & \cdots & \frac{\partial^2 F}{\partial x_2 \partial x_n} \\ . & . & . & . \\ \frac{\partial^2 F}{\partial x_n \partial x_1} & \frac{\partial^2 F}{\partial x_n \partial x_2} & \cdots & \frac{\partial^2 F}{\partial x_n \partial x_n} \end{vmatrix}$$

и его главными минорами, где производные берутся в точке $(x_1, x_2, ..., x_n)$.

В конце своей статьи Ващенко-Захарченко показывает на примерах функций двух и трех переменных применение полученного критерия. Для функций двух переменных $F(z_1, z_2)$ будет максимум в точке (x_1, x_2), если

$$\frac{\partial^2 F(x_1,x_2)}{\partial x_1{}^2} < 0, \quad \frac{\partial^2 F(x_1,x_2)}{\partial x_2{}^2} < 0,$$

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial^2 F(x_1,x_2)}{\partial x_1 \partial x_1} & \frac{\partial^2 F(x_1,x_2)}{\partial x_1 \partial x_2} \\ \frac{\partial^2 F(x_1,x_2)}{\partial x_2 \partial x_1} & \frac{\partial^2 F(x_1,x_2)}{\partial x_2 \partial x_2} \end{vmatrix} > 0,$$

минимум, если

$$\frac{\partial^2 F(x_1,x_2)}{\partial x_1{}^2} > 0, \quad \frac{\partial^2 F(x_1,x_2)}{\partial x_2{}^2} > 0,$$

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial^2 F(x_1,x_2)}{\partial x_1 \partial x_1} & \frac{\partial^2 F(x_1,x_2)}{\partial x_1 \partial x_2} \\ \frac{\partial^2 F(x_1,x_2)}{\partial x_2 \partial x_1} & \frac{\partial^2 F(x_1,x_2)}{\partial x_2 \partial x_2} \end{vmatrix} > 0.$$

Для функции трех переменных $F(z_1, z_2, z_3)$ «все главные миноры первого порядка

$$\frac{d^2F(x_1,x_2,x_3)}{dx_1^2},\quad \frac{d^2F(x_1,x_2,x_3)}{dx_2^2},\quad \frac{d^2F(x_1,x_2,x_3)}{dx_3^2}$$

должны быть меньше нуля, когда $F(z_1,z_2,z_3)$ имеет наибольшее значение, и больше нуля, если эта функция имеет наименьшее значение. Главные миноры второго порядка суть

$$\begin{vmatrix} \frac{d^2F(x_1,x_2,x_3)}{dx_1^2} & \frac{d^2F(x_1,x_2,x_3)}{dx_1dx_2} \\ \frac{d^2F(x_1,x_2,x_3)}{dx_2dx_1} & \frac{d^2F(x_1,x_2,x_3)}{dx_2dx_2} \end{vmatrix},$$

$$\begin{vmatrix} \frac{d^2F(x_1,x_2,x_3)}{dx_1^2} & \frac{d^2F(x_1,x_2,x_3)}{dx_1dx_3} \\ \frac{d^2F(x_1,x_2,x_3)}{dx_3dx_1} & \frac{d^2F(x_1,x_2,x_3)}{dx_3dx_3} \end{vmatrix},$$

$$\begin{vmatrix} \frac{d^2F(x_1,x_2,x_3)}{dx_2^2} & \frac{d^2F(x_1,x_2,x_3)}{dx_2dx_3} \\ \frac{d^2F(x_1,x_2,x_3)}{dx_3dx_2} & \frac{d^2F(x_1,x_2,x_3)}{dx_3dx_3} \end{vmatrix}$$

все они должны быть больше нуля как при наибольшем, так и при наименьшем значении функции $F(z_1,z_2,z_3)$. Наконец, сама призначная должна быть меньше при наибольшем и больше нуля при наименьшем значении функции» [6, с. 226].

Таким образом, все понятия, рассмотренные М.Е. Ващенко-Захарченко в этой статье, не только вполне идентичны современным [7], [9], но и входят в современные курсы математического анализа именно в таком виде.

Выводы

Исследованная статья М.Е. Ващенко-Захарченко «Признаки наибольшего и наименьшего значения функций» ранее в историко-математической литературе не упоминалась. Установлено, что, используя идеи и методы алгебры, Ващенко-Захарченко впервые сформулировал достаточные условия существования экстремума функции нескольких переменных с привлечением собственно критерия Сильвестра положительной (отрицательной) определенности квадратичных форм.

Наряду с исследованиями других математиков эти исследования способствовали дальнейшему развитию и усовершенствованию методов теории экстремумов функций многих переменных как составной части математического анализа.

Список использованных источников

1. Титов, М. Ю. Оптимизация магнитной системы СПД-70 путем максимизации градиента индукции магнитного поля [Текст] / М. Ю. Титов, А. В. Лоян // Вопросы проектирования и производства летательных аппаратов: сб. науч. тр. Нац. аэрокосм. ун-та им. Н.Е. Жуковского «ХАИ». – Вып. 1(89). – Х., 2017. – С. 83 – 85.

2. Попов, В. М. Механизм адаптивного управления программами развития территориальных систем техногенной безопасности [Текст] / В. М. Попов // Радіоелектронні і комп’ютерні системи. – 2015. – № 3(83). – С. 101 – 105.

3. Прохорова, О. М. Теория экстремумов функций многих переменных в учебнике О. Коши по дифференциальному исчислению [Текст] / О. М. Прохорова // Вісник ХНАУ. – 2014. – № 7. – С. 164 – 168.

4. Прохорова, О. М. О вкладе К. Вейерштрасса в теорию екстремумов функций многих переменных [Текст] / О. М. Прохорова // Радіоелектронні і комп’ютерні системи. – 2015. – № 3(73). – С. 125 – 128.

5. Прохорова, О. М. Задачи на экстремум в работах киевского математика Б.Я. Букреева [Текст] / О. М. Прохорова // Вопросы проектирования и производства летательных аппаратов: сб. науч. тр. Нац. аэрокосм. ун-та им. Н.Е. Жуковского «ХАИ». – Вып. 1(89). – Х., 2017. – С. 96 – 105.

6. Ващенко-Захарченко, М.Е. Признаки наибольшего и наименьшего значения функций [Текст] / М. Е. Ващенко-Захарченко // Математический сборник. – М.: Моск. ун-т, 1868. – Т.3. – С. 217 – 226.

7. Курош, А.Г. Курс высшей алгебры [Текст] / А. Г. Курош. – М.: Наука, 1975. – 431 с.

8. Математика XIX века. Математическая логика. Алгебра. Теория чисел. Теория вероятностей [Текст]. – М.: Наука, 1978. – 255 с.

9. Фихтенгольц, Г.М. [Текст] / Г. М. Фихтенгольц. – М.: Физматлит, 2001. – Т. 1. – 616 с.

Поступила в редакцию 22.01.2018.
Рецензент: д-р физ.-мат. наук, проф. А.Г. Николаев,
Национальный аэрокосмический университет
им. Н. Е. Жуковского «ХАИ», г. Харьков.