

НОВЫЙ МЕТОД ОПРЕДЕЛЕНИЯ ОБОБЩЕННЫХ СИЛОВЫХ ФАКТОРОВ И ПРОГИБОВ БАЛОК В СРЕДЕ ЦИФРОВЫХ ТЕХНОЛОГИЙ

Переход на повсеместное применение цифровых технологий является основной тенденцией развития и совершенствования методов расчета конструкций. Цифровые технологии оперируют числами, а не функциями, поэтому в численном виде следует представить внешние нагрузки (в виде дискретно расположенных сил и моментов). Тем более что методы испытания конструкций основаны на дискретизации нагрузок, например рычажная система нагружения агрегатов самолета в статзалах. Методы определения обобщенных силовых факторов (перерезывающих и осевых сил и изгибающих моментов) и перемещений базируются на расчетных манипуляциях с соответствующими силовыми факторами, например метод Мора, правило Верещагина, теорема Кастильяно и др. [1]. В среде цифровых технологий эти зависимости представляются в виде суммы дискретных величин, т.е. на основе суммирования бесконечно малых значений в математике введено понятие интеграла, который затем в механике опять дискретизируется. Аналогично поступают с производными. Возникающие трудности и неудобства можно устранить путем построения математических моделей, изначально учитывающих особенности и специфическую направленность цифровых технологий, как это ярко продемонстрировано методом конечных элементов. Ниже получены формулы для расчета перемещений балок и обобщенных силовых факторов, при выводе которых предполагалась максимальная реализация цифровых технологий.

Суть предлагаемого метода заключается в дискретизации балки на определенное количество участков, в пределах которых перемещения (прогибы) описываются через заданные аппроксимирующие функции. Согласно классической расчетной схеме для дальнейшего определения внешних силовых факторов функция прогиба должна быть дифференцируемой и непрерывной в пределах каждого участка, что обуславливает соответствующее членение балки по сечениям, в которых приложены сосредоточенные силы (рис. 1). В соответствии с принятыми допущениями прогиб каждого участка балки, рассматриваемого как консольно заделанный к концу предыдущего участка и нагруженного сосредоточенной силой Q_i , будет описываться полиномом третьего порядка:

$$w_i = a_i x^3 + b_i x^2 + c_i x + d_i, \quad (1)$$

где коэффициенты полинома a_i , b_i , c_i и d_i находятся из граничных условий и известных силовых факторов.

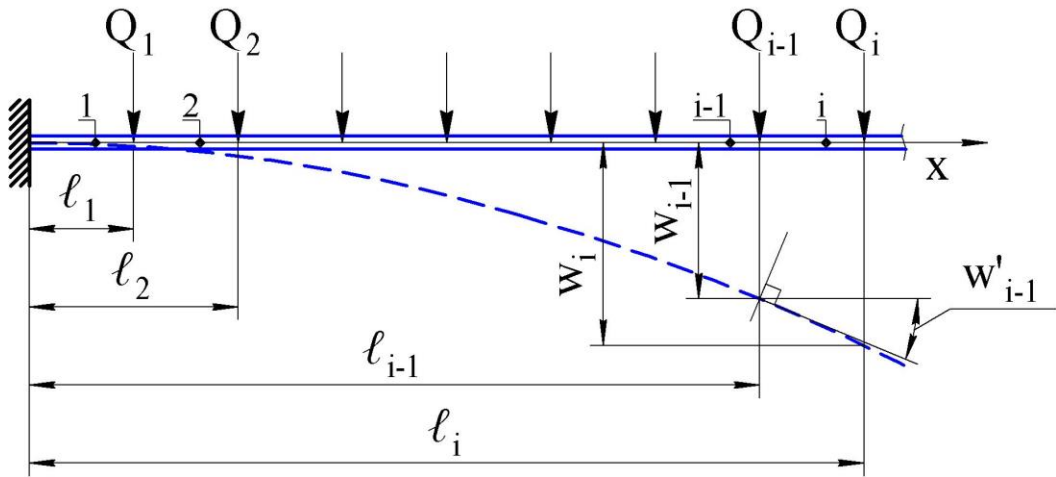


Рисунок 1 – Расчетная схема для определения перемещений балки

В сечении $X = \ell_{i-1}$ граничные условия формулируются следующим образом:

$$w_{i-1} = w_i; \quad (2)$$

$$w'_{i-1} = w'_i; \quad (3)$$

$$w''_{i-1}(EJ)_{i-1} - w''_i(EJ)_i = M_{i-1}; \quad (4)$$

$$w'''_{i-1}(EJ)_{i-1} - w'''_i(EJ)_i = Q_{i-1}, \quad (5)$$

где w'_{i-1}, w'_i – тангенс угла наклона конца $(i-1)$ -го и начала i -го участков;

M_{i-1} – сосредоточенный изгибающий момент, который в рассматриваемой задаче принят равным нулю;

$(EJ)_i, (EJ)_{i-1}$ – изгибная жесткость балки на рассматриваемых участках. Следует отметить, что при переменной жесткости известная формула Мора записывается в виде суммы интегралов. В предлагаемой модели принято, что конструктивные параметры балки, определяющие ее изгибную жесткость, изменяются ступенчато на границе участков.

Заметим, что условия (2), (3) формально отражают условия совместности деформаций соседних участков, а (4) и (5) являются уравнениями равновесия. Другими словами, уравнения (2) и (3) представляют собой геометрические (кинематические) граничные условия, а (4) и (5) – силовые (статические) граничные условия в сечении балки $X = \ell_{i-1}$.

На основе предлагаемого метода дискретизации балки с формулированием функции перемещения в виде (1) можно исследовать как статически определимые, так и статически неопределимые балки. Попутно заметим, что выбором длины участков всегда можно добиться таких величин прогибов, которые меньше высоты балки, что уточняет классическую расчетную модель.

Рассмотрим применение предлагаемого подхода к анализу деформированного состояния балки, заделанной с двух сторон (рис. 2).

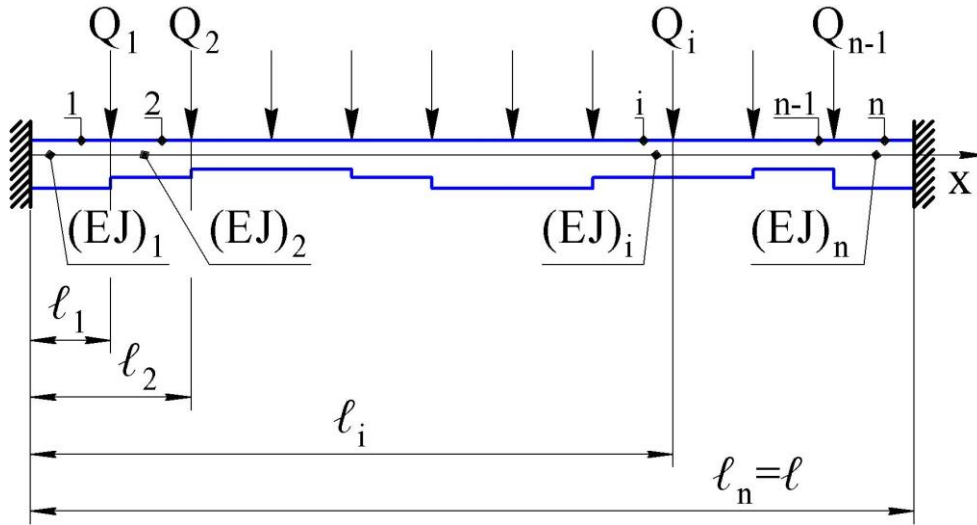


Рисунок 2 – Расчетная модель статически неопределимой балки

После дискретизации внешних нагрузок в виде сосредоточенных сил Q_i и изгибной жесткости балки $(EJ)_i$ функцию прогиба i -го участка можно записать в виде (1). Начало координат (см. рис. 2) выбрано так, чтобы коэффициенты формы d_1 и c_1 равнялись нулю.

Из уравнений (4) и (5) следуют формулы для коэффициентов a_i и b_i , выражаемые через неизвестные пока a_1 и b_1 :

$$\begin{aligned} a_i &= a_1 \frac{(EJ)_1}{(EJ)_i} - \frac{1}{6(EJ)_i} \sum_{k=1}^{i-1} Q_k; \\ b_i &= b_1 \frac{(EJ)_1}{(EJ)_i} + \frac{1}{2(EJ)_i} \sum_{k=1}^{i-1} Q_k \ell_k. \end{aligned} \quad (6)$$

Для определения коэффициентов c_i запишем группу уравнений (3) в виде

$$\begin{aligned} c_2 - c_1 &= 3\ell_1^2 (a_1 - a_2) + 2\ell_1 (b_1 - b_2); \\ c_3 - c_2 &= 3\ell_2^2 (a_2 - a_3) + 2\ell_2 (b_2 - b_3); \\ &\vdots \\ c_i - c_{i-1} &= 3\ell_{i-1}^2 (a_{i-1} - a_i) + 2\ell_{i-1} (b_{i-1} - b_i); \\ &\vdots \\ c_n - c_{n-1} &= 3\ell_{n-1}^2 (a_{n-1} - a_n) + 2\ell_{n-1} (b_{n-1} - b_n). \end{aligned} \quad (7)$$

Суммируя левые и правые части и учитывая, что $c_1 = 0$, получаем следующую зависимость для коэффициентов c_i :

$$c_i = \sum_{k=1}^{i-1} \left[3\ell_k^2 (a_k - a_{k+1}) + 2\ell_k (b_k - b_{k+1}) \right]. \quad (8)$$

Аналогично (7) запишем группу уравнений (2) для равенства прогибов на границах соседних участков:

$$\begin{aligned} d_2 - d_1 &= \ell_1^3 (a_1 - a_2) + \ell_1^2 (b_1 - b_2) + \ell_1 (c_1 - c_2); \\ d_3 - d_2 &= \ell_2^3 (a_2 - a_3) + \ell_2^2 (b_2 - b_3) + \ell_2 (c_2 - c_3); \\ &\vdots \\ d_i - d_{i-1} &= \ell_{i-1}^3 (a_{i-1} - a_i) + \ell_{i-1}^2 (b_{i-1} - b_i) + \ell_{i-1} (c_{i-1} - c_i); \\ &\vdots \\ d_n - d_{n-1} &= \ell_{n-1}^3 (a_{n-1} - a_n) + \ell_{n-1}^2 (b_{n-1} - b_n) + \ell_{n-1} (c_{n-1} - c_n). \end{aligned} \quad (9)$$

Складывая эти уравнения с учетом $d_1 = 0$, получаем такую формулу для коэффициентов d_i :

$$d_i = \sum_{k=1}^{i-1} \left[\ell_k^3 (a_k - a_{k+1}) + \ell_k^2 (b_k - b_{k+1}) + \ell_k (c_k - c_{k+1}) \right]. \quad (10)$$

С помощью выражения (8) разность $(c_k - c_{k+1})$ преобразуется к виду

$$(c_k - c_{k+1}) = - \left[3\ell_k^2 (a_k - a_{k+1}) + 2\ell_k (b_k - b_{k+1}) \right]. \quad (11)$$

Подставим эту зависимость в формулу (10):

$$d_i = - \sum_{k=1}^{i-1} \left[2\ell_k^3 (a_k - a_{k+1}) + \ell_k^2 (b_k - b_{k+1}) \right]. \quad (12)$$

Из уравнений (6) найдем выражения $(a_k - a_{k+1})$ и $(b_k - b_{k+1})$ и подставим их в зависимости (8) и (12):

$$a_k - a_{k+1} = \left(\frac{1}{(EJ)_k} - \frac{1}{(EJ)_{k+1}} \right) \left[a_1 (EJ)_1 - \frac{1}{6} \sum_{s=1}^{k-1} Q_s \right] + \frac{Q_k}{6(EJ)_{k+1}}; \quad (13)$$

$$b_k - b_{k+1} = \left(\frac{1}{(EJ)_k} - \frac{1}{(EJ)_{k+1}} \right) \left[b_1 (EJ)_1 + \frac{1}{2} \sum_{s=1}^{k-1} Q_s \ell_s \right] - \frac{Q_k \ell_k}{2(EJ)_{k+1}};$$

$$\begin{aligned} c_i &= \sum_{k=1}^{i-1} \left\{ 3\ell_k^2 \left[\left(\frac{1}{(EJ)_k} - \frac{1}{(EJ)_{k+1}} \right) \left[a_1 (EJ)_1 - \frac{1}{6} \sum_{s=1}^{k-1} Q_s \right] + \frac{Q_k}{6(EJ)_{k+1}} \right] \right\} + \\ &+ \sum_{k=1}^{i-1} \left\{ 2\ell_k \left[\left(\frac{1}{(EJ)_k} - \frac{1}{(EJ)_{k+1}} \right) \left[b_1 (EJ)_1 + \frac{1}{2} \sum_{s=1}^{k-1} Q_s \ell_s \right] - \frac{Q_k \ell_k}{2(EJ)_{k+1}} \right] \right\}; \quad (14) \end{aligned}$$

$$d_i = - \sum_{k=1}^{i-1} \left\{ 2\ell_k^3 \left[\left(\frac{1}{(EJ)_k} - \frac{1}{(EJ)_{k+1}} \right) \left[a_1(EJ)_1 - \frac{1}{6} \sum_{s=1}^{k-1} Q_s \right] + \frac{Q_k}{6(EJ)_{k+1}} \right] - \right. \\ \left. - \sum_{k=1}^{i-1} \left\{ \ell_k^2 \left[\left(\frac{1}{(EJ)_k} - \frac{1}{(EJ)_{k+1}} \right) \left[b_1(EJ)_1 + \frac{1}{2} \sum_{s=1}^{k-1} Q_s \ell_s \right] - \frac{Q_k \ell_k}{2(EJ)_{k+1}} \right] \right\} \right\}. \quad (15)$$

Для определения коэффициентов a_1 и b_1 воспользуемся геометрическими граничными условиями на конце балки (при $x = \ell_n$):

$$w_n \Big|_{x=\ell_n} = w'_n \Big|_{x=\ell_n} = 0. \quad (16)$$

Тогда с учетом (1) получим следующую систему уравнений для определения неизвестных коэффициенты формы a_1 и b_1 :

$$\begin{cases} a_n \ell_n^3 + b_n \ell_n^2 + c_n \ell_n + d_n = 0; \\ 3a_n \ell_n^2 + 2b_n \ell_n + c_n = 0. \end{cases} \quad (17)$$

Из выражений (6), (14) и (15) при $i = n$ получим формулы для определения коэффициентов уравнения прогиба n -го участка:

$$\begin{aligned} a_n &= a_1 \frac{(EJ)_1}{(EJ)_n} - \frac{1}{6(EJ)_n} \sum_{k=1}^{n-1} Q_k; \\ b_n &= b_1 \frac{(EJ)_1}{(EJ)_n} + \frac{1}{2(EJ)_n} \sum_{k=1}^{n-1} Q_k \ell_k; \end{aligned} \quad (18)$$

$$\begin{aligned} c_n &= \sum_{k=1}^{n-1} \left\{ 3\ell_k^2 \left[\left(\frac{1}{(EJ)_k} - \frac{1}{(EJ)_{k+1}} \right) \left[a_1(EJ)_1 - \frac{1}{6} \sum_{s=1}^{k-1} Q_s \right] + \frac{Q_k}{6(EJ)_{k+1}} \right] + \right. \\ &+ \sum_{k=1}^{n-1} \left\{ 2\ell_k \left[\left(\frac{1}{(EJ)_k} - \frac{1}{(EJ)_{k+1}} \right) \left[b_1(EJ)_1 + \frac{1}{2} \sum_{s=1}^{k-1} Q_s \ell_s \right] - \frac{Q_k \ell_k}{2(EJ)_{k+1}} \right] \right\}; \end{aligned} \quad (19)$$

$$\begin{aligned} d_n &= - \sum_{k=1}^{n-1} \left\{ 2\ell_k^3 \left[\left(\frac{1}{(EJ)_k} - \frac{1}{(EJ)_{k+1}} \right) \left[a_1(EJ)_1 - \frac{1}{6} \sum_{s=1}^{k-1} Q_s \right] + \frac{Q_k}{6(EJ)_{k+1}} \right] - \right. \\ &- \sum_{k=1}^{n-1} \left\{ \ell_k^2 \left[\left(\frac{1}{(EJ)_k} - \frac{1}{(EJ)_{k+1}} \right) \left[b_1(EJ)_1 + \frac{1}{2} \sum_{s=1}^{k-1} Q_s \ell_s \right] - \frac{Q_k \ell_k}{2(EJ)_{k+1}} \right] \right\}. \end{aligned} \quad (20)$$

После подстановки этих выражений в (17) и некоторых преобразований получим систему двух линейных алгебраических уравнений относительно неизвестных коэффициентов a_1 и b_1 :

$$\begin{aligned}
& a_1(EJ)_1 \left\{ \frac{\ell_n^3}{(EJ)_n} + \sum_{k=1}^{n-1} \left[\ell_k^2 \left(\frac{1}{(EJ)_k} - \frac{1}{(EJ)_{k+1}} \right) (3\ell_n - 2\ell_k) \right] \right\} + \\
& + b_1(EJ)_1 \left\{ \frac{\ell_n^2}{(EJ)_n} + \sum_{k=1}^{n-1} \left[\ell_k \left(\frac{1}{(EJ)_k} - \frac{1}{(EJ)_{k+1}} \right) (2\ell_n - \ell_k) \right] \right\} + \\
& + \frac{\ell_n^2}{6(EJ)_n} \sum_{k=1}^{n-1} [Q_k (3\ell_k - \ell_n)] - \sum_{k=1}^{n-1} \left[\frac{Q_k}{6(EJ)_{k+1}} \ell_k^2 (3\ell_n - \ell_k) \right] - \\
& - \sum_{k=1}^{n-1} \left\{ \left(\frac{1}{(EJ)_k} - \frac{1}{(EJ)_{k+1}} \right) \frac{\ell_k}{2} \left[\frac{\ell_k}{3} (3\ell_n - 2\ell_k) \sum_{s=1}^{k-1} Q_s - (2\ell_n - \ell_k) \sum_{s=1}^{k-1} Q_s \ell_s \right] \right\} = 0; \quad (21)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& 3a_1(EJ)_1 \left\{ \frac{\ell_n^2}{(EJ)_n} + \sum_{k=1}^{n-1} \left[\ell_k^2 \left(\frac{1}{(EJ)_k} - \frac{1}{(EJ)_{k+1}} \right) \right] \right\} + \\
& + 2b_1(EJ)_1 \left\{ \frac{\ell_n}{(EJ)_n} + \sum_{k=1}^{n-1} \left[\ell_k \left(\frac{1}{(EJ)_k} - \frac{1}{(EJ)_{k+1}} \right) \right] \right\} - \\
& - \frac{\ell_n}{2(EJ)_n} \sum_{k=1}^{n-1} [Q_k (\ell_n - 2\ell_k)] - \sum_{k=1}^{n-1} \frac{Q_k \ell_k^2}{2(EJ)_{k+1}} - \\
& - \sum_{k=1}^{n-1} \left\{ \frac{\ell_k}{2} \left(\frac{1}{(EJ)_k} - \frac{1}{(EJ)_{k+1}} \right) \left(\ell_k \sum_{s=1}^{k-1} Q_s - 2 \sum_{s=1}^{k-1} Q_s \ell_s \right) \right\} = 0. \quad (22)
\end{aligned}$$

Система уравнений (21), (22) разрешима любым известным методом и после вычисления коэффициентов a_1 и b_1 для 1-го участка по формулам (6), (8) и (12) определяются коэффициенты полинома (1) для остальных участков балки. Обобщенные силовые факторы вычисляются по известным формулам классической расчетной схемы балки:

- перерезывающая сила

$$Q_{yi} = \frac{d^3 w_i}{dx^3} (EJ)_i = 6a_i (EJ)_i; \quad (23)$$

- изгибающий момент

$$M_{zi} = \frac{d^2 w_i}{dx^2} (EJ)_i = (3a_i x + 2b_i) (EJ)_i, \quad (24)$$

где $\ell_{i-1} \leq x \leq \ell_i$.

Для балок с постоянной изгибной жесткостью по длине $(EJ)_i = \text{const} = (EJ)$ система уравнений (21), (22) существенно упрощается и принимает вид

$$\begin{cases} a_1 \ell_n^3 + b_1 \ell_n^2 = \frac{1}{6(EJ)} \sum_{k=1}^{n-1} [Q_k (\ell_n - \ell_k)^3]; \\ 3a_1 \ell_n^2 + 2b_1 \ell_n = \frac{1}{2(EJ)} \sum_{k=1}^{n-1} [Q_k (\ell_n - \ell_k)^2]. \end{cases} \quad (25)$$

Для элементарной верификации предлагаемого метода рассмотрим балку с постоянной изгибной жесткостью, защемленную по концам и нагруженную сосредоточенной силой посередине пролета (рис. 3). В этом случае $n = 2$; $\ell_1 = \ell/2$; $\ell_2 = \ell$; $Q_1 = Q$; $(EJ)_1 = (EJ)_2 = (EJ)$.

Система уравнений (25) принимает вид

$$\begin{cases} a_1 \ell^3 + b_1 \ell^2 = \frac{Q \ell^3}{48(EJ)}; \\ 3a_1 \ell^2 + 2b_1 \ell = \frac{Q \ell^2}{8(EJ)}. \end{cases}$$

Отсюда

$$a_1 = \frac{Q}{12(EJ)}; \quad b_1 = -\frac{Q \ell}{16(EJ)}.$$

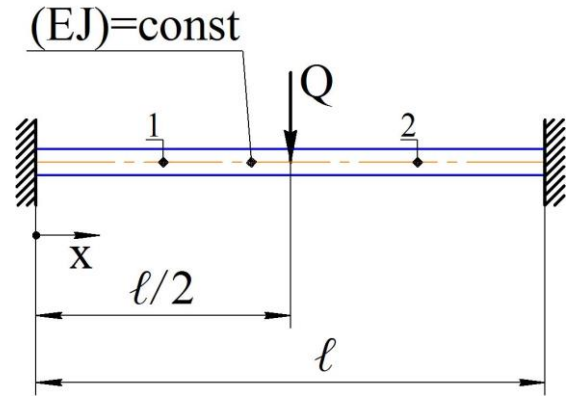


Рисунок 3 – К верификации предлагаемого метода

По формулам (6), (8) и (12) найдем коэффициенты a_2 , b_2 , c_2 и d_2 для описания прогиба на 2-м участке:

$$a_2 = -\frac{Q}{12(EJ)}; \quad b_2 = \frac{3Q \ell}{16(EJ)}; \quad c_2 = -\frac{Q \ell^2}{8(EJ)}; \quad d_2 = \frac{Q \ell^3}{48(EJ)}.$$

Таким образом, получим следующие уравнения прогибов участков балки:

$$w_1 = \frac{Q x^2}{48(EJ)} (4x - 3\ell), \quad 0 \leq x \leq \ell/2;$$

$$w_2 = \frac{Q}{48(EJ)} (-4x^3 + 9\ell x^2 - 6\ell^2 x + \ell^3), \quad \ell/2 \leq x \leq \ell.$$

Изгибающие моменты и перерезывающие силы на участках равны

$$M_{z1} = w_1''(EJ) = \frac{Q}{8} (4x - \ell); \quad Q_{y1} = w_1'''(EJ) = \frac{Q}{2};$$

$$M_{z2} = w_2''(EJ) = \frac{Q}{8} (3\ell - 4x); \quad Q_{y2} = w_2'''(EJ) = -\frac{Q}{2}.$$

Эти результаты тождественно совпадают с теми, которые приведены в справочниках [2].

Для статически определимых или неопределимых балок с другими условиями опирания изменяются граничные условия, что обуславливает необходимость составления и решения соответствующих систем уравнений.

В частности, для консольной балки (рис. 4, а) система уравнений для определения неизвестных коэффициентов a_1 и b_1 будет формироваться на основе двух силовых граничных условий, записанных для защемленного конца балки (при $x = 0$):

$$\begin{aligned} M_{z1} \Big|_{x=0} &= - \sum_{s=1}^n Q_s \ell_s; \\ Q_{y1} \Big|_{x=0} &= \sum_{s=1}^n Q_s, \end{aligned} \quad (26)$$

откуда с учетом выражений (23), (24) получим

$$a_1 = \frac{1}{6(EJ)_1} \sum_{s=1}^n Q_s; \quad b_1 = - \frac{1}{2(EJ)_1} \sum_{s=1}^n Q_s \ell_s. \quad (27)$$

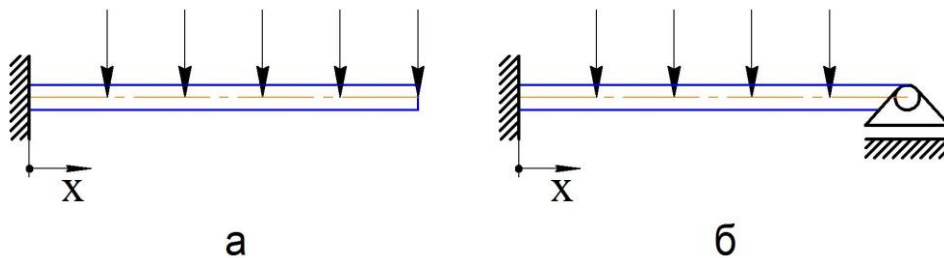


Рисунок 4 – Статически определимая (а) и неопределимая (б) балки

Для статически неопределимой балки с защемленным и шарнирно-опертым торцами (рис. 4, б) разрешающая система уравнений относительно коэффициентов a_1 и b_1 образуется при удовлетворении силовых и геометрических граничных условий на конце балки (при $x = \ell_n$):

$$w_n \Big|_{x=\ell_n} = 0; \quad M_{zn} \Big|_{x=\ell_n} = 0 \quad (28)$$

или с учетом выражений (1) и (24)

$$\begin{cases} a_n \ell_n^3 + b_n \ell_n^2 + c_n \ell_n + d_n = 0; \\ 6a_n \ell_n + 2b_n = 0. \end{cases} \quad (29)$$

В развернутом виде первое уравнение системы (29) было получено выше (см. выражение (21)), а второе уравнение при подстановке зависимостей (18) принимает следующий вид:

$$3a_1\ell_n + b_1 - \frac{1}{2(EJ)_1} \sum_{k=1}^{n-1} Q_k (\ell_n - \ell_k) = 0. \quad (30)$$

Начало отсчета координаты x для рассматриваемых балок (см. рис. 4) выбрано так, чтобы коэффициенты d_1 и c_1 в уравнении прогиба 1-го участка балки обращались в ноль. Это позволит использовать общие уравнения (6), (8) и (12) при вычислении коэффициентов a_i , b_i , c_i и d_i для определения прогибов остальных участков балки ($i = 2, \dots, n$).

Таким образом, предложен новый метод исследования статически определимых и неопределимых балок с произвольным характером изменения изгибной жесткости и нагружения по длине, базирующийся на задании функции прогиба в виде полинома для каждого участка балки. Коэффициенты полинома определяются из геометрических (кинематических) и/или силовых (статических) граничных условий на границах участков. Показана реализация предложенного метода на примере статически определимой консольной балки и двух статически неопределимых балок. В данном методе нет необходимости построения эпюр и их интегрирования, что делает его максимально приспособленным для реализации в среде цифровых технологий, так как все расчеты перемещений и обобщенных силовых факторов основаны на суммировании неких дискретных величин.

Список использованных источников

1. Тимошенко, С.П. Соппротивление материалов: в 2 т. / С.П. Тимошенко; изд. 2-е, стереотип., пер. с англ. В.Н. Федорова. – М.: Наука, 1965. – Т. 1. Элементарная теория и задачи. – 364 с.
2. Справочник по сопротивлению материалов / Г.С. Писаренко, А.П. Яковлев, В.В. Матвеев; отв. ред. Г.С. Писаренко. – 2-е изд., перераб. и доп. – К.: Наукова думка, 1988. – 736 с.

Поступила в редакцию 08.02.2018.

*Рецензент: д-р техн. наук, В.Е. Гайдачук,
Национальный аэрокосмический университет
им. Н.Е. Жуковского «ХАИ», г. Харьков*