

ОПТИМИЗАЦИЯ КОНСТРУКТИВНЫХ ПАРАМЕТРОВ БАЛОК И ЛОНЖЕРОНОВ ИЗ КОМПОЗИЦИОННЫХ МАТЕРИАЛОВ

В конструкциях летательных аппаратов и большинства изделий машиностроения и транспорта присутствуют балки в качестве силовых элементов. Основными ограничениями, накладываемыми на параметры полок и стенки балок, являются обеспечение прочности, устойчивости и жесткости. Последнее ограничение чаще всего выражается через регламентируемую величину максимального прогиба в заданных сечениях балки. В учебниках [1, 2] описана методика проектирования статически определимых балок при ограничениях по прочности и устойчивости ее элементов – полок и стенки. Предложена также методика определения параметров полок при ограничении прогиба. Для удовлетворения требований прочности и жесткости в [1, 2] предусматривается разделение балки на два участка, на одном из которых параметры полок определяются только из условий прочности, а на другом – из условия обеспечения регламентируемого (требуемого) прогиба. В связи с этим представляет интерес оптимизация параметров полок балки при необходимости одновременного обеспечения прочности и жесткости.

Предлагаемая методика основана на идее о том, что найденные по условиям прочности и устойчивости параметры полок балки, не обеспечивающие требуемую жесткость, увеличиваются на каком-то участке балки. Очевидно, что выполнение условия по регламентируемому прогибу возможно несколькими вариантами усиления полок (рис. 1). Тогда на основе сказанного формулируется следующая задача оптимизации параметров балки: найти такой характер увеличения площадей полок, который приводил бы к минимальному приросту массы полок (композитная стенка в силу структуры композиционного материала практически не влияет на жесткость балки [1, 2]), т.е.

$$\int_0^{x_0} (\rho_{\text{с}} f_{\text{с}} + \rho_{\text{н}} f_{\text{н}}) dx \rightarrow \min \quad (1)$$

при ограничении [1, 2]

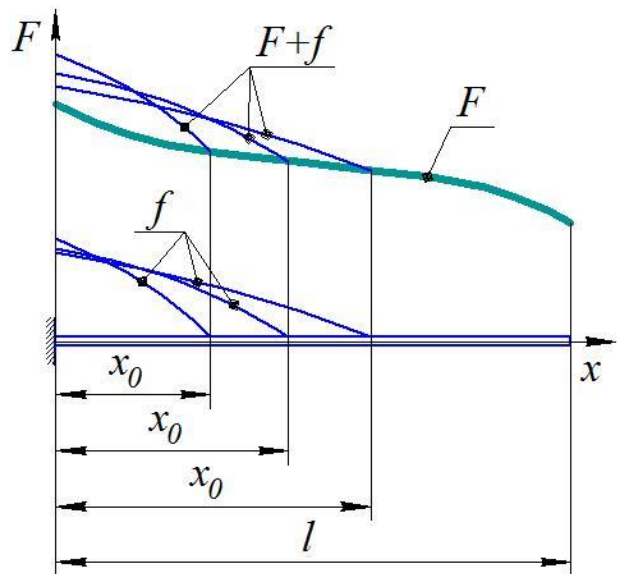


Рисунок 1 – К обоснованию усиления
полок балки для обеспечения
требуемого прогиба

$$w \leq [w], \quad (2)$$

где $\rho_{\text{в}}, \rho_{\text{н}}$ – плотность материала верхней и нижней полок;

$f_{\text{в}}, f_{\text{н}}$ – площадь дополнительного усиления верхней и нижней полок для обеспечения требуемого прогиба;

$[w]$ – регламентируемая (требуемая) величина прогиба;

x_0 – длина участка усиления (см. рис. 1).

Величина суммарного прогиба w складывается из двух частей (рис. 2):

$$w = w|_{x_0} + \Delta w, \quad (3)$$

где в соответствии с теоремой Кастильяно [3]

$$w|_{x_0} = \int_0^{x_0} \frac{M(x_0 - x)}{(EI)_w} dx, \quad (4)$$

а составляющая прогиба Δw (см. рис. 2) после пренебрежения величинами второго порядка малости вычисляется формулой

$$\Delta w = \Delta w_1 + \Delta w_2 = (l - x_0) \int_0^{x_0} \frac{M}{(EI)_w} dx + \int_{x_0}^l \frac{M(l - x)}{(EI)_{\sigma}} dx, \quad (5)$$

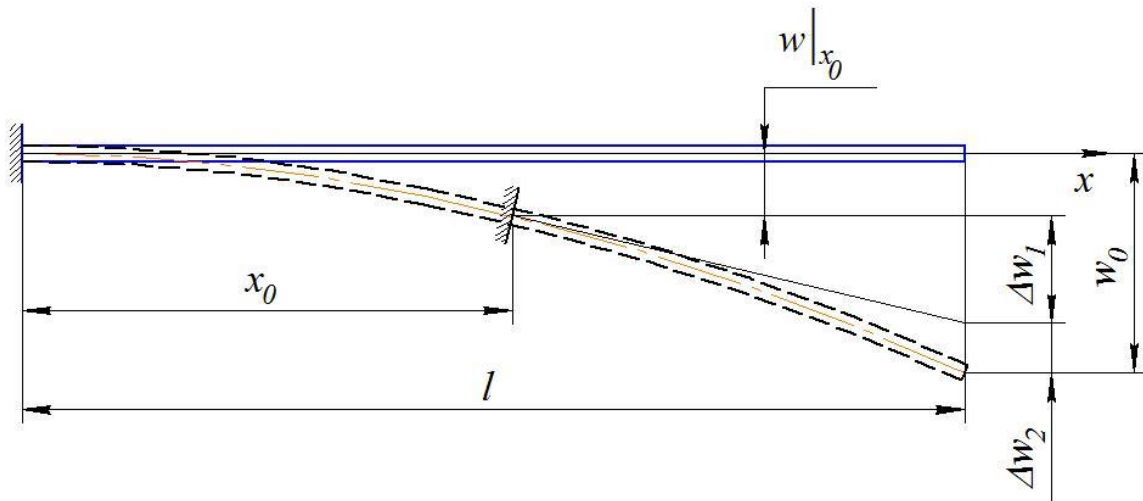


Рисунок 2 – Схема определения прогиба балки

где $(EI)_w, (EI)_{\sigma}$ – жесткость балки на участках $0 \leq x \leq x_0$ и $x_0 \leq x \leq l$ соответственно, которая согласно [1, 2] определяется по упрощенным формулам (без учета жесткости стенки и заплечиков балки):

$$(EI)_w = H_{\text{эф}}^2 \frac{E_{\text{в}}(F_{\text{в}} + f_{\text{в}})E_{\text{н}}(F_{\text{н}} + f_{\text{н}})}{E_{\text{в}}(F_{\text{в}} + f_{\text{в}}) + E_{\text{н}}(F_{\text{н}} + f_{\text{н}})}; \quad (6)$$

$$(EI)_\sigma = H_{\text{эф}}^2 \frac{E_\epsilon F_\epsilon E_H F_H}{E_\epsilon F_\epsilon + E_H F_H}. \quad (7)$$

Здесь E_ϵ, E_H – модули упругости материала верхней и нижней полок соответственно;

F_ϵ, F_H – требуемые площади полок по условиям прочности и устойчивости;

f_ϵ, f_H – дополнительная площадь полок, необходимая для обеспечения требуемого прогиба;

$H_{\text{эф}}$ – эффективная высота балки (расстояние между центрами жесткости полок), вычисляемая так:

$$\begin{aligned} 0 \leq x \leq x_0 \quad H_{\text{эф}} &= H - \frac{F_\epsilon + f_\epsilon}{2b_\epsilon} - \frac{F_H + f_H}{2b_H}; \\ x_0 \leq x \leq l \quad H_{\text{эф}} &= H - \frac{F_\epsilon}{2b_\epsilon} - \frac{F_H}{2b_H}. \end{aligned} \quad (8)$$

Решение задачи (1) при ограничении (2) представляет собой классическую изопериметрическую вариационную задачу, которую удобно решать методом неопределенных множителей Лагранжа [4]. Новый функционал имеет вид

$$L = \rho_\epsilon f_\epsilon + \rho_H f_H + \lambda \frac{M(l-x)}{(EI)_w}, \quad (9)$$

а разрешающая система уравнений –

$$\frac{\partial L}{\partial f_\epsilon} = 0; \quad \frac{\partial L}{\partial f_H} = 0, \quad (10)$$

к которой для определения множителя λ необходимо добавить уравнение (2) в виде равенства.

Запишем систему уравнений (10) в развернутом виде:

$$\begin{cases} \rho_\epsilon - \lambda M(l-x) \frac{1}{(EI)_w^2} \frac{\partial (EI)_w}{\partial f_\epsilon} = 0; \\ \rho_H - \lambda M(l-x) \frac{1}{(EI)_w^2} \frac{\partial (EI)_w}{\partial f_H} = 0. \end{cases} \quad (11)$$

Выразим из уравнений (11) величину $M(l-x)$ и подставим в ограничения (2), откуда после исключения множителя λ получим систему интегрально-алгебраических уравнений для определения функций $f_\epsilon(x)$ и $f_H(x)$:

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{M(l-x)}{(EI)_w^2} \frac{\partial(EI)_w}{\partial f_\theta} \int_0^{x_0} \frac{(EI)_w}{\frac{\partial(EI)_w}{\partial f_\theta}} dx = [w] - \Delta w_2; \\ \frac{M(l-x)}{(EI)_w^2} \frac{\partial(EI)_w}{\partial f_H} \int_0^{x_0} \frac{(EI)_w}{\frac{\partial(EI)_w}{\partial f_H}} dx = [w] - \Delta w_2, \end{array} \right. \quad (12)$$

где частные производные изгибной жесткости балки на участке $0 \leq x \leq x_0$ по дополнительной площади полков вычисляются так:

$$\begin{aligned} \frac{\partial(EI)_w}{\partial f_\theta} &= 2H_{\text{эф}} \frac{\partial H_{\text{эф}}}{\partial f_\theta} \frac{E_\theta (F_\theta + f_\theta) E_H (F_H + f_H)}{E_\theta (F_\theta + f_\theta) + E_H (F_H + f_H)} + \\ &+ H_{\text{эф}}^2 \frac{E_\theta E_H^2 (F_H + f_H)^2}{[E_\theta (F_\theta + f_\theta) + E_H (F_H + f_H)]^2}; \\ \frac{\partial(EI)_w}{\partial f_H} &= 2H_{\text{эф}} \frac{\partial H_{\text{эф}}}{\partial f_H} \frac{E_\theta (F_\theta + f_\theta) E_H (F_H + f_H)}{E_\theta (F_\theta + f_\theta) + E_H (F_H + f_H)} + \\ &+ H_{\text{эф}}^2 \frac{E_H E_\theta^2 (F_\theta + f_\theta)^2}{[E_\theta (F_\theta + f_\theta) + E_H (F_H + f_H)]^2}. \end{aligned} \quad (13)$$

Система уравнений (12) решается итерационным методом после обозначения определенных интегралов через константы

$$c_\theta = \int_0^{x_0} \frac{(EI)_w}{\frac{\partial(EI)_w}{\partial f_\theta}} dx; \quad c_H = \int_0^{x_0} \frac{(EI)_w}{\frac{\partial(EI)_w}{\partial f_H}} dx. \quad (14)$$

С учетом обозначений (14) система разрешающих уравнений (12) принимает вид

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{M(l-x)}{(EI)_w^2} \frac{\partial(EI)_w}{\partial f_\theta} c_\theta = [w] - \Delta w_2; \\ \frac{M(l-x)}{(EI)_w^2} \frac{\partial(EI)_w}{\partial f_H} c_H = [w] - \Delta w_2. \end{array} \right. \quad (15)$$

Для оценки ожидаемого решения системы (15) введем еще один итерационный параметр – $H_{\text{эф}}$, который для реальных конструкций ба-

лок и лонжеронов незначительно зависит от параметров полок (толщины). Тогда вместо выражений (13) можно записать

$$\begin{aligned}\frac{\partial(EI)_w}{\partial f_\varepsilon} &= H_{\text{зф}}^2 \frac{E_\varepsilon E_H^2 (F_H + f_H)^2}{[E_\varepsilon (F_\varepsilon + f_\varepsilon) + E_H (F_H + f_H)]^2}; \\ \frac{\partial(EI)_w}{\partial f_H} &= H_{\text{зф}}^2 \frac{E_H E_\varepsilon^2 (F_\varepsilon + f_\varepsilon)^2}{[E_\varepsilon (F_\varepsilon + f_\varepsilon) + E_H (F_H + f_H)]^2}.\end{aligned}\quad (16)$$

После подстановки формул (6) и (16) в (15) и (14) получим

$$\begin{cases} \frac{M(l-x)}{H_{\text{зф}}^2 E_\varepsilon (F_\varepsilon + f_\varepsilon)^2} C_\varepsilon = [W] - \Delta W_2; \\ \frac{M(l-x)}{H_{\text{зф}}^2 E_H (F_H + f_H)^2} C_H = [W] - \Delta W_2; \end{cases}\quad (17)$$

$$\begin{aligned}C_\varepsilon &= \int_0^{x_0} \frac{(F_\varepsilon + f_\varepsilon) [E_\varepsilon (F_\varepsilon + f_\varepsilon) + E_H (F_H + f_H)]}{E_H (F_H + f_H)} dx; \\ C_H &= \int_0^{x_0} \frac{(F_H + f_H) [E_\varepsilon (F_\varepsilon + f_\varepsilon) + E_H (F_H + f_H)]}{E_\varepsilon (F_\varepsilon + f_\varepsilon)} dx.\end{aligned}\quad (18)$$

Из системы уравнений (17) выведем зависимости для определения функций $f_\varepsilon(x)$ и $f_H(x)$, которые описывают распределение дополнительного материала по полкам балки на участке $0 \leq x \leq x_0$:

$$\begin{aligned}f_\varepsilon(x) &= \sqrt{\frac{M(l-x)C_\varepsilon}{H_{\text{зф}}^2 E_\varepsilon ([W] - \Delta W_2)}} - F_\varepsilon; \\ f_H(x) &= \sqrt{\frac{M(l-x)C_H}{H_{\text{зф}}^2 E_H ([W] - \Delta W_2)}} - F_H.\end{aligned}\quad (19)$$

Отсюда видно, что при определенном распределении материала по полкам балки на участке $x_0 \leq x \leq l$, где их параметры обеспечивают только выполнение условий прочности, а также регламентированной величины прогиба $[W]$, можно определить минимально потребную длину участка усиления x_0 из условия $[W] > \Delta W_2$, или (см. формулу (5))

$$\int_{x_0}^l \frac{M(l-x)}{(EI)_\sigma} dx < [W].\quad (20)$$

При одинаковом материале полков, т.е. при $E_{\epsilon} = E_H$, выражения (18) упрощаются:

$$\begin{aligned} c_{\epsilon} &= \int_0^{x_0} (F_{\epsilon} + f_{\epsilon}) \left[\frac{F_{\epsilon} + f_{\epsilon}}{F_H + f_H} + 1 \right] dx; \\ c_H &= \int_0^{x_0} (F_H + f_H) \left[\frac{F_H + f_H}{F_{\epsilon} + f_{\epsilon}} + 1 \right] dx. \end{aligned} \quad (21)$$

Из сравнения зависимостей (17) при $E_{\epsilon} = E_H$ следует, что во всех сечениях балки суммарные площади полков связаны соотношением

$$\frac{F_{\epsilon} + f_{\epsilon}}{F_H + f_H} = \sqrt{\frac{c_{\epsilon}}{c_H}} = const, \quad (22)$$

причем этот вывод справедлив и при изготовлении полков из разных материалов

$$\frac{F_{\epsilon} + f_{\epsilon}}{F_H + f_H} = \sqrt{\frac{c_{\epsilon} E_H}{c_H E_{\epsilon}}} = const. \quad (23)$$

Первый вывод, который следует из анализа зависимостей (22) или (23), состоит в том, что графики функций $(F_{\epsilon} + f_{\epsilon})$ и $(F_H + f_H)$ не пересекаются и их отношение является постоянной величиной.

Второй вывод заключается в том, что параметры x_0 и $H_{эф}$ необходимо искать с использованием итерационной процедуры, причем эффективную высоту балки $H_{эф}$ находят для каждого значения оптимизируемого параметра x_0 . Аналитическое решение системы алгебраических уравнений (15) невозможно в силу их высокого порядка.

Выше рассмотрена задача оптимального проектирования консольно-закрепленной балки, являющейся статически определимой системой. Разработанную методику можно использовать для оптимизации параметров статически определимой балки на двух опорах на основе предложенного в [1] подхода. После проектирования такой конструкции по условиям прочности определяется максимальный прогиб и его координата x^* (рис. 3, а). Разрезая условно балку в этом сечении (рис. 3, б), получаем две консольно-закрепленные балки, которые нагружены кроме внешних усилий реакциями отброшенных опор. Заметим, что если для консольной балки усиление полков требуется на участке, примыкающем к опоре, то для однопролетной шарнирно-опертой балки необходимая дополнительная площадь полков будет максимальна в зоне максимального прогиба.

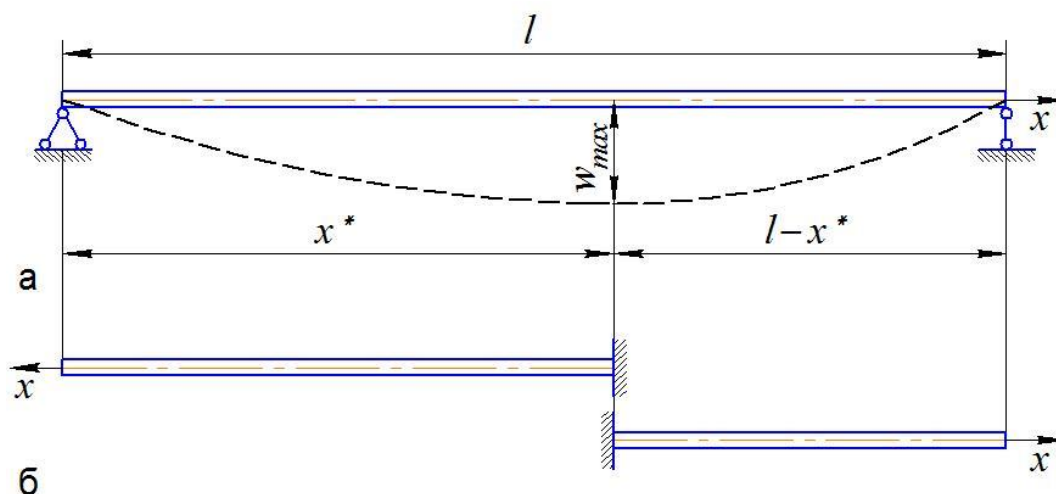


Рисунок 3 – Схема декомпозиции однопролетной шарнирно-опертой балки

Таким образом, разработана методика оптимального проектирования полкок балки при ограничениях на прочность и величину максимального прогиба. Получены разрешающие системы уравнений для прогнозирования оптимального распределения материала усиления полкок балки по длине заданного участка и предложена итерационная процедура решения этих уравнений.

Список использованных источников

1. Карпов, Я.С. Проектирование деталей и агрегатов из композитов: учебник [Текст] / Я.С. Карпов. – Харьков: Нац. аэрокосм. ун-т им. Н.Е. Жуковского «Харьков. авиац. ин-т», 2010. – 768 с.
2. Проектирование и конструирование изделий из композиционных материалов. Теория и практика: учебник [Текст] / П.М. Гагауз, Ф.М. Гагауз, Я.С. Карпов, С.П. Кривенда; под общ. ред. Я.С. Карпова. – Харьков: Нац. аэрокосм. ун-т им. Н.Е. Жуковского «Харьков. авиац. ин-т», 2015. – 672 с.
3. Строительная механика летательных аппаратов: учебник для авиац. спец-тей вузов [Текст] / И.Ф. Образцов, Л.А. Булычев, В.В. Васильев и др.; под ред. И.Ф. Образцова. – М.: Машиностроение, 1986. – 536 с.
4. Реклейтис, Г. Оптимизация в технике: в 2 кн. [Текст] / Г. Реклейтис, А. Рейвиндран, К. Рэгсдел; пер. с англ. – М.: Мир, 1986. – Кн. 1. – 348 с.

Поступила в редакцию 07.09.2017.

*Рецензент: д-р техн. наук, проф. В.Е. Гайдачук,
Национальный аэрокосмический университет
им. Н.Е. Жуковского «ХАИ», г. Харьков*