

Ю. М. ПЕНКИН<sup>1</sup>, А. А. ФЕДОСЕЕВА<sup>2</sup><sup>1</sup> *Национальный фармацевтический университет, Украина*<sup>2</sup> *Харьковский радиотехнический колледж, Украина*

## СТРУКТУРНЫЕ КОНЕЧНЫЕ АВТОМАТЫ В ВИДЕ ТЕНЗОРОВ ТРЕТЬЕГО РАНГА ТИПА СУДОКУ

*Представлены концепция построения и общие принципы работы конечных автоматов нового вида, для которых входными и выходными элементами являются панели квадратных матриц, а переходы между их состояниями определяются числовыми тензорами третьего ранга. При этом структура тензоров задается в виде кубических сеток, в ячейках которых расположены натуральные числа согласно принципу построения Судоку. Указан алгоритм построения таких тензоров произвольного размера. Структуры тензоров, построенных при использовании ранжированных множеств натуральных чисел, определены как стандартные. Показано, что возможность определения тензоров типа Судоку с помощью одного размерного параметра является базовой для проявления их функционального самоподобия. Свойство аддитивного сохранения структуры численных тензоров третьего ранга к требованиям Судоку сформулировано в виде теоремы. Доказано, что тензор, полученный в результате суммирования произвольной тензорной структуры и константы с учетом введенного правила циклического ранжирования, удовлетворяет общим требованиям Судоку. Рассмотрены задачи абстрактного и структурного синтезов конечных автоматов на базе анализируемых тензорных структур. При этом задача абстрактного синтеза традиционно определялась как создание математической модели автомата, а задача структурного синтеза - как разработка его функциональной логической схемы. На основании многозначности функции выхода конечного автомата обоснована возможность одновременного использования нескольких различных выходных алфавитов. Описаны режимы функционирования минимального конечного автомата предложенного типа на примере инициального автомата с выделенным стандартным начальным состоянием. В общем случае показано, что конечные автоматы, заданные на группе указанных требований, можно отнести к обобщенным конечным автоматам первого рода (или автоматам Mealy) с многозначным выходом. Представлены особенности сетевых применений структурных автоматов. Проанализированы варианты возможных приложений рассмотренных конечных автоматов.*

**Ключевые слова:** конечный автомат; синтез автомата; тензор переходов; принцип Судоку.

### Введение

Как научное направление теория автоматов возникла в рамках кибернетики в середине XX века, когда стремительное развитие средств электронной вычислительной техники вызвало формирование новых математических знаний [1]. Потребовалась разработка теоретической базы для решения проблем, возникавших при проектировании реальных цифровых ЭВМ, а также в процессе построения и исследования гипотетических систем, таких как нейронные сети [1, 2]. В качестве моделей последних конечные автоматы (КА) рассматривались на основании доказанной в монографии [2] теоремы об эквивалентности конечной машины и соответствую-

щей ей нейронной сети. Дальнейшее широкомасштабное внедрение информационных технологий вывело сферу приложений теории автоматов далеко за границы моделирования аппаратных средств цифровой электроники, расширив ее до фундаментальных основ современной информатики. Сегодня абстрактные модели, разработанные в теории автоматов, востребованы такими научными направлениями как теория формальных грамматик, математическая лингвистика, теория логических моделей, математическая логика и формальные аксиоматические системы, теория кодирования и другими. Наиболее тесно теория автоматов интегрирована с теорией алгоритмов и, в частности, с таким ее разделом как теория абстрактных машин.

Следует заметить, что изначально в теории КА изучалась проблема «вычислимости и невычислимости», результаты исследований которой переросли в отдельную теорию сложности вычислений. Базовым в этой теории стало обоснованное в 1969 году С. Куком (S. A. Cook) деление общего множества задач на те, которые могут быть эффективно решены вычислительной машиной, и те, которые, в принципе, могут быть решены, но требуют для этого так много машинного времени, что компьютер оказывается бесполезным для решения практически всех вариантов задачи (за частными исключениями). Для универсальных машин Тьюринга задачи последнего класса в литературе определяются как «трудно разрешимые» или «NP-трудные». Разумеется, различие между указанными классами задач носит принципиальный характер, однако границу между ними необходимо рассматривать как условную. Эта граница размывается под действием двух факторов: постоянно нарастающими вычислительными ресурсами современных компьютеров и оптимизацией временной сложности алгоритмов, используемых в автоматах. Более того, в ряде патентов (например, [3]), в которых функционал отдельной машины Тьюринга назначается эквивалентным процедуре цифрового компьютера, оба эти фактора интегрируются. Более эффективной альтернативой такому «прямому» программно-процедурному подходу представляется использование в основе автоматов самосогласованных дискретных структур, которые построены в соответствии с правилами, заданными априори.

Целью настоящей статьи является представление концепции синтеза и общих принципов работы моделей структурных КА нового вида, предложенных профессором Ю.М. Пенкиным. Для рассматриваемых КА входными и выходными элементами выступают панели квадратных матриц, а переходы между их состояниями определяются числовыми тензорами третьего ранга, построенных в соответствии с принципом Судоку.

### Построение тензоров третьего ранга типа Судоку

Прежде чем рассмотреть задачу синтеза для предлагаемого вида КА, проанализируем вопрос построения числовых тензоров третьего ранга в требуемой форме. Такая необходимость определена тем, что авторам неизвестны литературные источники, в которых были бы описаны подобные трехмерные математические объекты.

Пространственную структуру тензора третьего ранга объема  $n^3$  установим в виде дискретной кубической сетки, элементы которой (ячейки) заполнены

числами из натурального ряда. Разумеется, основой этой структуры (слоем на ее нижней грани) будет квадратная матрица размером  $n^2$ . Потребуем, чтобы эта матрица  $n$ -го порядка, в общем случае, была заполненная  $n^2$  элементами множества  $M$  таким образом, что в таблице каждый элемент из  $M$  располагается в точности один раз. Дополнительно потребуем, чтобы для каждого горизонтального и вертикального слоя структуры тензора (которые также являются квадратными матрицами размерами  $n \times n$ ) выполнялось указанное правило. Подобный подход характерен для плоских сеток распространенной в настоящее время игры «Судоку», поэтому принцип построения числового тензора будем определять как принцип Судоку [4].

Не теряя общности, в качестве  $M$  множества выберем ранжированное множество натуральных чисел  $\{1, 2, \dots, n^2\}$ . Алгоритм построения структуры числового тензора зададим следующим образом:

Шаг 1. *Заполнение ячеек матрицы основы (нижнего горизонтального слоя тензора)*: начиная с дальней левой ячейки матрицы в направлении «слева на право» последовательно заполняются ячейки всех строк матрицы ранжированным рядом натуральных чисел от 1 до максимального значения  $n^2$ .

Шаг 2. *Заполнение ячеек матрицы второго (снизу) горизонтального слоя*: выбирая в качестве исходной сформированную матрицу основы тензора, выполняем в ней перестановку первого слева столбца на правый край матрицы и далее перестановку ближней (к наблюдателю) строки на дальнюю противоположную сторону матрицы. Итоговый результат смешивания после указанных перестановок фиксируем как структуру второго матричного слоя.

Шаг 3. *Шаг  $n$ . Заполнение ячеек матриц последующих горизонтальных слоёв*: выбирая в качестве исходной сформированную ранее матрицу предыдущего слоя тензора, выполняем в ней, как и ранее, перестановку первого слева столбца на правый край матрицы и далее перестановку ближней (к наблюдателю) строки на дальнюю противоположную сторону матрицы. Итоговый результат смешивания после указанных перестановок устанавливаем как структуру текущего тензорного слоя

Шаг 4. *Фиксация общей числовой структуры тензора третьего ранга  $\hat{G}(n)$* .

Для наглядности на рис. 1 представлены тензорные структуры, построенные согласно указанному алгоритму для случаев:  $\hat{G}(2)$  на рис. 1, а;  $\hat{G}(3)$  на рис. 1, б;  $\hat{G}(4)$  на рис. 1, с и  $\hat{G}(n)$  на рис. 1, д. Как видно из схематических рисунков полученных структур принцип Судоку (для произвольно выбранных горизонтальных и вертикальных слоёв) выполняется. Структуры тензоров, построенных при

использовании ранжированных множеств натуральных чисел  $\{1, 2, \dots, n^2\}$ , будем называть стандартными.

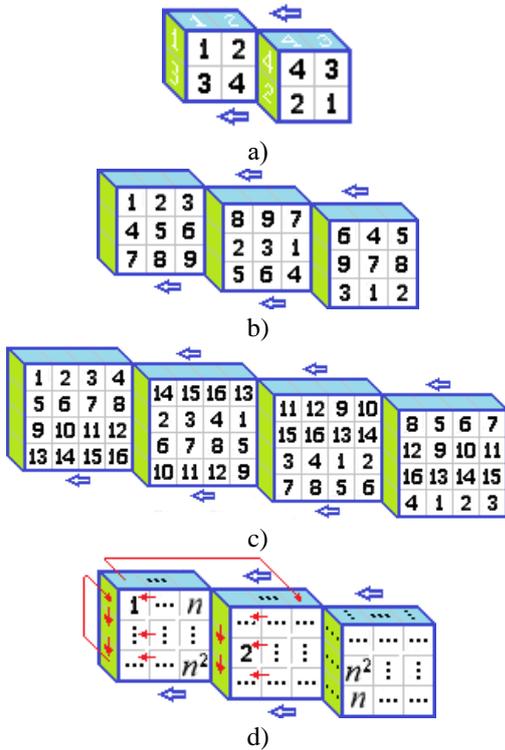


Рис. 1. Стандартная форма тензоров типа Судоку

Отметим, что размеры и формат заполнения построенных стандартных тензоров, будем далее их обозначать  $\hat{G}_0(n)$ , определяются только параметром  $n$ . Возможность определения тензоров типа Судоку с помощью одного параметра является базовой для проявления их функционального самоподобия. Действительно, требования Судоку (выраженные в терминологическом виде как: «в произвольно выбранном либо горизонтальном, либо вертикальном слое тензорной структуры содержится точно по одному разу все натуральные числа от 1 до  $n^2$ ») при «цифровом» моделировании можно записать с помощью известной формулы для конечной суммы ряда натуральных чисел в виде следующего математического соотношения:

$$\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_{ij} = \frac{n^2(n^2+1)}{2}, \tag{1}$$

где  $a_{ij}$  - элементы сеточной матрицы для рассматриваемого слоя тензора.

Не трудно убедиться, что свойства (1) будут сохраняться для тензорных структур при выполнении ряда определенных внутренних преобразований. Например, преобразований следующих видов: переназначение чисел из множества  $\{1, 2, \dots, n^2\}$ ,

перестановка горизонтальных и вертикальных слоев, зеркальные отражения и другие из основной группы симметрий. Разумеется, что такие преобразования позволяют образовывать структуры тензоров, альтернативных стандартным. Также к признакам функционального самоподобия нужно отнести свойство аддитивного сохранения тензорных форм к требованиям Судоку, которое сформулируем здесь в виде теоремы.

**Теорема.** Тензор, полученный в результате суммирования произвольной тензорной структуры Судоку и константы  $\hat{G}_m(n)$  для  $1 \leq m \leq n^2$ , проведенное с учетом правила циклического ранжирования, удовлетворяет требованиям (1).

Доказательство. Не теряя общности, проведем доказательство теоремы для стандартных тензорных форм  $\hat{G}_0(n)$ . При этом, понимая тензорное представление константы в виде произведения  $\hat{C}_m^n(n) = m \cdot \hat{I}(n)$ , где  $\hat{I}(n)$  - кубический тензор, все ячейки которого заполнены единичными элементами. Также понимая под циклическим ранжированием операцию упорядочения ряда натуральных чисел с учетом ограниченного значения  $n^2$  циклов по алгоритму подобному дискретному часовому механизму (рис. 2), где после  $n^2$  снова следует 1, 2, 3 ...

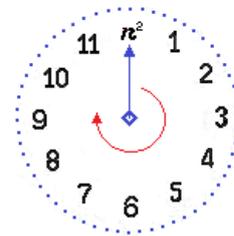


Рис. 2. Правило циклического ранжирования

Рассмотрим частный случай для тензора  $\hat{G}_0(2)$ , как наиболее простой для анализа. Здесь операция суммирования тензоров будет применяться в обычном смысле, когда элементы итогового тензора  $\hat{G}_\Sigma^m(2)$  равны алгебраической сумме соответствующих элементов двух тензорных структур. Однако результат каждого поэлементного суммирования в итоговом тензоре должен быть скорректирован по правилу циклического ранжирования. Поочередно рассмотрим все четыре возможных варианта для  $1 \leq m \leq 4$ .

Как представлено на рисунке 3 итоговые тензоры действительно удовлетворяют требованиям Судоку (1).

Причем, как и следовало ожидать, имеет место:

$$\hat{G}_\Sigma^m(4) \Big|_{m=n^2} = \hat{G}_0(n) + \hat{C}_m(n) \Big|_{m=n^2} = \hat{G}_0(n).$$

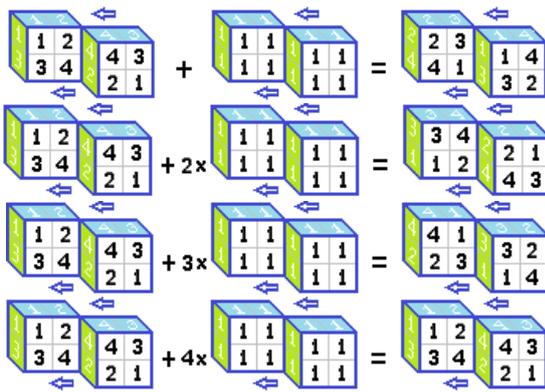


Рис. 3. Правило циклического ранжирования

Заметим, что используемое здесь правило циклического ранжирования натуральных чисел, позволяет рассматривать и суммирование тензоров с константами  $m > n^2$ . Однако при этом нужно иметь в виду, что структуры итоговых тензоров будут повторяться с циклом  $m = n^2$ .

Нетрудно выполнить подобные операции суммирования констант с тензорами для других порядков  $n=3$  и  $n=4$ , а затем индуктивным способом обобщить на случай произвольного порядка для  $\hat{G}_0(n)$ . Анализ для тензоров стандартного вида имеет естественное продолжение в тензорные структуры других видов. Таким образом, тензорные суммы произвольных (относительно размера и вида) тензоров Судоку и констант  $\hat{C}_m^n(n)$  для  $1 \leq m \leq n^2$ , полученные с учетом правила циклического ранжирования, будут удовлетворять обязательным требованиям (1). Что и требовалось доказать

### Задача синтеза конечных автоматов

Целью данного раздела является изучение возможностей реализации КА на основе введенных тензоров Судоку третьего ранга. Согласно общей теории [1], построение преобразователей дискретной информации с наперед заданным алгоритмом функционирования, определяется как задача синтеза автоматов. Эту задачу принято трактовать двояко: абстрактный синтез (как создание математической модели автомата) и структурный синтез (как разработку функциональной логической схемы автомата). Рассмотрим поочередно обе версии такой интерпретации задачи синтеза.

В рамках абстрактного синтеза автоматов называют общую модель, описываемую пятикомпонентным кортежем:

$$A = (X, Y, S, F_Y, F_S), \quad (2)$$

где первые три компонента – непустые множества:  $X \in \{x_1, x_2, \dots, x_m\}$  – входной алфавит (элементы  $x_m$  – входные сигналы, их последовательности – входные слова,  $m = 1, 2, \dots, M_{in}$ );  $Y \in \{y_1, y_2, \dots, y_\mu\}$  – выходной алфавит (элементы  $y_\mu$  – выходные сигналы, их последовательности – выходные слова,  $\mu = 1, 2, \dots, M_{ex}$ );  $S \in \{s_1, s_2, \dots, s_q\}$  – множество состояний (элемент  $s_q$  – отдельное состояние,  $q = 1, 2, \dots, Q$ );  $F_Y$  – функция выходов;  $F_S$  – функция переходов автомата из одного состояния в другое. Если множества  $X, Y, S$  – конечные, то такой автомат определяют как КА.

В рассматриваемом случае моделирования автомата на базе трехмерных тензорных структур типа Судоку множество состояний  $S$  (как вариантов построения кубических сеток) является счетным, и поэтому автомат следует отнести к типу КА. Более того, поскольку здесь автомат представляется не абстрактной математической моделью, а конкретной структурой тензорного объекта, предлагаемый КА следует определить как структурный КА. Такое определение подчеркивает принципиальное отличие рассматриваемого автомата от абстрактных КА, традиционно задаваемых табличными или граф-схемными способами.

В качестве входного элемента структурного КА может быть назначена квадратная панель (слой  $n \times n$ ) любой внешней грани кубического тензора  $\hat{G}(n)$ . Для определенности здесь в качестве входного элемента будем использовать панель нижней грани тензора, как показано на рисунке 3. При этом элементами  $x_m$  входного алфавита автомата  $X \in \{x_1, x_2, \dots, x_m\}$  следует рассматривать  $M_{in} = (n^2)!$  вариантов численного заполнения квадратной матрицы панели входа. Другими словами, входной алфавит КА, заданного тензором  $\hat{G}(n)$ , будет содержать  $(n^2)!$  элементов. Не трудно убедиться, что для каждого конкретного варианта построения матрицы панели входа (в случае принятого выше детерминированного способа построения всего тензора) количество вариантов построения сетки тензора равно  $(n-1)!$  с учетом возможных перестановок  $(n-1)$  слоев структуры, расположенных выше. Тогда количество элементов множества состояний автомата  $S \in \{s_1, s_2, \dots, s_q\}$  будет ограничено числом  $Q = (n-1)! \cdot (n^2)!$ , а функция переходов между состояниями автомата  $F_S$  в общем случае должна быть определена в виде векторной двухкомпонентной функции, где один компонент отвечает за выбор переходов в  $(n^2)!$  состояниях матрицы входной панели, а второй – за выбор варианта из  $(n-1)!$  слоев перестановок тензора. Разумеется, что при фиксации одного состояния матрицы входной панели или использования только одного варианта последова-

тельности слоев тензора функция  $F_s$  сводится к однокомпонентному виду.

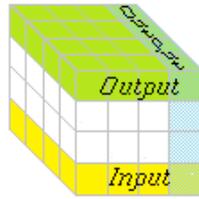


Рис. 4. Использование слоевых панелей тензора

В качестве выходного элемента структурного КА может быть назначена квадратная панель размера  $n \times n$  любого горизонтального (кроме нижнего) или вертикального слоя тензорной структуры, как схематично показано на рис. 3. В связи с этим, функция выходов  $F_y$  здесь должна объединять две операции: идентифицировать конкретную выходную слоевую панель, выбранную из  $(3n-1)$  возможных вариантов, и указывать интерпретацию ее текущего состояния. Поэтому, в общем случае,  $F_y$  следует рассматривать как многозначную функцию  $F_y = F_{Y_\eta}$ , где индекс  $\eta = 1, 2, \dots, (3n-1)$ . Разумеется, что такая трактовка функции выходов вызывает необходимость введения для каждого варианта выходной панели различных выходных алфавитов  $Y_\eta \in \{y_{1\eta}, y_{2\eta}, \dots, y_{m\eta}\}$ , размерность которых будет одинаковой и равна  $M_{ex} = (n^2)!$ , как и для входного алфавита КА.

Таким образом, в отличие от традиционных «векторных» КА (для описания которых используются понятия векторов состояний, векторов входных и выходных сигналов) для предлагаемых «тензорных» структурных КА корректным будет использование понятий: кубического тензора состояний автомата, входных и выходных матричных панелей. При этом принципиальным является  $(3n-1)$ -значность функции выхода КА и возможность одновременного использования  $(3n-1)$  различных выходных алфавитов.

Для наглядности проанализируем принципы функционирования структурных КА на примере минимального автомата для  $n=2$ . Такой КА обладает наименьшим числом компонентов модели (в частности, минимальной мощностью множества состояний  $S \in \{s_1, s_2, \dots, s_q\}$ ) и при этом функционально эквивалентен заданному типу автоматов. В данном примере количество состояний КА равно  $Q = (n-1)!(n^2)!|_{n=2} = 24$ , также как и число элементов его входного и 5-ти выходных алфавитов  $M_{ex} = M_{in} = (n^2)!|_{n=2} = 24$ . Будем считать КА инициальным с выделенным стандартным начальным состоянием, показанным на рис. 1, а. Как и ранее, входной панелью назначим слой нижней грани тен-

зорного куба  $\hat{G}(2)$ , состояние которой описывается матрицей  $\hat{S}_0^g = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$ . В качестве выходных панелей

здесь следует рассматривать: горизонтальный слой верхней грани тензора в состоянии  $\hat{S}_0^t = \begin{bmatrix} 4 & 3 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$ , вертикальный слой левой грани тензора в состоянии  $\hat{S}_0^l = \begin{bmatrix} 4 & 2 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$ , вертикальный слой правой грани тен-

ра в состоянии  $\hat{S}_0^r = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 4 & 2 \end{bmatrix}$ , вертикальный слой передней грани тензора в состоянии  $\hat{S}_0^f = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$  и вер-

тикальный слой задней грани тензора в состоянии  $\hat{S}_0^b = \begin{bmatrix} 4 & 3 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$ . Т.е. все состояния панелей являются попарно различными. В случае входных сигналов в виде любого парного переназначения цифровых ячеек состояния входной и выходных панелей всегда остаются попарно различными.

Это утверждение можно обобщить и на случай групповых сдвижек. Не теряя общности, проанализируем примеры операций суммирования на рисунке 3 тензорной структуры  $\hat{G}(2)$  и констант  $\hat{G}_m(2)$  для  $1 \leq m \leq 4$ . Этот анализ удобно провести на основании данных, представленных в таблице 1. Действительно, в каждой строке и в каждом столбце таблицы матричные состояния всех панелей являются попарно различными. При этом, как и следовало ожидать, в последней строке таблицы:  $\hat{S}_4^{(g,t,l,r,f,b)} = \hat{S}_0^{(g,t,l,r,f,b)}$ . Табличные данные подтверждают возможность для структурного КА параллельного введения различных алфавитов для всех выходных панелей. Следует заметить, что к такому же выводу можно прийти, анализируя подобным образом автомат на базе тензора  $\hat{G}(3)$ , а затем с помощью метода индукции обобщить корректность этого утверждения на случай  $\hat{G}(n)$  с произвольным  $n$ .

Что касается рассмотрения структурного синтеза, его логичнее начать с уточнения функционального типа, предлагаемого КА. Все автоматы (в том числе и предлагаемый) функционируют в дискретной временной шкале с целыми единицами, которыми являются моменты времени:  $\tau = 0, 1, 2, 3 \dots$ . Общую схему автомата обычно представляют в виде некоторого «черного ящика», осуществляющего преобразования входных сигналов в выходные сигналы. Фактор времени здесь учитывается введением

Таблица 1  
Таблица состояний матричных панелей

$\hat{C}_m(2)$	$\hat{S}_m^g$	$\hat{S}_m^t$	$\hat{S}_m^l$	$\hat{S}_m^r$	$\hat{S}_m^f$	$\hat{S}_m^b$
$\hat{C}_1(2)$	$\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 1 \end{vmatrix}$	$\begin{vmatrix} 1 & 4 \\ 3 & 2 \end{vmatrix}$	$\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{vmatrix}$	$\begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 3 \end{vmatrix}$	$\begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 4 & 1 \end{vmatrix}$	$\begin{vmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 3 \end{vmatrix}$
$\hat{C}_2(2)$	$\begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 1 & 2 \end{vmatrix}$	$\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 3 \end{vmatrix}$	$\begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 3 & 1 \end{vmatrix}$	$\begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 4 \end{vmatrix}$	$\begin{vmatrix} 4 & 3 \\ 1 & 2 \end{vmatrix}$	$\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 4 \end{vmatrix}$
$\hat{C}_3(2)$	$\begin{vmatrix} 4 & 1 \\ 2 & 3 \end{vmatrix}$	$\begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 4 \end{vmatrix}$	$\begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 4 & 2 \end{vmatrix}$	$\begin{vmatrix} 4 & 2 \\ 3 & 1 \end{vmatrix}$	$\begin{vmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 3 \end{vmatrix}$	$\begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 4 & 1 \end{vmatrix}$
$\hat{C}_4(2)$	$\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{vmatrix}$	$\begin{vmatrix} 4 & 3 \\ 2 & 1 \end{vmatrix}$	$\begin{vmatrix} 4 & 2 \\ 1 & 3 \end{vmatrix}$	$\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 4 & 2 \end{vmatrix}$	$\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 4 \end{vmatrix}$	$\begin{vmatrix} 4 & 3 \\ 1 & 2 \end{vmatrix}$

состояний тензора  $\hat{G}(n)$ , как своего рода «памяти о прошлом». Действительно, на один и тот же набор входных сигналов (значений компонентов алфавита X) автомат будет выдавать на соответствующих  $\eta$ -х панелях разные выходные сигналы (значения компонентов алфавитов  $Y_\eta$ ) в зависимости от состояния, в котором он находится в данный момент времени. Текущее состояние, в свою очередь, определяется алгоритмом функционирования автомата. Другими словами, каждой отдельной паре «состояние матричной панели  $Y_\eta$  – входной сигнал» ставится в однозначное соответствие определенное состояние тензора из множества  $S \in \{s_1, s_2, \dots, s_q\}$ , и наоборот. В этом смысле автомат является полностью определенным и устойчивым. Характеристические функции  $F_S$  и  $F_{Y_\eta}$  определяют, в какое состояние  $s_q \in S$  перейдет автомат в следующий  $(\tau+1)$ -й момент времени, и каковы будут значения выходных сигналов  $u_{\mu\eta} \in Y_\eta$  в текущий момент времени  $\tau$  на каждой панели выхода. Заметим, что для любой выбранной пары панелей входа и выхода характеристические функции являются однозначными. Тогда конечный автомат, заданный на группе указанных требований, можно определить как обобщенный КА первого рода (или КА Mealy) с многозначным выходом. Следовательно, к предлагаемым структурным КА могут применяться любые функционально логические схемы их использования, характерные автоматам первого рода.

### Особенности сетевого применения структурных конечных автоматов

В современных исследованиях КА применяются как модели для разнообразных компонентов аппаратного и программного обеспечения, что позволяет в общем случае рассматривать КА в качестве моделей сетевых элементов каналов обработки ин-

формации. В связи с этим, представление возможностей сетевого использования структурных КА требует отдельного внимания. Тем более, что такое использование для предлагаемых КА будет характеризоваться рядом принципиальных особенностей.

Узлы сложных машин (физических и виртуальных) обычно моделируются путем соединения КА так, чтобы они образовывали некоторую сеть, например, «нейронную сеть». При этом, допуская реализацию ветвления выходного волокна КА на множественное число входов последующих КА, требуют запрета объединения друг с другом выходных волокон различных КА. Разумеется, что в определенном смысле КА довольно просты. Однако нужно иметь в виду, что практические машины (объединяющие в сети большое количество КА) характеризуются огромными числами возможных состояний. Для примера приведем такую оценку относительно устройств оперативной памяти современных ПК (Random Access Memory - RAM), которые могут объединять несколько миллиардов элементов  $\Omega \approx \sigma \cdot 10^9$  (где натуральное число  $\sigma \leq 64$  [6]), каждый из которых имеет только два состояния. Общее число возможных состояний RAM представляет собой произведение чисел состояний всех элементов, то есть  $2^\Omega$  вариантов [2]. Заметим, что в числе  $2^\Omega$  основание в виде двойки определено тем, что КА (элементы RAM) являются элементами триггерного типа, поскольку характеризуются двумя возможными состояниями. Нужно понимать, что это оцениваемое число существенно возрастет, если в качестве КА будут использоваться рассматриваемые структурные КА. Учитывая, что множество состояний автомата  $\hat{G}(n)$  составляет число  $Q=(n-1)!(n^2)!$ , в общем случае вместо оценки  $2^\Omega$  получим число  $Q^\Omega$ . Даже в случае минимального автомата с  $n=2$  и  $Q=24$  это расширение является значительным.

Другой особенностью сетевого применения структурных КА является возможность увязки выхода и входа контактирующих между собой автоматов посредством принципа структурного согласования. При этом для связки КА могут быть выбраны различные правила. По нашему мнению, наиболее интересным (с практической точки зрения) является принцип согласования, показанный для минимального автомата на рисунке 5, а.

Здесь полагается, что сумма чисел для всех пар сопряженных ячеек входных

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} - \text{нижние слои}$$

тензоров) и выходных

$$\begin{vmatrix} 4 & 3 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} - \text{верхние слои тензо-}$$

ров) панелей КА, является константой  $P_n$ . Значение этой константы в случае тензоров произвольного

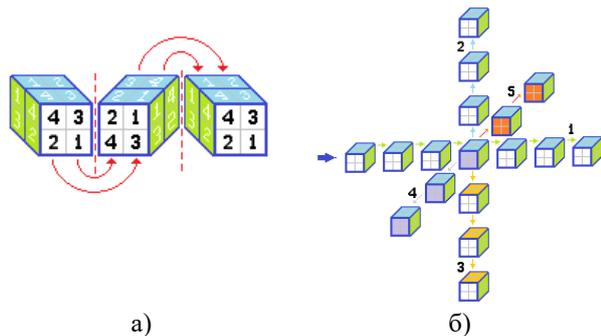


Рис. 5. Схемы коммуникационных каналов из структурных КА

размера  $\hat{G}(n)$  равно  $P_n = (n^2 + 1)$ . На рисунке 5, а  $P_n=5$ . Предполагаем, что информационный сигнал будет передан от автомата к автомату (вдоль показанного стрелками направления) только при выполнении указанного требования. Если хотя бы для одной пары сопряженных ячеек сумма чисел будет отличаться от  $P_n$ , то сигнал по сети транслироваться не будет. Таким образом, мы получаем возможность использования введенного принципа структурного согласования для реализации вентильной функции КА, где значение параметра  $P_n$  может служить аналогом вентильного порога [2]. Если в качестве входной панели рассматривать слой основания тензорной структуры, а в качестве выходных – слои ее верхней и боковых граней одновременно, то с помощью такого КА можно моделировать коммутаторный узел многоканального разветвления сети. Для минимального КА на рисунке 5, б показан пример 5-ти канального сетевого коммутатора. При этом принцип структурного согласования может быть использован для всех параллельных коммуникационных каналов.

Традиционно для управления информационным потоком в канале будем использовать выделенное «волокно», по которому можем производить контроль выполнения принципа согласования КА или введение упреждающих рассогласований между автоматами. Переназначения чисел в ячейках входной панели автомата требует перестройки всего тензора структурного КА. Поэтому, в качестве удобного для интерпретации варианта такой управляемой перестройки структуры тензора, может быть предложена операция виртуального поворота тензора вокруг любой из трех его осей (или комбинация этих поворотов). Схематический пример реализации управления минимальным КА показан на рисунке 6. Предложенный способ управления структурным КА является очень удобным и с точки зрения его практической реализации, которая имеет два важных аспекта: аппаратный и программный. Аппаратное управление легко осуществить с помощью введения

контура «обратной связи». Программные ресурсы могут быть существенно сокращены, поскольку здесь отсутствует необходимость сохранять в памяти процессора все промежуточные состояния тензорной структуры (достаточно хранить информацию о эволюционной последовательности виртуальных «поворотов» тензора КА).

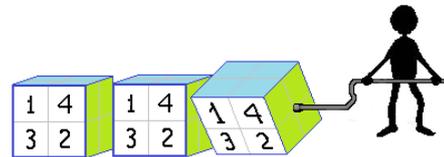


Рис. 6. Принцип управления в канале из структурных КА

Основная идея здесь заключается в одновременном использовании волокон внешнего управления КА и контура «обратной связи» его внутреннего управления, который замыкает выход и вход одного и того же автомата. Будучи однажды возбужденным внешним сигналом «запуск», КА будет продолжать прописанные внутренние структурные трансформации во все последующие моменты времени до тех пор, пока не будет остановлен сигналом «останов» (либо внешнего, либо внутреннего управления). В течение периода активности КА будет разрешать дальнейшее прохождение информации при выполнении принципа структурного согласования. Как и в [2], создание в контуре «обратной связи» замкнутых эволюционных «петель» и циклов следует рассматривать как возможность реализации КА (или сетей) с динамической памятью.

Одним из важных практических примеров реализации таких схем являются импульсные счетчики, которые выдают на выходе единственный импульс после каждого целого числа  $s_0$  импульсов на их входе. Во многих вычислительных алгоритмах подобные устройства служат основой для выполнения счета и других арифметических операций. Предположим, что в начальном состоянии управляемый КА рассогласован с соседними путем закручивания «пружинного спускового механизма» на  $s_0$  поворотов. Каждый поступающий на вход импульс инициирует один последующий виртуальный поворот тензора КА (то есть переводит КА в новое состояние). На  $s_0$ -м шаге, при выполнении принципа структурного согласования, автомат передает импульс далее по каналу. При этом срабатывает «обратная связь» и возвращает «пружинный спусковой механизм» КА в начальное состояние. Следует обратить внимание, что в предложенном варианте применения, структурный КА заменяет комбинационную цепочку нескольких автоматов триггерного типа [2].

## Заклучение

В финишном разделе статьи кратко представим возможности для использования предлагаемых структурных КА в разных приложениях, помимо тех, что описаны выше.

Предварительно заметим, что (согласно требований, которые указаны в процессе синтеза автоматов) структурные КА следует рассматривать как автоматы полностью определенные, устойчивые и детерминированные. Однако последнее определение может быть сведено к условной характеристике, если вероятностный режим применить к выбору конкретной действующей функции из множества выходных. То есть многозначность выходной функции структурного автомата в моделях абстрактных КА позволяет ввести случайный выбор для действующей (в данный момент времени) выходной функции. При этом для такого выбора могут быть рассмотрены различные вероятностные закономерности.

Многозначность функции выхода структурных КА также может быть положена в основу эффективных алгоритмов параллельных вычислений. В настоящее время такие алгоритмы затребованы в создании распределенных многоуровневых приложений для новых информационных продуктов и услуг. Например, в автоматизированных банковских и логистических системах. Также подобные алгоритмы могут быть адаптированы к инновационным технологиям в исследованиях когнитивной науки. В частности, для гранулярных вычислений [7], где в модели трехсторонних вычислений используются два типа структур, представленных соответственно тремя гранулами и тремя уровнями.

Отдельное направление связано с возможностью использования структурных КА в моделировании нейронных сетей различных назначений. Отметим, что в рамках этого направления могут быть рассмотрены колебательные режимы тензорных структур КА, моделирование которые может базироваться на свойстве аддитивного сохранения тензорных форм к требованиям Судоку.

По мнению авторов, предложенная идея построения структурных КА является достаточно плодотворной для расширения возможностей моделирования, как для указанных направлений, так и для многих других. Именно это основание было важнейшей мотивацией к написанию этой статьи, в ко-

торой воплощается желание поделиться авторской идеей с мировым научным сообществом.

## Литература

1. Hopcroft, J. E. *Introduction to automata theory, Languages and Computation [Text]* / J. E. Hopcroft, R. Motwani and J. D. Ullman. – Pearson Education Limited, 2014. – 488 p.
2. Minsky, M. L. *Computation: finite and infinite machines [Text]* / M. L. Minsky. – Englewood Cliffs, N. J. : Prentice-Hall, 1967. – 317 p.
3. Fiske, M. S. *Non-deterministic secure active element machine [Text]* / M. S. Fiske. – U.S. Patent, 2015. – 843 p.
4. Russel, E. *Mathematics of Sudoku II [Text]* / E. Russel and A. F. Jarvis // *Mathematical Spectrum* 39. – P. 54–58.
5. Penkin, Y. *Deterministic Chaos in Vibrations of Discrete Structures of Matrix Type [Text]* / Y. Penkin, G. Khara // *Proc. Inter. Scien.-Pract. Conf. on Problems of Infocommunications Science and Technology (PIC&T 2018)*, oct. 9-12, 2018. – Kharkiv (Ukr.) – Vol. 2. – P. 548-552.
6. Mueller, Sc. *Upgrading and Repairing PCs (19th Edition) [Text]* / Sc. Mueller. – USA: Person Education, Inc., 2010. – 1156 p.
7. Yao, Y. *Three-way decision and granular computing [Text]* / Y. Yao // *International Journal of Approximate Reasoning*. – 2018. – Vol. 103. – P. 107-123.

## References

1. Hopcroft, J. E., Motwani, R., Ullman, J. D. *Introduction to automata theory, Languages and Computation*. Pearson Education Limited, 2014. 488 p.
2. Minsky, M. L. *Computation: finite and infinite machines*. Englewood Cliffs, N. J., Prentice-Hall Publ., 1967. 317 p.
3. Fiske, M. S. *Non-deterministic secure active element machine*. U.S. Patent, 2015. 843 p.
4. Russel, E., Jarvis, A. F. *Mathematics of Sudoku II*, *Mathematical Spectrum* 39, pp. 54–58.
5. Penkin, Y., Khara, G. *Deterministic Chaos in Vibrations of Discrete Structures of Matrix Type*. *Proc. Inter. Scien.-Pract. Conf. on Problems of Infocommunications Science and Technology*. Kharkiv, 2018, vol. 2, pp. 548-552.
6. Mueller, Sc. *Upgrading and Repairing PCs (19th Edition)*. USA, Person Education Publ., 2010. 1156 p.
7. Yao, Y. *Three-way decision and granular computing*. *International Journal of Approximate Reasoning*, 2018, vol. 103, pp. 107-123.

## СТРУКТУРНІ АВТОМАТИ У ВИГЛЯДІ ТЕНЗОРІВ ТРЕТЬОГО РАНГУ ТИПУ СУДОКУ

*Ю. М. Пенкін, А. О. Федосеева*

Представлені концепція побудови і загальні принципи роботи кінцевих автоматів нового виду, для яких вхідними та вихідними елементами є панелі квадратних матриць, а переходи між їх станами визначаються числовими тензорами третього рангу. При цьому структура тензорів задається у вигляді кубічних сіток, в осередках яких розташовані натуральні числа згідно з принципом побудови Судоку. Вказано алгоритм побудови таких тензорів довільного розміру. Структури тензорів, побудованих при використанні ранжируваних множин натуральних чисел, визначені як стандартні. Показано, що можливість визначення тензорів типу Судоку за допомогою одного розмірного параметру є базовою для прояву їх функціонального самоподібності. Властивість адитивного збереження структури чисельних тензорів третього рангу до вимог Судоку сформульовано у вигляді теореми. Доведено, що тензор, отриманий в результаті підсумовування довільний тензорною структури і константи з урахуванням введеного правила циклічного ранжирування, задовольняє загальним вимогам Судоку. Розглянуто завдання абстрактного і структурного синтезів кінцевих автоматів на базі аналізованих тензорних структур. При цьому завдання абстрактного синтезу традиційно визначалася як створення математичної моделі автомата, а завдання структурного синтезу – як розробка його функціональної логічної схеми. На підставі багатозначності функції виходу кінцевого автомата обґрунтована можливість одночасного використання декількох різних вихідних алфавітів. Описано режими функціонування мінімального кінцевого автомата запропонованого типу на прикладі ініціального автомату з виділеним стандартним початковим станом. У загальному випадку показано, що кінцеві автомати, задані на групі зазначених вимог, можна віднести до узагальнених кінцевим автоматам першого роду (або автоматам Mealy) з багатозначним виходом. Представлені особливості мережевих застосувань структурних автоматів. Проаналізовано варіанти віз-мужніх додатків розглянутих кінцевих автоматів

**Ключові слова:** кінцевий автомат; синтез автомата; тензор переходів; принцип Судоку.

## STRUCTURAL STATE MACHINES IN THE FORM OF THE TENSORS OF THE THIRD RANK SUDOKU TYPE

*Yu. M. Penkin, A. O. Fedoseeva*

The construction concept and general principles of the operation of a new kind of finite state machine are presented, for which the input and output elements are panels of square matrices, and the transitions between their states are determined by numerical tensors of the third rank. In this case, the structure of the tensors is specified in the form of cubic grids, in whose cells' natural numbers are located according to the principle of Sudoku construction. An algorithm for constructing such tensors of arbitrary size is indicated. The structures of tensors constructed using ranked sets of natural numbers are defined as standard. It is shown that the possibility of determining Sudoku type tensors using a one-dimensional parameter is basic for the manifestation of their functional self-similarity. The property of additive conservation of the structure of numerical tensors of the third rank to the requirements of Sudoku is formulated as a theorem. It is proved that the tensor obtained by summing an arbitrary tensor structure and a constant, taking into account the introduced cyclic ranking rule, satisfies the general requirements of Sudoku. The problems of abstract and structural synthesis of finite state machine based on the analyzed tensor structures are considered. In this case, the task of abstract synthesis has traditionally been defined as the creation of a mathematical model of an automaton, and the task of structural synthesis is just the development of its functional logical scheme. Based on the ambiguity of the function of the output of the finite state machine, the possibility of the simultaneous use of several different output alphabets is substantiated. The modes of functioning of the minimal finite state machine of the proposed type are described by the example of an initial state machine with a distinguished standard initial state. In the general case, it is shown that the finite state machines defined on the group of these requirements can be attributed to generalized first-order finite-state machines (or Mealy machines) with a multi-valued output. The features of network applications of structural automata are presented. Variants of possible applications of the considered finite state machines are analyzed.

**Keywords:** finite state machine; machine synthesis; transition tensor; Sudoku principle.

**Пенкін Юрій Михайлович** – д-р физ.-мат. наук, доцент, профессор кафедры фармакоинформатики, Национальный фармацевтический университет, Харьков, Украина

**Федосеева Алина Александровна** – канд. техн. наук, Харьковский радиотехнический колледж, Харьков, Украина

**Penkin Yuriy Mikhailovich** – Doctor of Science degree, Full professor, National Pharmaceutical University, Kharkov, Ukraine, e-mail: penkin\_@gmail.com, ORCID Author ID: 0000-0002-7265-0227.

**Fedoseeva Alina Aleksandrovna** – PhD in Computer Science, Kharkov Radiotechnical College, National Aerospace University, Kharkov, Ukraine, e-mail: fedoseeva439@gmail.com, ORCID Author ID: 0000-0002-6684-5802.