doi: 10.32620/oikit.2025.104.07

УДК 531.8

О. О. Баранов, А. С. Сорока, А. О. Бреус

Аналітичне моделювання прямої кінематики підлогового промислового робота з п'ятьма ступенями свободи методом Денавіта-Хартенберга

Національний аерокосмічний університет «Харківський авіаційний інститут»

У статті представлено аналітичне розв'язання прямої задачі кінематики для підлогового промислового робота-маніпулятора з п'ятьма ступенями свободи, що призначений для виконання точних виробничих операцій, таких як позиціювання, збирання, переміщення та обробка деталей. Кінематична структура робота включає дві поступальні та три обертальні координати, що забезпечують широкий діапазон руху виконавчого органу в просторі. Для побудови математичної моделі використано класичний метод Денавіта–Хартенберга, який дозволяє формалізовано описати кінематичний ланцюг маніпулятора шляхом послідовних однорідних перетворень між локальними координатними системами. У процесі моделювання виконано послідовне встановлення координатних систем для кожної ланки механізму, побудовано таблицю параметрів D-H та обчислено відповідні матриці перетворення. На основі цих даних отримано загальну трансформаційну матрицю, що описує положення та орієнтацію захоплювача у базовій системі координат. Додатково проведено симуляційне моделювання руху маніпулятора із заданими змінами кутів і лінійних координат у часі. Побудовано графіки зміни положення та орієнтації кінцевого елемента, які підтвердили коректність роботи моделі та логічну узгодженість розрахунків. Отримані результати є основою для подальших досліджень зворотної кінематики, траєкторного керування, побудови цифрових двійників, а також інтеграції системи в CAD/CAE середовища. Запропонований підхід є ефективним для промислових застосувань, які вимагають високої точності, повторюваності та гнучкості в умовах сучасного виробництва. Отримана кінематична модель має універсальний характер і може бути адаптована до різних конфігурацій підлогових маніпуляторів, що використовуються у виробничих системах з високими вимогами до точності позиціювання. Завдяки модульній структурі, вона придатна для подальшої інтеграції в робототехнічні комплекси, цифрові платформи та віртуальні тестові середовища. Зокрема, її можна використовувати для формування навчальних траєкторій, оптимізації конфігурацій обладнання або попередньої валідації керувальних алгоритмів. Такий підхід значно скорочує витрати на фізичне тестування і прискорює цикл проєктування нових роботизованих рішень, що є особливо актуальним у контексті концепцій Індустрії 4.0 та гнучкого виробництва.

Ключові слова: підлоговий робот-маніпулятор, пряма кінематика, метод Денавіта-Хартенберга, моделювання.

Вступ

У контексті зростаючої потреби в автономних та допоміжних роботизованих системах для побутових та реабілітаційних завдань, останні дослідження демонструють активний розвиток мобільних маніпуляторів, здатних взаємодіяти з об'єктами на підлозі. Й. Бай та С. Джанг [1] представили домашнього сервісного робота з двома колесами та двома довгими руками, сконструйованого для виконання завдань прибирання й маніпуляцій з об'єктами на підлозі. Автори провели кінематичний аналіз маневреності маніпуляторів для оптимізації роботи з низько розташованими предметами. Інше вагоме дослідження, проведене А. Джейн і С. Кемп [2], стосується мобільного маніпулятора EL-E, який може автономно знаходити й захоплювати предмети з плоских поверхонь. Автори описали апаратну частину, сенсорні системи та алгоритми навігації, виявлення об’єктів і захоплення. EL-E досяг високих результатів у роботі з різними категоріями предметів, хоча залишаються проблеми з прозорими та відбивними поверхнями, а також із швидкодією й обмеженою навігацією. С. Кінг з колегами [3] дослідили Dusty — телеробота, що виконує захоплення впущених предметів. Учасники з обмеженнями руху (ALS) досягли 98% успішності, підкреслюючи ефективність і простоту використання. Огляд А. Біллард і Д. Крейджик узагальнює сучасні тенденції у маніпуляціях: від простих захоплювачів до гнучких адаптивних систем з машинним навчанням [4]. Ключовим викликом визначено побудову надійної взаємодії між людьми й роботами. Нарешті, С. Кемп із співавторами [5] акцентують на перспективі роботів у людських середовищах, які стануть активними помічниками в повсякденному житті. Очікується розширення функціональних можливостей маніпуляторів у побутових умовах, з урахуванням складних, змінних і неструктурованих середовищ.

Незважаючи на розвиток інтелектуальних систем, упродовж останніх років спостерігається суттєве зростання дослідницького інтересу до мобільних та стаціонарних роботів-маніпуляторів, призначених, перш за все, для промислового використання. С. Ібаракі і А. Арченті [6] наголошують, що ключовими напрямами розвитку є точність позиціювання, калібрування, інтеграція систем керування та програмування, що підвищують ефективність застосування роботів у виробництві. Практичну реалізацію таких підходів проаналізовано О. Медсен з колегами [7], які інтегрували автономних мобільних маніпуляторів у реальне виробниче середовище, де вони виконували логістичні та монтажні підзадачі. Попри успіх, дослідження виявило технічні й організаційні труднощі, зокрема обмежене поширення таких рішень у промисловості. К. Алієв та Д. Антонеллі [8] довели, що комерційні мобільні платформи та маніпулятори можуть ефективно взаємодіяти з операторами в умовах частково автоматизованих або неструктурованих виробничих середовищ. У сфері будівництва П. Гонзалес з колегами [9] запропонували 6-ступеневий маніпулятор для монтажу гіпсокартонних панелей, пристосований до роботи між підлогою і стелею. А. Балдассарі зі співавторами [10] презентували реконфігурований мобільний маніпулятор, який забезпечує гнучкість і колаборативність, але вимагає вдосконалення щодо автономності, безпеки та часу виконання операцій. З урахуванням специфічних потреб харчової промисловості, М. Мейсі з колегами [11] сформулювали вимоги до недорогих роботів: легке очищення, швидкість роботи та мінімальна вартість. Водночас Р. Іслам з колегами [12] представили автономну роботизовану систему з машинним зором, здатну виконувати сортування й маніпулювання об'єктами, застосовуючи пряме та зворотне кінематичне моделювання. Ключовим елементом багатьох роботів є точне визначення кінематичних параметрів. А. Хайат із співробітниками [13] розробили метод аналітичної ідентифікації параметрів Денавіта-Хартенберга за допомогою сингулярного розкладу, що дозволяє використовувати пристрої з обмеженим діапазоном вимірювання. Альтернативний підхід до традиційної DH-моделі представили С. Аїз і С. Кучек [14], які застосували експоненціальні матриці обертань, що забезпечують кращу фізичну інтерпретацію та зручність реалізації в програмному середовищі. Сукупно ці дослідження підкреслюють актуальність і багатовекторність розвитку роботизованих маніпуляторів у промисловості, з акцентом на адаптивність, точність, інтеграцію та взаємодію з людиною.

Метод Денавіта–Хартенберга (D-H) залишається одним із найпоширеніших інструментів для опису кінематичних властивостей серійних промислових роботів. Л. Балачкова [15] описує застосування цього методу для розв’язання прямої кінематики у структурі типу RRRT, підкреслюючи важливість вибору координатних систем для кожної ланки механізму та побудови робочих областей. У свою чергу, Ф. Дінг і С. Ліу [16] пропонують удосконалену версію методу — «координатно-фіксований D-H», що підвищує точність та ефективність при аналізі робочої області свердлильного маніпулятора. Д. Лі [17] та С. Фаріа [18] зосереджуються на проблематиці ідентифікації D-H параметрів. Перша група авторів пропонує метод калібрування промислових роботів із використанням лазерного трекера та сингулярного розкладу для підвищення точності позиціювання. Друга – розробляє автоматизований алгоритм визначення параметрів D-H, що базується на геометричних операціях і алгебрі подвійних векторів. Обидві праці підкреслюють потребу у точному налаштуванні моделей при впровадженні роботів у виробничі середовища. Р. Сінгх з колегами [19] у своєму оглядовому дослідженні порівнюють класичну та модифіковану версії методу D-H з альтернативними підходами, такими як метод добутку експонент (PoE) та трикутний метод. Вони також розглядають чисельні та аналітичні підходи до зворотної кінематики та поняття кінематичної особливості як важливого аспекту розрахунків. Г. Ванг і М. Гранія із співавторами [20, 21] детально аналізують відмінності між класичною та модифікованою D-H нотацією, зокрема в розміщенні координатних систем та послідовності обертань і зсувів. Г. Лупкін [22] порівнює три варіанти D-H позначень — оригінальну, дистальну та проксимальну. Він робить висновок, що саме проксимальна версія забезпечує найкращу прозорість при аналізі відкритих кінематичних ланцюгів.

Загалом, ці дослідження засвідчують високу актуальність тематики D-H параметризації для точного моделювання, калібрування та автоматизації промислових маніпуляторів, а також важливість адаптації обраного методу до конкретних конфігурацій та прикладних задач.

Основний матеріал

Опис робота-маніпулятора і формулювання прямої задачі кінематики. Розв’язання прямої задачі кінематики для підлогових промислових роботів-маніпуляторів є надзвичайно важливим етапом у забезпеченні їхньої точності, ефективності та безпеки в автоматизованих виробничих процесах. Саме ця задача дозволяє визначити положення та орієнтацію виконавчого органу на основі заданих параметрів зчленувань, що є критично важливим для керування рухом, моделювання, симуляції та взаємодії з об’єктами в робочому середовищі. У підлогових маніпуляторів, які зазвичай виконують точні й повторювані операції, такі як збирання, пакування або обробка деталей, навіть незначні відхилення у визначенні координат кінцевого елемента можуть призвести до технологічних похибок або механічних збоїв. Крім того, правильне вирішення прямої кінематики є основою для побудови моделей зворотної кінематики, аналізу досяжності та оптимізації траєкторій руху. У контексті інтеграції роботів у гнучкі виробничі лінії та «розумні фабрики», точна кінематична модель сприяє створенню цифрових двійників, валідації програм керування та забезпеченню адаптивного налаштування в умовах зміни задач або компонування. Таким чином, аналітичне розв’язання прямої кінематики є не лише фундаментальним етапом у розробці роботизованої системи, а й ключовою умовою для її практичного впровадження в сучасному промисловому середовищі. Для розрахунку пропонується 5-координатний робот-маніпулятор, що може бути змонтований на монорельсі або зубчастій рейці та у майбутньому заплановано на роботу з навантаженням до 10 кг на дистанції до 10000 мм. 3D модель робота-маніпулятора показана на рис. 1. Зображена схема демонструє конструкцію підлогового промислового робота-маніпулятора з п’ятьма ступенями свободи. Робот включає два поступальних ступені свободи, що реалізують горизонтальне переміщення S_1 основи вздовж підлоги та вертикальне переміщення каретки S_2. Наступні три ступені свободи є обертальними: обертання Θ_3 забезпечує поворот важеля, обертання Θ_4 – зміну орієнтації горизонтальної ланки, і, нарешті, обертання Θ_5 відповідає позиціюванню інструментального органу. Така конструкція є типовою для промислових роботів, які виконують точні маніпуляції у виробничому середовищі – наприклад, при збиранні, зварюванні або обробці деталей. Завдяки своїй модульній структурі та монтажу до підлоги, маніпулятор забезпечує жорсткість, надійність і точність у позиціюванні кінцевого елемента, що є критично важливим у завданнях автоматизації.

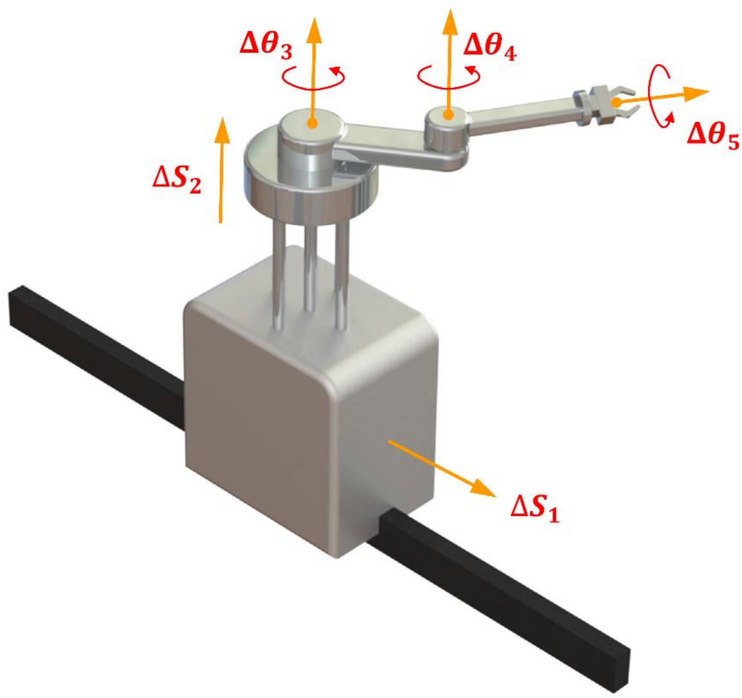


Рис. 1. Модель перспективного робота-маніпулятора підлогового типу

Для прогнозування положення виконавчого органу робота-маніпулятора (захоплювача, зварювальної головки, фарбопульта тощо) необхідно розраховувати залежності орієнтації і координат цього органу у базовій системі координат, відносно якої ведеться відлік при змінenні узагальнених координат, які, у свою чергу, залежать від положення виконавчих приводів (валів електричних двигунів, штоків пневмо- та гідро-циліндрів тощо) у певний момент часу.

Пряма задача кінематики маніпуляторів формулюється так: задана кінематична схема маніпулятора і в певний момент часу відомі значення узагальнених координат, що визначають положення всіх ланок маніпулятора одна відносно одної. Потрібно визначити положення і орієнтацію останньої ланки маніпулятора (захоплювача) у системі відліку, зв'язаної зі стояком. Геометричні розміри ланок вважаються заданими.

Опис спеціальної системи координат. Для розв’язання прямої задачі кінематики робота-маніпулятора моделі AR3 застосовуємо метод Денавіта-Хартенберга. Першим етапом реалізації цього методу є впровадження до кінематичної схеми маніпулятора осей, які підлягають наступним вимогам. Віссю обертальної пари (i, $i + 1$), складеної з ланок i та $i + 1$, є вісь циліндричного шарніра, жорстко зв'язана з ланкою i, навколо якої обертається ланка $i + 1$. Для поступальної пари (i, $i + 1$) віссю є будь-яка пряма, паралельна вектору швидкості поступального руху ланки $i + 1$ відносно ланки i.

Другим етапом є нумерація всіх ланок маніпулятора від стояка (ланка 0) до захоплювача (ланки n), після чого кожною ланкою необхідно зв'язати свою систему декартових координат, вибрану таким чином: вісь z_i проходить по осі кінематичної пари (i, $i + 1$); початок координат системи i, жорстко зв'язаної з ланкою i, лежить або на загальному перпендикулярі до осей z_{i-1} і z_i, або в точці їх перетину (якщо така є), або в будь-якій точці осі кінематичної пари, якщо вісь z_i збігається з віссю z_{i-1} або паралельна їй; вісь x_i проходить по загальному перпендикуляру, проведеному до осей z_{i-1} і z_i і спрямованому від точки перетину цього перпендикуляра з віссю z_{i-1} до точки його перетину з віссю z_i (або в будь-яку сторону по нормалі до площини, що містить осі z_{i-1} і z_i, якщо вони перетинаються, або довільним способом, якщо z_{i-1} і z_i проходять по одній прямій); вісь y_i вибирається за правилом правої трійки векторів. Початок координат системи 0, тобто системи, жорстко зв'язаної зі стояком, може лежати в будь-якій точці осі пари (0, 1); вісь x_0 прямує довільним чином. При цьому вибір системи n теж не піддається загальному правилу, оскільки ланка $n + 1$ відсутня. Тому пропонується уявити будь-який тип пари (n, $n + 1$) і після цього вибрати систему за загальним правилом. Початок вибраної таким чином системи називається центром захоплювача. Застосовуємо цей алгоритм до кінематичної схеми досліджуваного підлогового робота-маніпулятора і отримуємо наступну схему (рис. 2). Для досліджуваної кінематичної схеми маніпулятора будуємо і поступово заповнюємо таблицю 1 параметрів переходу від базової спеціальної системи координат до останньої, що пов’язана із робочим органом маніпулятора. Згідно з методом Денавіта-Хартенберга, спеціальний вибір систем координат ланок маніпулятора дозволяє за допомогою лише чотирьох параметрів (а не шести, як у загальному випадку) описати перехід з однієї системи в іншу. Систему $i - 1$ можна перетворити на систему i за допомогою повороту, двох зсувів (переносів) і ще одного повороту, які виконуються в такому порядку:

1) поворот системи $i - 1$ навколо осі z_{i-1} на кут Θ_i до тих пір, поки вісь x_{i-1} не стане паралельною осі x_i;

2) зсув повернені системи уздовж осі z_{i-1} на величину s_i до тих пір, поки осі x_{i-1} і x_i не опиняться на одній прямій;

3) зсув уздовж осі x_i на величину a_i до тих пір, поки не зійдуться початки координат;

4) поворот навколо осі x_i на кут α_i до суміщення осі z_{i-1} з віссю z_i.

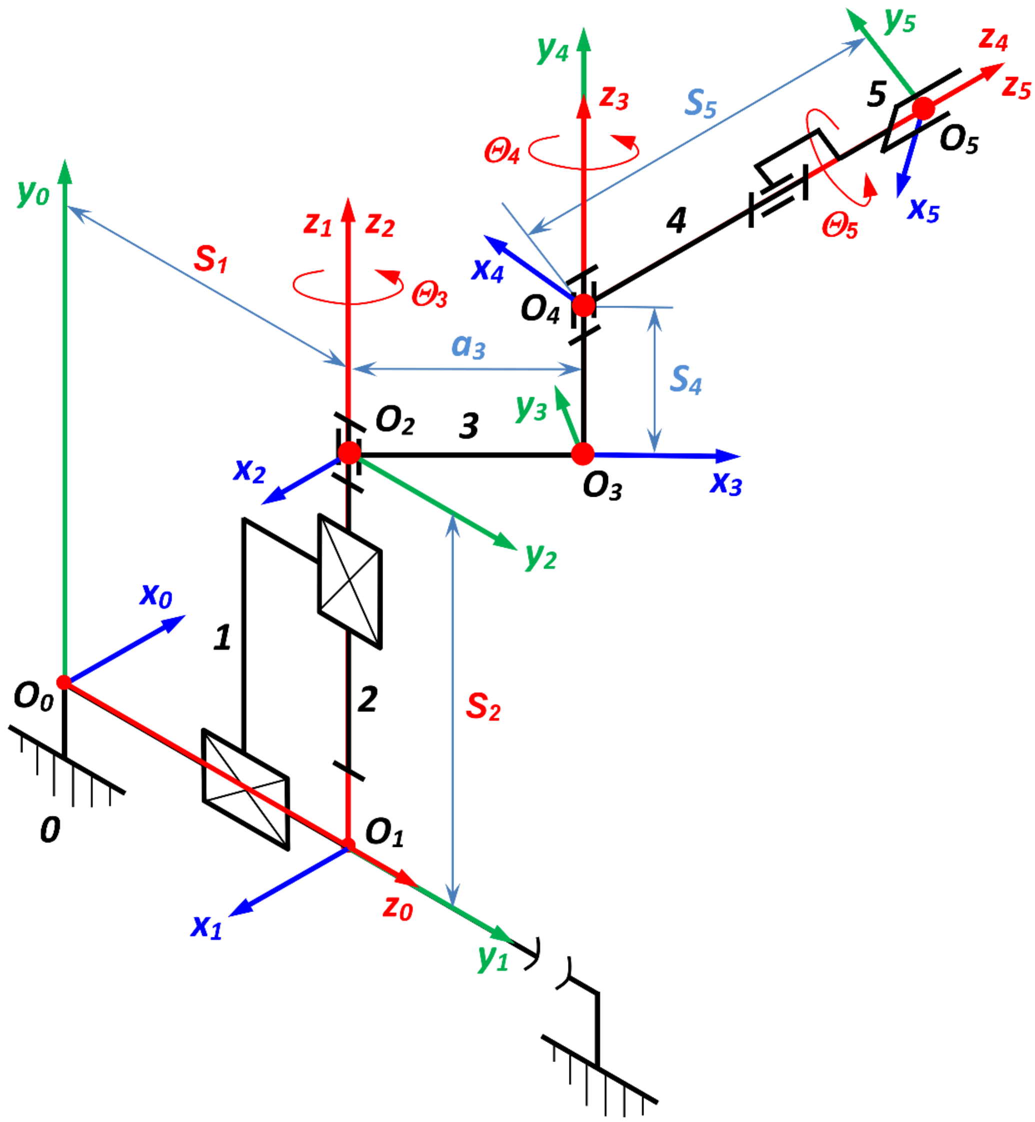


Рис. 2. Кінематична схема підлогового робота-маніпулятора,
що застосовується для розв’язання прямої задачі кінематики

Отже, для заповнення Таблиці 1 виконуємо наступні дії.

Спочатку розглядаємо кінематичну пару 0-1, що пов’язана з ланками 0 і 1 – перехід від СК $X_0Y_0Z_0$ (система «0») до $X_1Y_1Z_1$ (система «1»):

1) поворот системи 0 навколо осі z_0 на кут Θ_1 доти, поки вісь x_0 не стане паралельній осі x_1 – ці осі антипаралельні, отже це стала величина π;

2) зсув повернені системи вздовж осі z_0 на величину S_1 до тих пір, поки осі x_0 і x_1 не будуть на одній прямій – це змінна величина S_1;

3) зсув вздовж осі x_1 на величину a_1, до тих пір, поки початки координат не стануть збігатися – початки координат співпали після попереднього кроку, отже $a_1 = 0$;

4) поворот навколо осі x_1 на кут α_1 до поєднання осі z_0 з віссю z_1 – це кут $\alpha_1 = \pi/2$.

Результати заносимо в перший рядок Таблиці 1.

Переходимо до кінематичної пари 1-2, що пов’язана з ланками 1 і 2 – перехід від СК $X_1Y_1Z_1$ (система «1») до $X_2Y_2Z_2$ (система «2»):

1) поворот системи *1* навколо осі z_1 на кут Θ_2 доти, доки вісь x_1 не стане паралельній осі x_2 – ці осі вже паралельні, отже це стала величина $\Theta_2 = 0$;

2) зсув повернeної системи вздовж осі z_1 на величину S_2 до тих пір, поки осі x_1 і x_2 не будуть на одній прямій – це змінна величина S_2;

3) зсув вздовж осі x_2 на величину a_2 до тих пір, поки початки координат не почнуть збігатися – початки координат співпали після попереднього кроку, отже $a_2 = 0$;

4) поворот навколо осі x_2 на кут α_2 до поєднання осі z_1 з віссю z_2 – ці осі співпадали з самого початку, отже $\alpha_2 = 0$.

Результати заносимо до другого рядка Таблиці 1.

Переходимо до кінематичної пари 2-3, що пов'язана з ланками 2 і 3 – перехід від СК $X_2Y_2Z_2$ (система «2») до $X_3Y_3Z_3$ (система «3»):

1) поворот системи 2 навколо осі z_2 на кут Θ_3 доти, поки вісь x_2 не стане паралельній осі x_3 – це змінний параметр Θ_3;

2) зсув повернeної системи вздовж осі z_2 на величину S_3 до тих пір, поки осі x_2 і x_3 не будуть на одній прямій – ці осі співпали після попереднього кроку, отже $S_3 = 0$;

3) зсув вздовж осі x_3 на величину a_3 до тих пір, поки не зійдуться початки координат – це стала величина a_3, яка дорівнює відстані O_2–O_3;

4) поворот навколо осі x_3 на кут α_3 до поєднання осі z_2 з віссю z_3 – ці осі співпали після попереднього кроку, отже $\alpha_3 = 0$.

Результати заносимо в третій рядок Таблиці 1.

Переходимо до кінематичної пари 3-4, що пов'язана з ланками 3 і 4 – перехід від СК $X_3Y_3Z_3$ (система «3») до $X_4Y_4Z_4$ (система «4»):

1) поворот системи *3* навколо осі z_3 на кут Θ_4 доти, поки вісь x_3 не стане паралельній осі x_4 – це змінний кут Θ_4;

2) зсув повернeної системи вздовж осі z_3 на величину s_4 до тих пір, поки осі x_3 і x_4 не будуть на одній прямій – це стала величина S_4, яка дорівнює відстані O_3–O_4;

3) зсув вздовж осі x_4 на величину a_4 до тих пір, поки не зійдуться початки координат – початки координат співпали після попереднього кроку, отже $a_4 = 0$;

4) поворот навколо осі x_4 на кут α_4 до поєднання осі z_3 з віссю z_4 – це сталий кут $\alpha_4 = \pi/2$.

Ці результати заносимо в четвертий рядок Таблиці 1.

Переходимо до кінематичної пари 4-5, що пов'язана з ланками 4 і 5 – перехід від СК $X_4Y_4Z_4$ (система «4») до $X_5Y_5Z_5$ (система «5»):

1) поворот системи *4* навколо осі z_4 на кут Θ_5 доти, поки вісь x_4 не стане паралельній осі x_5 – це змінний кут Θ_5;

2) зсув повернeної системи вздовж осі z_4 на величину S_5 до тих пір, поки осі x_4 і x_5 не будуть на одній прямій – це стала величина S_5, яка дорівнює відстані O_4–O_5;

3) зсув вздовж осі x_5 на величину a_5 до тих пір, поки не зійдуться початки координат – початки координат співпали після попереднього кроку, отже $a_5 = 0$;

4) поворот навколо осі x_5 на кут α_5 до поєднання осі z_4 з віссю z_5 – ці осі вже співпадали, отже $\alpha_4 = 0$.

Ці результати заносимо в п'ятий рядок Таблиці 1.

Таблиця 1
Параметри переходу від базової спеціальної системи координат до останньої, що пов’язана із робочим органом маніпулятора

Кінематична пара	Тип пари	№ ланки	Параметри			
			Θ	α	S	a
0,1	Поступальна	1	π	$\pi/2$	S_1	0
1,2	Поступальна	2	0	0	S_2	0
2,3	Обертальна	3	Θ_3	0	0	a_3
3,4	Обертальна	4	Θ_4	$\pi/2$	S_4	0
4,5	Обертальна	5	Θ_5	0	S_5	0

Матриці переходу і визначення орієнтації і координат захополювального пристрою у базовій системі координат. Відповідно до методу Денавіта-Хартенберга, на наступному етапі необхідно записати розширені матриці переходу для кожної кінематичної пари. При цьому кожному з чотирьох елементарних рухів відповідає одна з матриць переходу (*B*-матриць): або матриця обертання, або матриця зсуву. Результуюча матриця переходу, що зв'язує системи i – 1 та i, є добутком цих матриць:

$$A_i = B_{об}\left(\vec{k},\Theta_i\right)B_{зс}\left(\vec{k},s_i\right)B_{зс}\left(\vec{i},a_i\right)B_{об}\left(\vec{i},\alpha_i\right). \qquad (1)$$

Після перемноження отримуємо:

$$A_i = B_{об}\left(\vec{k},\Theta_i\right)B_{зс}\left(\vec{k},s_i\right)B_{зс}\left(\vec{i},a_i\right)B_{об}\left(\vec{i},\alpha_i\right)=$$

$$=\begin{bmatrix}\cos\Theta_i & -\sin\Theta_i & 0 & 0\\ \sin\Theta_i & \cos\Theta_i & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1 & S_i\\ 0 & 0 & 0 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 0 & 0 & a_i\\ 0 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & \cos\alpha_i & -\sin\alpha_i & 0\\ 0 & \sin\alpha_i & \cos\alpha_i & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1\end{bmatrix}=$$

$$=\begin{bmatrix}\cos\Theta_i & -\sin\Theta_i\cos\alpha_i & \sin\Theta_i\sin\alpha_i & a_i\cos\Theta_i\\ \sin\Theta_i & \cos\Theta_i\cos\alpha_i & -\cos\Theta_i\sin\alpha_i & a_i\sin\Theta_i\\ 0 & \sin\alpha_i & \cos\alpha_i & S_i\\ 0 & 0 & 0 & 1\end{bmatrix}. \qquad (2)$$

Матриця (2) є шаблоном, в який необхідно підставляти параметри з Таблиці 1 для отримання матриць переходу, що описують певну кінематичну схему маніпулятора. Отже, для кожного рядка Таблиці 1 записуємо свою матрицю переходу, для чого використовуємо шаблонну матрицю (2):

$$A_1 = A_{об}\left(\vec{k},\Theta_1\right)A_{зс}\left(\vec{k},s_1\right)A_{зс}\left(\vec{i},a_1\right)A_{об}\left(\vec{i},\alpha_1\right)=$$

$$=\begin{bmatrix} \cos\Theta_1 & -\sin\Theta_1\cos\alpha_1 & \sin\Theta_1\sin\alpha_1 & a_1\cos\Theta_1 \\ \sin\Theta_1 & \cos\Theta_1\cos\alpha_1 & -\cos\Theta_1\sin\alpha_1 & a_1\sin\Theta_1 \\ 0 & \sin\alpha_1 & \cos\alpha_1 & S_1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}=$$

$$=\begin{bmatrix} \cos(\pi) & -\sin(\pi)\cos\frac{\pi}{2} & \sin(\pi)\sin\frac{\pi}{2} & 0 \\ \sin(\pi) & \cos(\pi)\cos\frac{\pi}{2} & -\cos(\pi)\sin\frac{\pi}{2} & 0 \\ 0 & \sin\frac{\pi}{2} & \cos\frac{\pi}{2} & S_1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & S_1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}; \qquad (3)$$

$$A_2 = A_{об}\left(\vec{k},\Theta_2\right)A_{зс}\left(\vec{k},s_2\right)A_{зс}\left(\vec{i},a_2\right)A_{об}\left(\vec{i},\alpha_2\right)=$$

$$=\begin{bmatrix} \cos\Theta_2 & -\sin\Theta_2\cos\alpha_2 & \sin\Theta_2\sin\alpha_2 & a_2\cos\Theta_2 \\ \sin\Theta_2 & \cos\Theta_2\cos\alpha_2 & -\cos\Theta_2\sin\alpha_2 & a_2\sin\Theta_2 \\ 0 & \sin\alpha_2 & \cos\alpha_2 & S_2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & S_2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}; \qquad (4)$$

$$A_3 = A_{об}\left(\vec{k},\Theta_3\right)A_{зс}\left(\vec{k},s_3\right)A_{зс}\left(\vec{i},a_3\right)A_{об}\left(\vec{i},\alpha_3\right)=$$

$$=\begin{bmatrix} \cos\Theta_3 & -\sin\Theta_3\cos\alpha_3 & \sin\Theta_3\sin\alpha_3 & a_3\cos\Theta_3 \\ \sin\Theta_3 & \cos\Theta_3\cos\alpha_3 & -\cos\Theta_3\sin\alpha_3 & a_3\sin\Theta_3 \\ 0 & \sin\alpha_3 & \cos\alpha_3 & S_3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}=$$

$$=\begin{bmatrix} \cos\Theta_3 & -\sin\Theta_3 & 0 & a_3\cos(\Theta_3) \\ \sin\Theta_3 & \cos\Theta_3 & 0 & a_3\sin(\Theta_3) \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}; \qquad (5)$$

$$A_4 = A_{об}\left(\vec{k},\Theta_4\right)A_{зс}\left(\vec{k},s_4\right)A_{зс}\left(\vec{i},a_4\right)A_{об}\left(\vec{i},\alpha_4\right)=$$

$$=\begin{bmatrix} \cos\Theta_4 & -\sin\Theta_4\cos\alpha_4 & \sin\Theta_4\sin\alpha_4 & a_4\cos\Theta_4 \\ \sin\Theta_4 & \cos\Theta_4\cos\alpha_4 & -\cos\Theta_4\sin\alpha_4 & a_4\sin\Theta_4 \\ 0 & \sin\alpha_4 & \cos\alpha_4 & S_4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}=$$

$$=\begin{bmatrix}\cos\Theta_4 & 0 & \sin\Theta_4 & 0\\ \sin\Theta_4 & 0 & -\cos\Theta_4 & 0\\ 0 & 1 & 0 & S_4\\ 0 & 0 & 0 & 1\end{bmatrix}; \qquad (6)$$

$$A_5 = A_{об}\left(\vec{k},\Theta_5\right)A_{зс}\left(\vec{k},s_5\right)A_{зс}\left(\vec{i},a_5\right)A_{об}\left(\vec{i},\alpha_5\right)=$$

$$=\begin{bmatrix}\cos\Theta_5 & -\sin\Theta_5\cos\alpha_5 & \sin\Theta_5\sin\alpha_5 & a_5\cos\Theta_5\\ \sin\Theta_5 & \cos\Theta_5\cos\alpha_5 & -\cos\Theta_5\sin\alpha_5 & a_5\sin\Theta_5\\ 0 & \sin\alpha_5 & \cos\alpha_5 & S_5\\ 0 & 0 & 0 & 1\end{bmatrix}=$$

$$=\begin{bmatrix}\cos\Theta_5 & -\sin\Theta_5 & 0 & 0\\ \sin\Theta_5 & \cos\Theta_5 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1 & S_5\\ 0 & 0 & 0 & 1\end{bmatrix}; \qquad (7)$$

Обчислення матриць переходу A_i дозволяє визначити положення і орієнтацію останньої ланки маніпулятора (захоплювача) у системі відліку, зв'язаної зі стояком. При цьому геометричні розміри ланок вважаються заданими.

Це завдання вирішується за допомогою формули:

$$R_0 = T_n R_n, \qquad (9)$$

де T_n – матриця, що дорівнює добутку матриць A_i:

$$T_n = A_1 A_2 \ldots A_n. \qquad (10)$$

У формулі (9) R_n і R_0 – матриці-стовпці розміром 4×1, перші три елементи яких – це координати довільної точки захоплювача відповідно в системах *n* і 0.

Оскільки запропонований робот-маніпулятор підлогового типу характеризується п’ятьма ступенями свободи (*n* = 5), обчислюємо елементи матриці T_5:

$$T_5 = A_1 A_2 A_3 A_4 A_5 =$$

$$=\begin{bmatrix}-1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 1 & 0 & S_1\\ 0 & 0 & 0 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1 & S_2\\ 0 & 0 & 0 & 1\end{bmatrix}\times$$

$$\times\begin{bmatrix}\cos\Theta_3 & -\sin\Theta_3 & 0 & a_3\cos\Theta_3\\ \sin\Theta_3 & \cos\Theta_3 & 0 & a_3\sin\Theta_3\\ 0 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\cos\Theta_4 & 0 & \sin\Theta_4 & 0\\ \sin\Theta_4 & 0 & -\cos\Theta_4 & 0\\ 0 & 1 & 0 & S_4\\ 0 & 0 & 0 & 1\end{bmatrix}\times$$

$$\times\begin{bmatrix} \cos\Theta_5 & -\sin\Theta_5 & 0 & 0 \\ \sin\Theta_5 & \cos\Theta_5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & S_5 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} t_{11} & t_{12} & t_{13} & t_{14} \\ t_{21} & t_{22} & t_{23} & t_{24} \\ t_{31} & t_{32} & t_{33} & t_{34} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}. \qquad (11)$$

Відомо, що стовпці матриці T_5 мають геометричне тлумачення. Перші три елементи першого, другого і третього стовпців є напрямними косинусами відповідно до осей x_n, y_n, z_n у системі 0, а три елементи четвертого стовпця – це координати x_c, y_c, z_c центру захоплювача в тій же системі:

$$T_n = \begin{bmatrix} \cos\left(\vec{i}_n, \vec{i}_0\right) & \cos\left(\vec{j}_n, \vec{i}_0\right) & \cos\left(\vec{k}_n, \vec{i}_0\right) & x_c \\ \cos\left(\vec{i}_n, \vec{j}_0\right) & \cos\left(\vec{j}_n, \vec{j}_0\right) & \cos\left(\vec{k}_n, \vec{j}_0\right) & y_c \\ \cos\left(\vec{i}_n, \vec{k}_0\right) & \cos\left(\vec{j}_n, \vec{k}_0\right) & \cos\left(\vec{k}_n, \vec{k}_0\right) & z_c \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}. \qquad (12)$$

Отже, отримана матриця T_5 визначає напрямні косинуси:

$$t_{11} = \cos\left(\vec{i}_n, \vec{i}_0\right) = -\cos\Theta_5(\cos\Theta_3\cos\Theta_4 - \sin\Theta_3\sin\Theta_4)$$
$$= -\cos\Theta_5\cos(\Theta_3 + \Theta_4); \qquad (13)$$

$$t_{21} = \cos\left(\vec{i}_n, \vec{j}_0\right) = \sin\Theta_5; \qquad (14)$$

$$t_{31} = \cos\left(\vec{i}_n, \vec{k}_0\right) = \cos\Theta_5(\cos\Theta_3\sin\Theta_4 + \cos\Theta_4\sin\Theta_3) =$$
$$= \cos\Theta_5\sin(\Theta_3 + \Theta_4); \qquad (13)$$

$$t_{12} = \cos\left(\vec{j}_n, \vec{i}_0\right) = \sin\Theta_5(\cos\Theta_3\cos\Theta_4 - \sin\Theta_3\sin\Theta_4) =$$
$$= \sin\Theta_5\cos(\Theta_3 + \Theta_4); \qquad (16)$$

$$t_{22} = \cos\left(\vec{j}_n, \vec{j}_0\right) = \cos\Theta_5; \qquad (17)$$

$$t_{32} = \cos\left(\vec{j}_n, \vec{k}_0\right) = -\sin\Theta_5(\cos\Theta_3\sin\Theta_4 + \cos\Theta_4\sin\Theta_3) =$$
$$= -\sin\Theta_5\sin(\Theta_3 + \Theta_4); \qquad (18)$$

$$t_{13} = \cos\left(\vec{k}_n, \vec{i}_0\right) = -\cos\Theta_3\sin\Theta_4 - \cos\Theta_4\sin\Theta_3 = -\sin(\Theta_3 + \Theta_4); \qquad (19)$$

$$t_{23} = \cos\left(\vec{k}_n, \vec{j}_0\right) = 0; \qquad (20)$$

$$t_{33} = \cos\left(\vec{k}_n, \vec{k}_0\right) = \sin\Theta_3\sin\Theta_4 - \cos\Theta_3\cos\Theta_4 = -\cos(\Theta_3 + \Theta_4); \qquad (21)$$

а також координати центра захоплювального пристрою:

$$t_{14} = x_c = -s_5(\cos\Theta_3\sin\Theta_4 + \cos\Theta_4\sin\Theta_3) - a_3\cos\Theta_3 =$$

$$= -s_5 \sin(\Theta_3 + \Theta_4) - a_3 \cos(\Theta_3); \quad (22)$$

$$t_{24} = y_c = s_2 + s_4; \quad (23)$$

$$t_{34} = z_c = s_1 - s_5(\cos\Theta_3 \cos\Theta_4 - \sin\Theta_3 \sin\Theta_4) + a_3 \sin\Theta_3 =$$
$$= s_1 - s_5 \cos(\Theta_3 + \Theta_4) + a_3 \sin(\Theta_3). \quad (24)$$

Результати розрахунку для обраної часової послідовності кутів повороту. Формули (13)–(24) були використані для тестування положення маніпулятора з наступними параметрами довжин ланок: $S_{10} = 0$; $S_{20} = 1$ м; $a_3 = 0{,}5$ м; $S_4 = 0{,}5$ м, $S_5 = 0{,}5$ м, а часова послідовність лінійних зсувів ΔS_1 і ΔS_2, а також кутів повороту $\Delta\Theta_3 - \Delta\Theta_5$ задана, як показано на рис. 3.

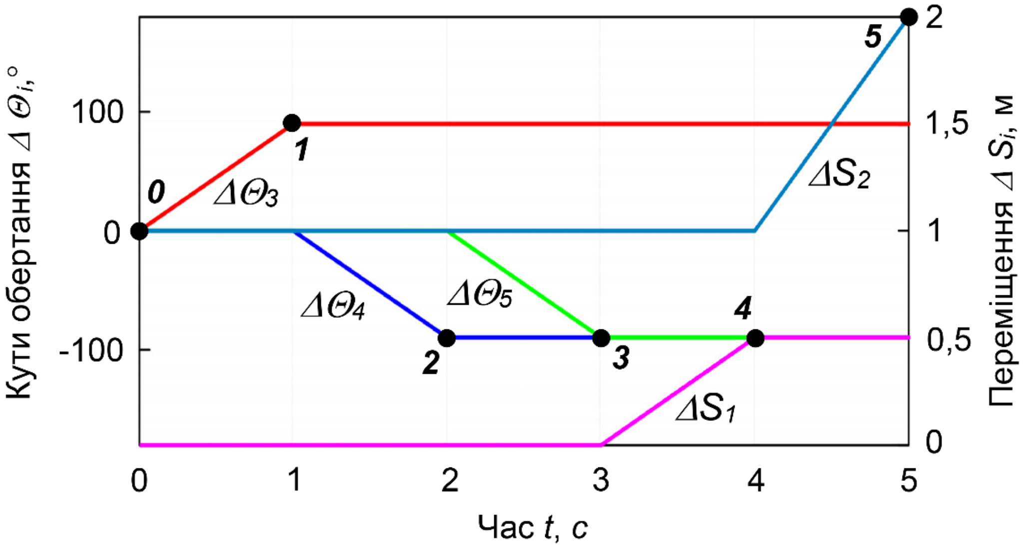


Рис. 3. Часова послідовність зміни положення ΔS_1 і ΔS_2, а також кутів повороту $\Delta\Theta_3 - \Delta\Theta_5$

У якості опорних точок обрані положення захоплювача маніпулятора, які на рис. 4–6 позначені позиціями 0–5. Ці рисунки ілюструють прямий кінематичний аналіз портального робота-маніпулятора з п'ятьма ступенями свободи: дві лінійні (переміщення каретки на відстань ΔS_1 та підйом руки на відстань ΔS_2) та три обертових ($\Delta\theta_3$–$\Delta\theta_5$). Графік відображає зміни кутів обертання ($\Delta\Theta_i$) і поступальних переміщень (ΔS_i) для п'яти ступенів свободи робота у часовому діапазоні від 0 до 5 секунд. Рух здійснюється поетапно в шість ключових моментів часу (0-5), кожен з яких відповідає активації певного ступеня свободи. На початку (0-1 с) відбувається обертання навколо осі z_2 ($\Delta\Theta_2$), що вказує на початкову зміну орієнтації важеля. У другий період (1–2 с) спостерігається зменшення кута $\Delta\Theta_3$ до негативного значення – це відповідає обертанню навколо вертикальної осі z_3. Паралельно з цим починається активне переміщення поступальної координати S_1, яке триває до моменту 3 с. У проміжку 2–3 с ми бачимо досягнення максимуму за ΔS_1 – переміщення каретки в горизонтальній площині. Наступним етапом (3–4 с) є зростання кута $\Delta\Theta_4$ – орієнтація передостанньої ланки. Останній активний відрізок (4–5 с) характеризується зменшенням кута $\Delta\Theta_5$ – зміна орієнтації інструментального органу. З графіка видно, що рух відбувається поетапно: кожен наступний ступінь активується після стабілізації попереднього. Це підтверджує послідовний характер керування й дозволяє наочно відстежити вплив кожного приводу на положення кінцевого елемента. Вказані параметри могли бути використані як вхідні дані для прямої кінематичної моделі, що дозволяє розрахувати положення та орієнтацію робочого органу в кожен момент часу. Таким чином, графік підтверджує узгодженість кінематичних обчислень із реальним переміщенням маніпулятора в робочому просторі.

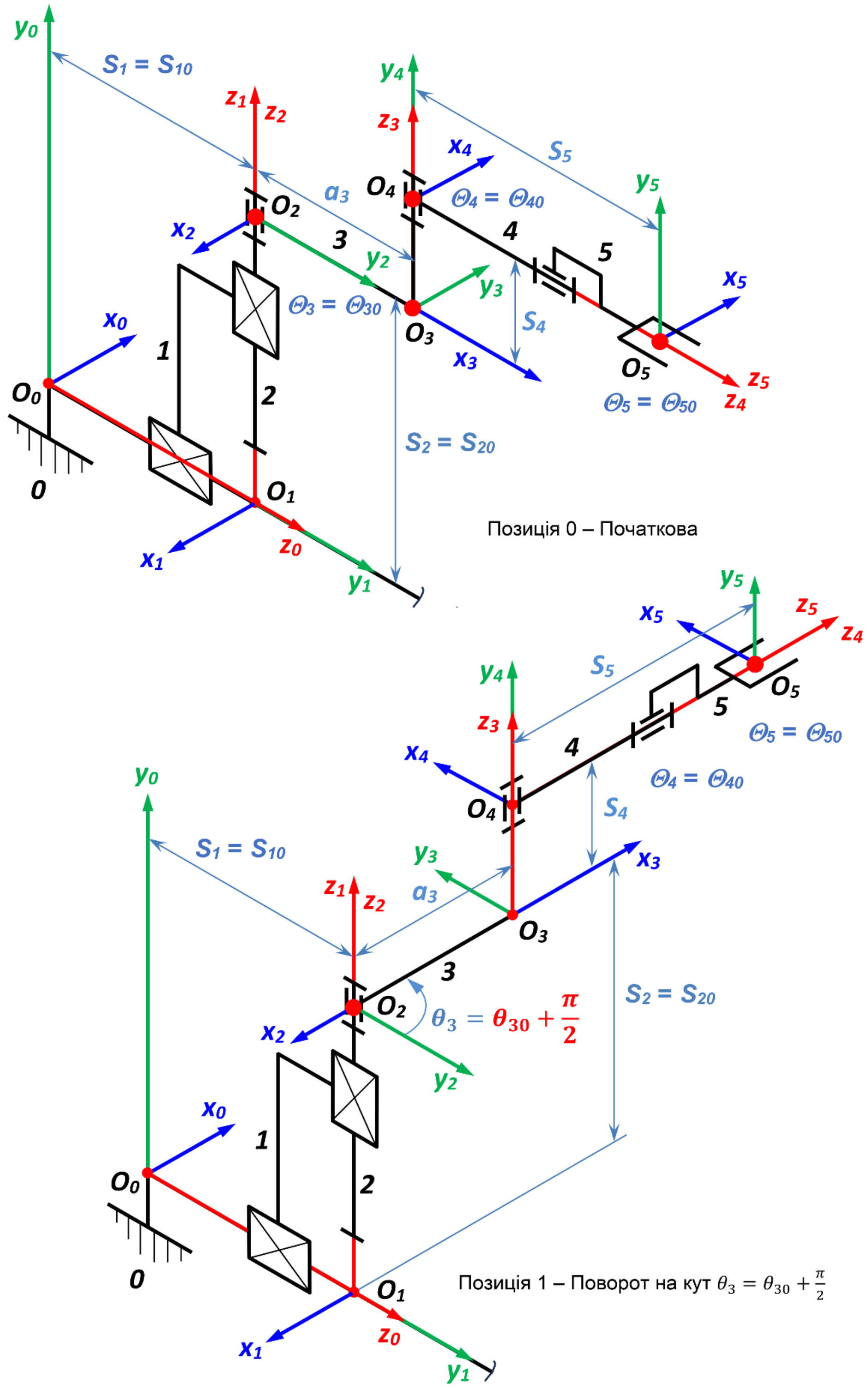


Рис. 4. Тестова зміна положень досліджуваного підлогового робота-маніпулятора з початкового – позиція 0, до наступного – позиція 1

Сукупність тестових позицій із позначенням базової (x_0, y_0, z_0) та кінцевої

(x_5, y_5, z_5) систем координат досліджуваного портального робота показана на його 3D-зображеннях на рис. 7.

Результати розрахунку координат центра захоплювача (x_c, y_c, z_c) у базовій системі координат (x_0, y_0, z_0) для послідовності положень 1–5 наведені на рис. 8; результати розрахунку орієнтації вектора $\vec{\imath}_5$ у базовій системі координат $(\vec{\imath}_0, \vec{\jmath}_0, \vec{k}_0)$ наведені на рис. 9; результати розрахунку орієнтації векторів $\vec{\jmath}_5$ і $\vec{k}_5$ у базовій системі координат $(\vec{\imath}_0, \vec{\jmath}_0, \vec{k}_0)$ наведені на рис. 10 і 11, відповідно.

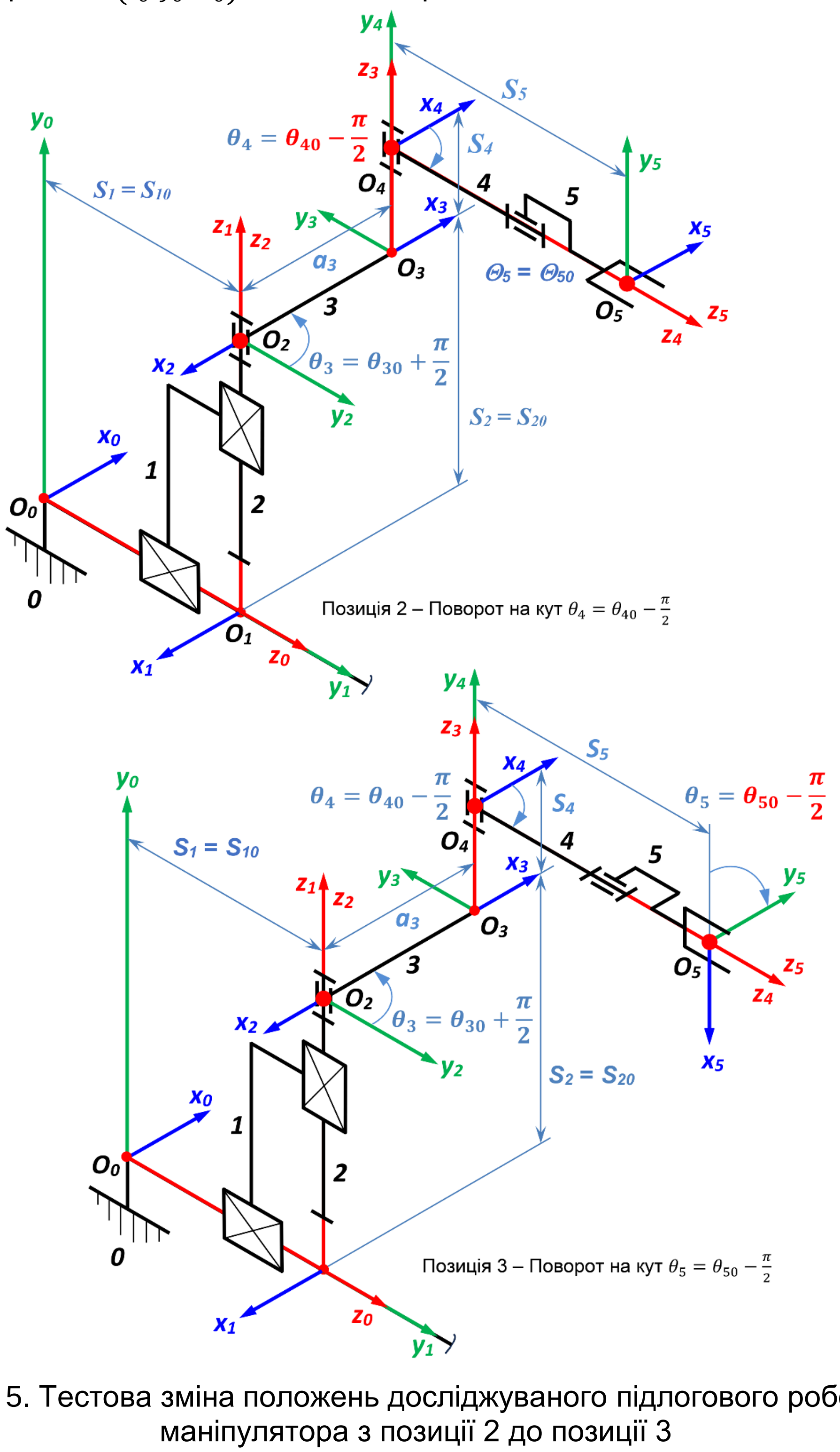


Рис. 5. Тестова зміна положень досліджуваного підлогового робота-маніпулятора з позиції 2 до позиції 3

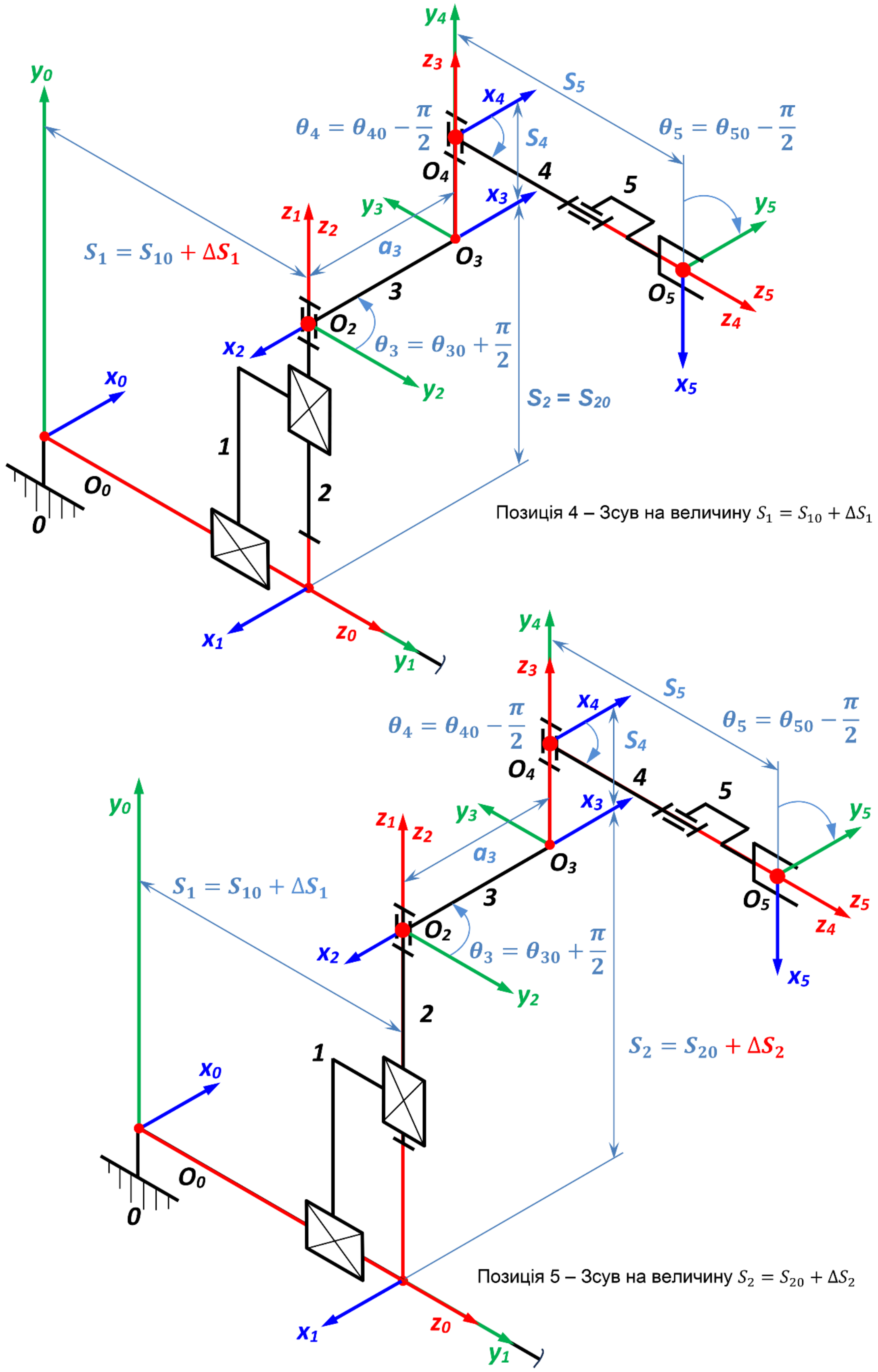


Рис. 6. Тестова зміна положень досліджуваного підлогового робота-маніпулятора з позиції 4 до позиції 5

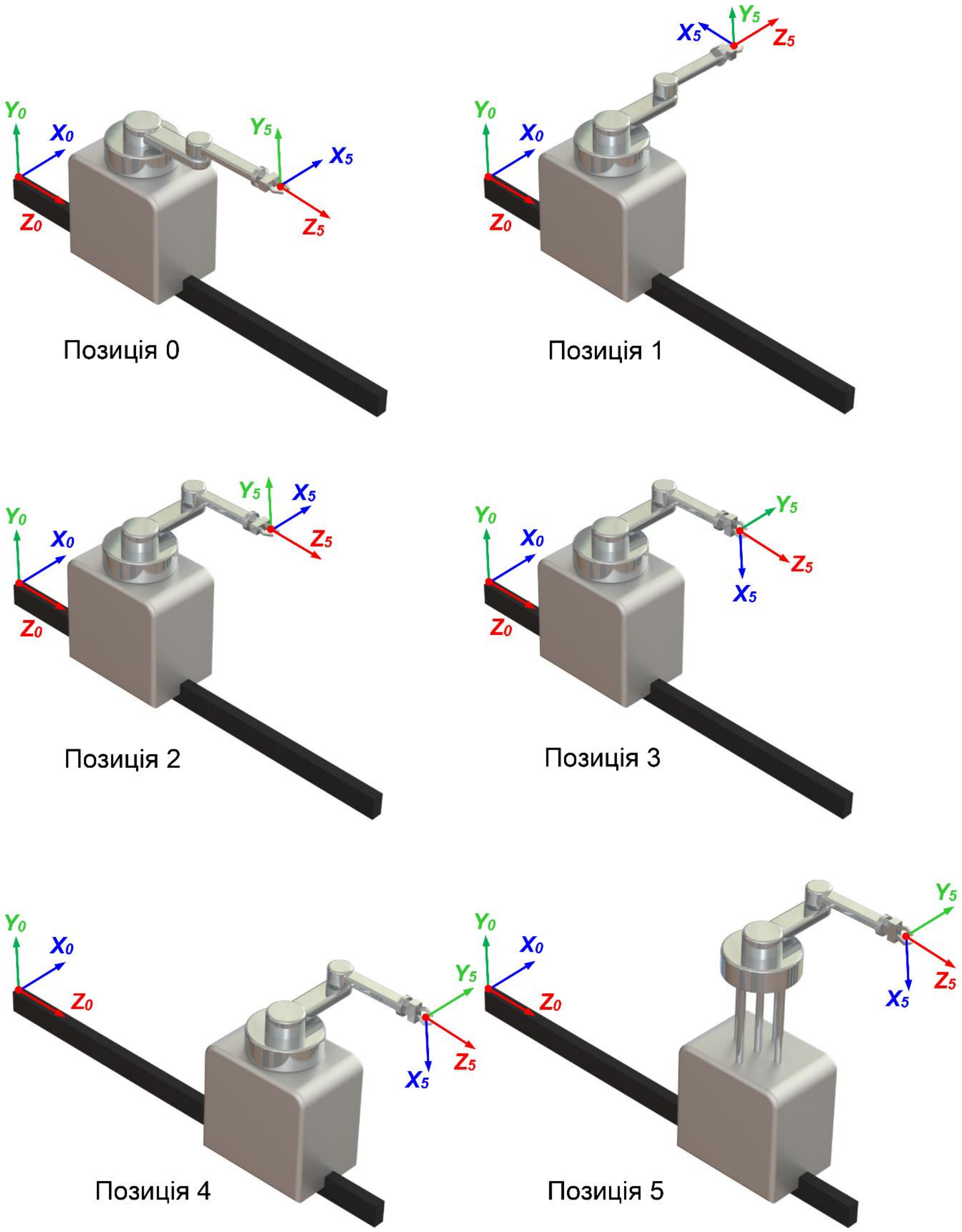
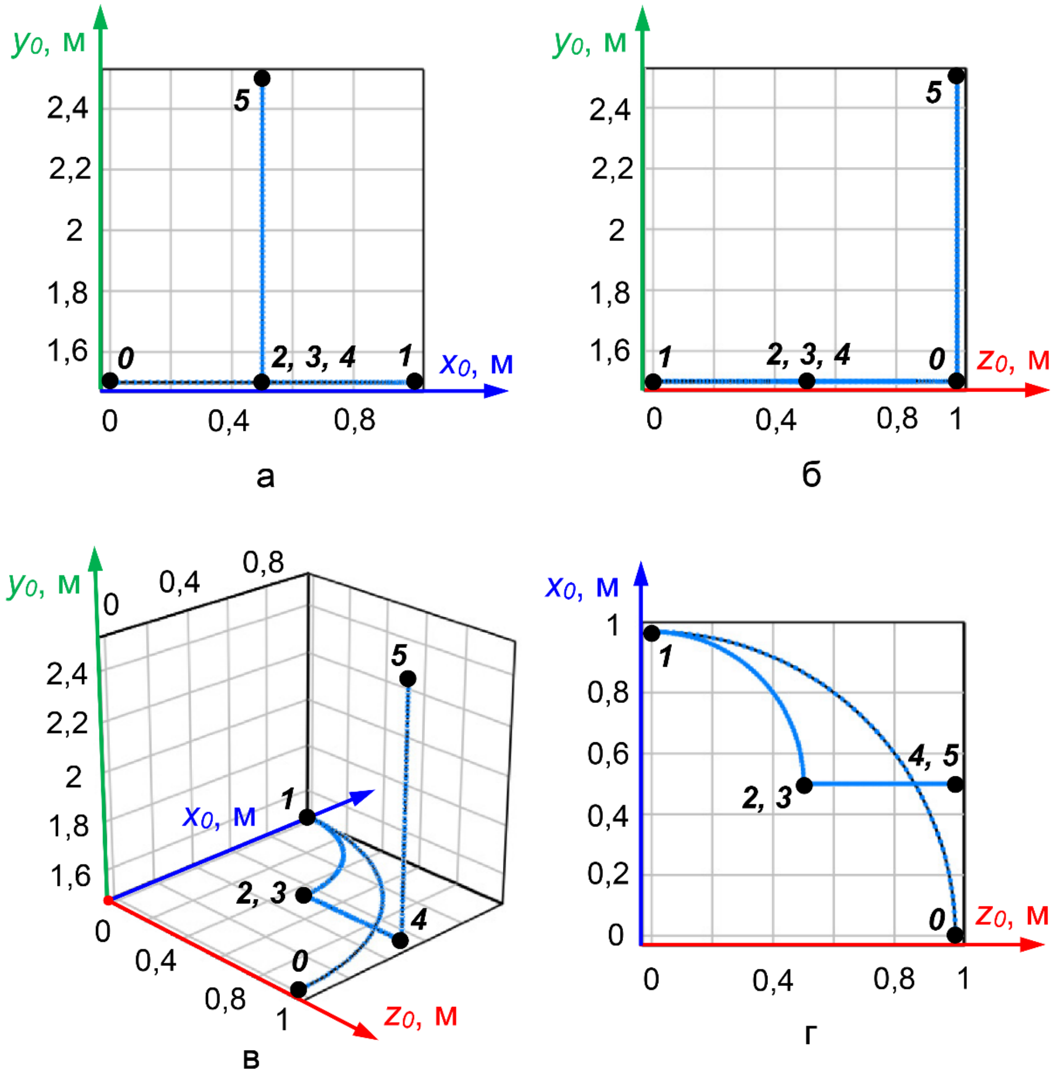


Рис. 7. Послідовність досліджуваних положень робота-маніпулятора підлогового типу

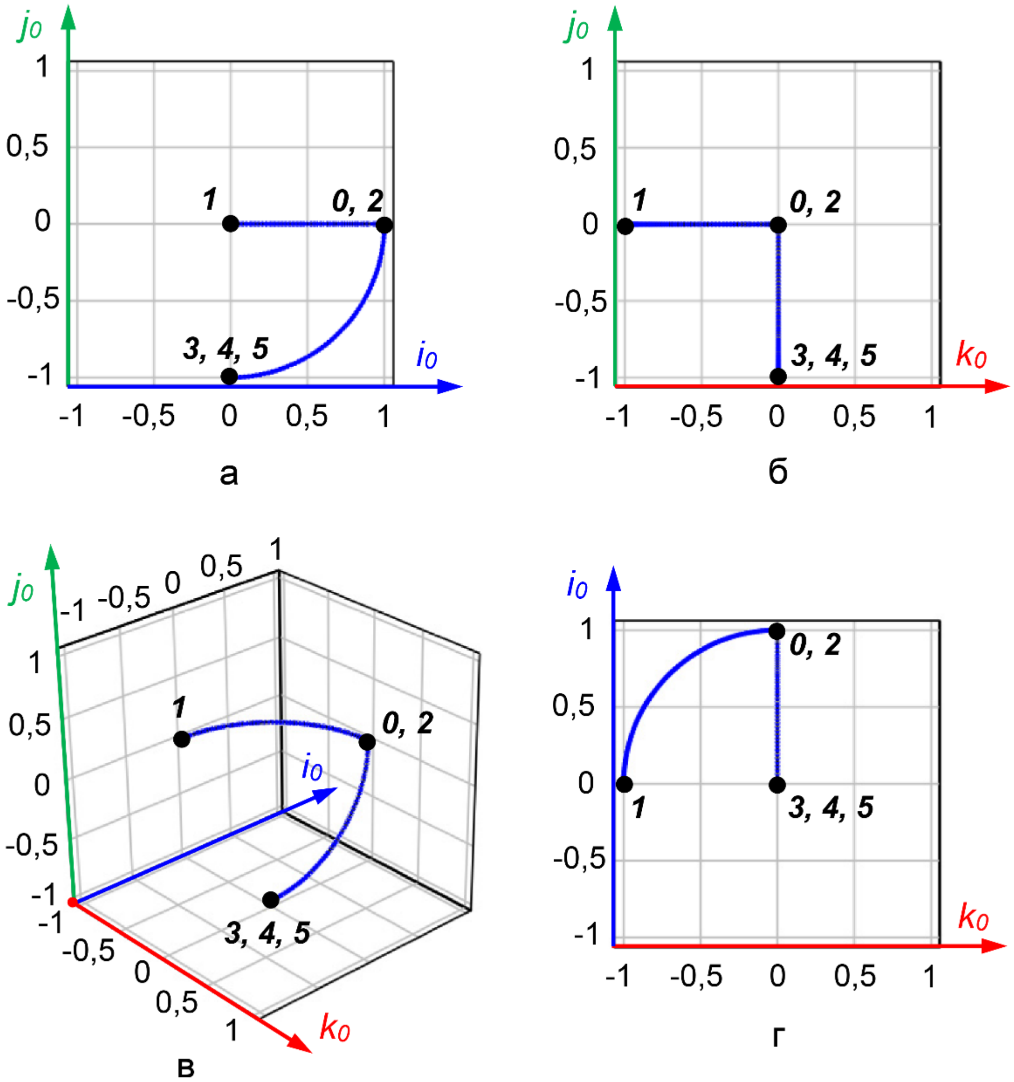


$$\begin{array}{r}0\\ \begin{pmatrix}1&0&0&\boxed{0}\\0&1&0&\boxed{1,5}\\0&0&1&\boxed{1}\\0&0&0&1\end{pmatrix}\end{array}\rightarrow\begin{array}{r}1\\ \begin{pmatrix}0&0&1&\boxed{1}\\0&1&0&\boxed{1,5}\\-1&0&0&\boxed{0}\\0&0&0&1\end{pmatrix}\end{array}\rightarrow\begin{array}{r}2\\ \begin{pmatrix}1&0&0&\boxed{0,5}\\0&1&0&\boxed{1,5}\\0&0&1&\boxed{0,5}\\0&0&0&1\end{pmatrix}\end{array}\rightarrow$$

$$\rightarrow\begin{array}{r}3\\ \begin{pmatrix}0&1&0&\boxed{0,5}\\-1&0&0&\boxed{1,5}\\0&0&1&\boxed{0,5}\\0&0&0&1\end{pmatrix}\end{array}\rightarrow\begin{array}{r}4\\ \begin{pmatrix}0&1&0&\boxed{0,5}\\-1&0&0&\boxed{1,5}\\0&0&1&\boxed{1}\\0&0&0&1\end{pmatrix}\end{array}\rightarrow\begin{array}{r}5\\ \begin{pmatrix}0&1&0&\boxed{0,5}\\-1&0&0&\boxed{2,5}\\0&0&1&\boxed{1}\\0&0&0&1\end{pmatrix}\end{array}$$

д

Рис. 8. Результати розрахунку координат центра захоплювача (x_c, y_c, z_c) у базовій системі координат (x_0, y_0, z_0) для послідовності положень 0–5 (див. рис. 7): а – проекція на площину $x_0 - y_0$; б – проекція на площину $y_0 - z_0$; в – аксонометрична проекція; г – проекція на площину $x_0 - z_0$; д – послідовність змінення елементів матриці переходу T_5 під час руху між положеннями 0–5

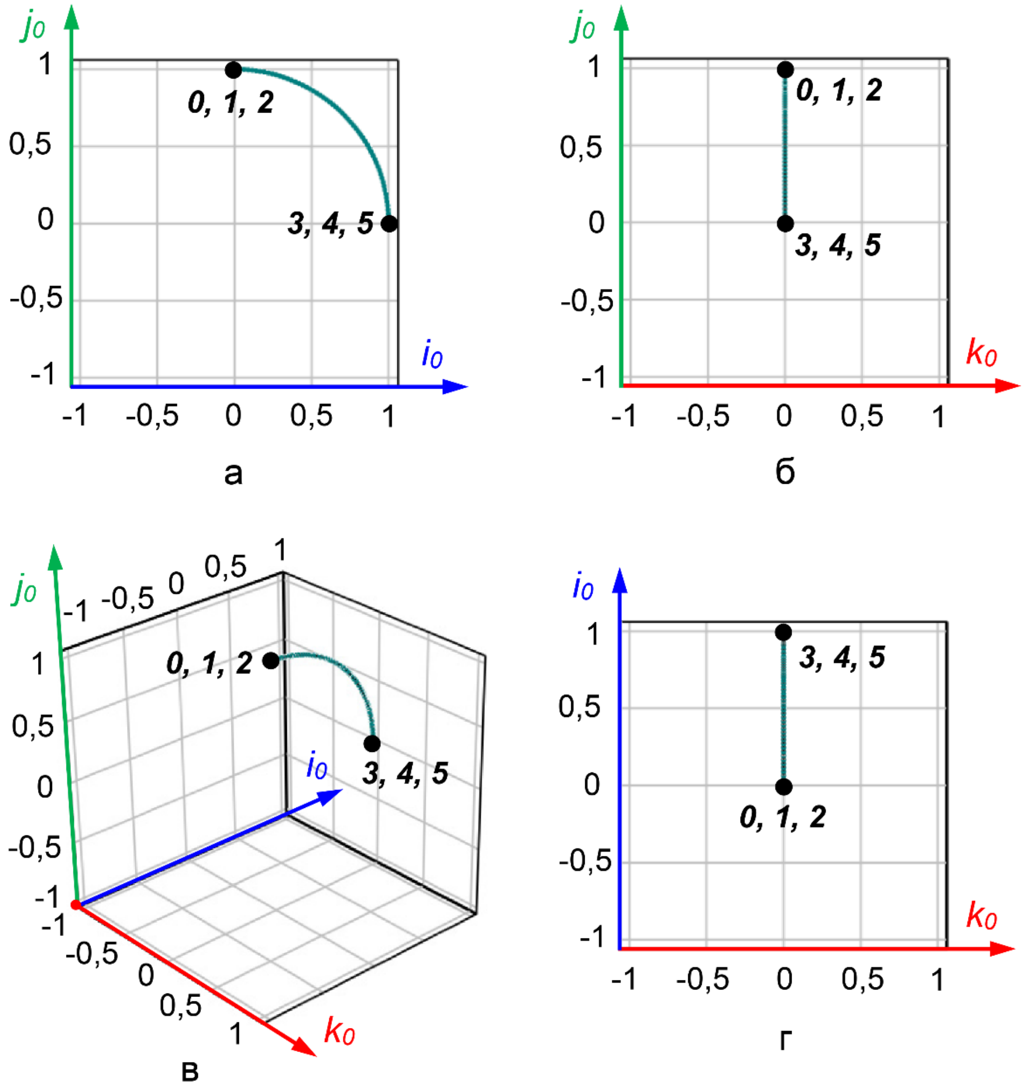


$$\overset{0}{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1{,}5 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}} \to \overset{1}{\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1{,}5 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}} \to \overset{2}{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0{,}5 \\ 0 & 1 & 0 & 1{,}5 \\ 0 & 0 & 1 & 0{,}5 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}} \to$$

$$\to \overset{3}{\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0{,}5 \\ -1 & 0 & 0 & 1{,}5 \\ 0 & 0 & 1 & 0{,}5 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}} \to \overset{4}{\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0{,}5 \\ -1 & 0 & 0 & 1{,}5 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}} \to \overset{5}{\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0{,}5 \\ -1 & 0 & 0 & 2{,}5 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}}$$

д

Рис. 9. Результати розрахунку орієнтації вектора $\vec{\imath}_5$ у базовій системі координат $(\vec{\imath}_0, \vec{\jmath}_0, \vec{k}_0)$ для послідовності положень 0–5 (див. рис. 7): а – проекція на площину $i_0 - j_0$; б – проекція на площину $j_0 - k_0$; в – аксонометрична проекція; г – проекція на площину $i_0 - k_0$; д – послідовність змінення елементів матриці переходу T_5 під час руху між положеннями 0–5

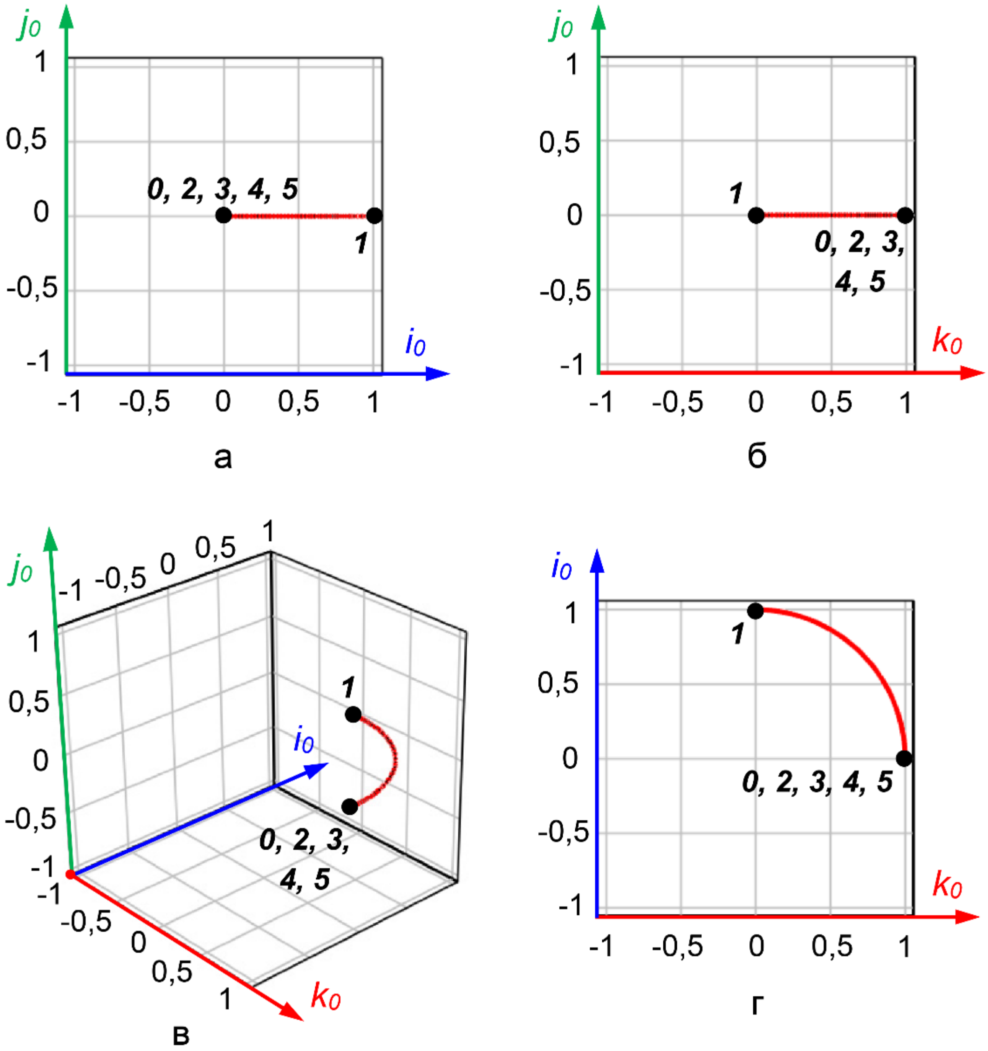


$$
\begin{array}{c}\begin{array}{cccc} & 0 & & \end{array}\\ \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1{,}5 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\end{array} \rightarrow
\begin{array}{c}\begin{array}{cccc} & 1 & & \end{array}\\ \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1{,}5 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\end{array} \rightarrow
\begin{array}{c}\begin{array}{cccc} & 2 & & \end{array}\\ \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0{,}5 \\ 0 & 1 & 0 & 1{,}5 \\ 0 & 0 & 1 & 0{,}5 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\end{array} \rightarrow
$$

$$
\rightarrow \begin{array}{c}\begin{array}{cccc} & 3 & & \end{array}\\ \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0{,}5 \\ -1 & 0 & 0 & 1{,}5 \\ 0 & 0 & 1 & 0{,}5 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\end{array} \rightarrow
\begin{array}{c}\begin{array}{cccc} & 4 & & \end{array}\\ \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0{,}5 \\ -1 & 0 & 0 & 1{,}5 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\end{array} \rightarrow
\begin{array}{c}\begin{array}{cccc} & 5 & & \end{array}\\ \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0{,}5 \\ -1 & 0 & 0 & 2{,}5 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\end{array}
$$

д

Рис. 10. Результати розрахунку орієнтації вектора $\vec{j}_5$ у базовій системі координат $(\vec{i}_0, \vec{j}_0, \vec{k}_0)$ для послідовності положень 0–5 (див. рис. 7): а – проекція на площину $i_0 - j_0$; б – проекція на площину $j_0 - k_0$; в – аксонометрична проекція; г – проекція на площину $i_0 - k_0$; д – послідовність змінення елементів матриці переходу T_5 під час руху між положеннями 0–5



$$\begin{array}{c}\begin{array}{cccc} & & 0 & \end{array}\\ \begin{pmatrix}1&0&\boxed{0}&0\\0&1&\boxed{0}&1{,}5\\0&0&\boxed{1}&1\\0&0&0&1\end{pmatrix}\end{array}\rightarrow\begin{array}{c}\begin{array}{cccc} & & 1 & \end{array}\\ \begin{pmatrix}0&0&\boxed{1}&1\\0&1&\boxed{0}&1{,}5\\-1&0&\boxed{0}&0\\0&0&0&1\end{pmatrix}\end{array}\rightarrow\begin{array}{c}\begin{array}{cccc} & & 2 & \end{array}\\ \begin{pmatrix}1&0&\boxed{0}&0{,}5\\0&1&\boxed{0}&1{,}5\\0&0&\boxed{1}&0{,}5\\0&0&0&1\end{pmatrix}\end{array}\rightarrow$$

$$\rightarrow\begin{array}{c}\begin{array}{cccc} & & 3 & \end{array}\\ \begin{pmatrix}0&1&\boxed{0}&0{,}5\\-1&0&\boxed{0}&1{,}5\\0&0&\boxed{1}&0{,}5\\0&0&0&1\end{pmatrix}\end{array}\rightarrow\begin{array}{c}\begin{array}{cccc} & & 4 & \end{array}\\ \begin{pmatrix}0&1&\boxed{0}&0{,}5\\-1&0&\boxed{0}&1{,}5\\0&0&\boxed{1}&1\\0&0&0&1\end{pmatrix}\end{array}\rightarrow\begin{array}{c}\begin{array}{cccc} & & 5 & \end{array}\\ \begin{pmatrix}0&1&\boxed{0}&0{,}5\\-1&0&\boxed{0}&2{,}5\\0&0&\boxed{1}&1\\0&0&0&1\end{pmatrix}\end{array}$$

д

Рис. 11. Результати розрахунку орієнтації вектора $\vec{k}_5$ у базовій системі координат $(\vec{i}_0, \vec{j}_0, \vec{k}_0)$ для послідовності положень 0–5 (див. рис. 7): а – проекція на площину $i_0 - j_0$; б – проекція на площину $j_0 - k_0$; в – аксонометрична проекція; г – проекція на площину $i_0 - k_0$; д – послідовність змінення елементів матриці переходу T_5 під час руху між положеннями 0–5

Висновки

У межах дослідження було здійснено повний аналітичний розв’язок прямої задачі кінематики для перспективного підлогового робота-маніпулятора з п’ятьма ступенями свободи, що включає дві поступальні та три обертальні координати. Було застосовано класичний метод Денавіта–Хартенберга, який дозволив систематизовано сформувати спеціальні координатні системи для кожної ланки маніпулятора, побудувати відповідну таблицю параметрів переходу та обчислити матриці одержання положення і орієнтації кінцевого виконавчого органу в базовій системі координат. Результати кінематичного моделювання демонструють, що запропонований підлоговий маніпулятор здатний забезпечувати високоточне позиціювання робочого органу у тривимірному просторі при заданій часовій послідовності приводів. Графік зміни кутів та поступальних координат підтверджує логіку поетапного активування ступенів свободи, а відповідні обчислення орієнтації і положення кінцевого елемента підтверджують узгодженість між аналітичними моделями та візуалізованими переміщеннями маніпулятора в робочому просторі. Особливістю моделі є її придатність до використання в умовах автоматизованого промислового виробництва, зокрема при виконанні задач збирання, переміщення, зварювання чи обробки деталей. У роботі окреслено не лише методичну основу побудови прямої кінематичної моделі, а й практичну реалізацію обчислень для конкретної конструкції робота.

Запропонований підхід може бути використаний як базовий етап для подальшої побудови зворотної кінематики, динамічного аналізу, синтезу траєкторій та цифрового двійника маніпулятора. У перспективі дослідження відкриває можливості для інтеграції даної конструкції в гнучкі виробничі лінії, з урахуванням адаптації до змін середовища та завдань.

Список літератури

1. Bae, Y. G. Manipulability and kinematic analysis of a home service robot aimed for floor tasks / Y. G. Bae, S. Jung. – 2012 9th International Conference on Ubiquitous Robots and Ambient Intelligence (URAI) : Daejeon, Korea (South). – 2012. – p. 385-38.

2. Jain, A. EL-E: an assistive mobile manipulator that autonomously fetches objects from flat surfaces / A. Jain, C. C. Kemp // Auton Robot. – 2010. – Vol. 28. – p. 45-64.

3. Dusty: an assistive mobile manipulator that retrieves dropped objects for people with motor impairments / C. H. King, T. L. Chen, Z. Fan, J. D. Glass, C. C. Kemp // Disability and Rehabilitation: Assistive Technology. – 2011. – Vol. 7, Iss. 2. – p. 168-179.

4. Billard, A. Trends and challenges in robot manipulation / A. Billard, D. Kragic // Science. – 2019. – Vol. 364. – Article No. 8414. – p. 1-12.

5. Kemp, C. C. Challenges for robot manipulation in human environments / C. C. Kemp, A. Edsinger and E. Torres-Jara // IEEE Robotics & Automation Magazine. – 2007. – Vol. 14, Iss. 1. – p. 20-29.

6. Evaluation of Kinematic and Compliance Calibration of Serial Articulated Industrial Manipulators / S. Ibaraki, N. Theissen, A. Archenti, M. Alam // International Journal of Automation Technology. – 2021. – Vol. 15, Iss. 5. – p. 565-566.

7. Integration of mobile manipulators in an industrial production / O. Madsen, S. Bøgh, C. Schou, R. S. Andersen, J. S. Damgaard, M. R. Pedersen, V. Krüger //

Industrial Robot. – 2015. – Vol. 42, Iss. 1. – p. 11-18.

8. Aliev, K., Antonelli, D. (2019). Analysis of Cooperative Industrial Task Execution by Mobile and Manipulator Robots. In: Trojanowska, J., Ciszak, O., Machado, J., Pavlenko, I. (eds) / K. Aliev, D. Antonelli. – Advances in Manufacturing. Lecture Notes in Mechanical Engineering : Springer, Cham. – 2019. – p. 1-11.

9. A service robot for construction industry / P. Gonzalez De Santos, J. Estremera, E. Garcia, M. Armada. – Proceedings World Automation Congress : Seville, Spain. – 2004. – p. 441-446.

10. Design of a Reconfigurable Mobile Collaborative Manipulator for Industrial Applications / A. Baldassarri, M. Bertelli, M. Carricato // Journal of Computational and Nonlinear Dynamics. – 2023. – Vol. 18, Iss 9. – Article No. 091006. – p. 1-14.

11. Guidelines for the design of low-cost robots for the food industry / R. J. Moreno Masey, J. O. Gray, T. J. Dodd, D. G. Caldwell // Industrial Robot. – 2010. – Vol. 37, Iss. 6. – p. 509-517.

12. An autonomous image-guided robotic system simulating industrial applications / R. U. Islam, J. Iqbal, S. Manzoor, A. Khalid, S. Khan. – International Conference on System of Systems Engineering (SoSE) : Genova, Italy. – 2012. – p. 344-349.

13. Identification of Denavit-Hartenberg Parameters of an Industrial Robot / A. A. Hayat, R. G. Chittawadigi, A. D. Udai, S. K. Saha. – Proceedings of Conference on Advances In Robotics : Pune, India. – 2013. – p. 1-6.

14. Ayiz, C. The kinematics of industrial robot manipulators based on the exponential rotational matrices / C. Ayiz, S. Kucuk. – IEEE International Symposium on Industrial Electronics : Seoul, Korea (South) . – 2009. – p. 977-982.

15. Baločková, L. The Method for Solving Kinematics of an Industrial Robot / L. Baločková // Applied Mechanics and Materials. – 2013. – Vol. 282. – P. 274-281.

16. Ding, F. Applying coordinate fixed Denavit–Hartenberg method to solve the workspace of drilling robot arm / F. Ding, C. Liu. – International Journal of Advanced Robotic Systems. – 2018. – Vol. 15, Iss. 4. – p. 24-32.

17. Industrial robot calibration method using Denavit - Hartenberg parameters / J. -W. Lee, G. -T. Park, J. -S. Shin and J. -W. Woo. – 17th International Conference on Control, Automation and Systems : Jeju, Korea (South). – 2017. – p. 1834-1837.

18. Automatic Denavit-Hartenberg Parameter Identification for Serial Manipulators / C. Faria, J. L. Vilaça, S. Monteiro, W. Erlhagen, E. Bicho. – Conference of the IEEE Industrial Electronics Society : Lisbon, Portugal. – 2019. – p. 610-617.

19. Singh, R. A Review on Forward and Inverse Kinematics of Classical Serial Manipulators / R. Singh, V. Kukshal, V. S. Yadav. – Lecture Notes in Mechanical Engineering : Springer, Singapore. – 2021. – p. 314-322.

20. Research on the Relationship between Classic Denavit-Hartenberg and Modified Denavit-Hartenberg / H. Wang, H. Qi, M. Xu, Y. Tang, J. Yao, X. Yan. – Seventh International Symposium on Computational Intelligence and Design : Hangzhou, China. – 2014. – p. 26-29.

21. Comparison between Standard and Modified Denavit-Hartenberg Methods in Robotics Modelling / M. Granja, N. Chang, V. Granja, M. Duque, F. Llulluna. – Proceedings of the 2nd World Congress on Mechanical, Chemical, and Material Engineering : Budapest, Hungary. – 2016. – Article No. 118. – p. 1-10.

22. Lipkin, H. A Note on Denavit-Hartenberg Notation in Robotics / H. Lipkin. – Proceedings of the Computers and Information in Engineering Conference : Long Beach, USA. – 2005. – Vol. 7. – p. 921-926.

Надійшла до редакції 13.05.2025, розглянута на редколегії 13.05.2025.

Analytical Forward Kinematics Modeling of a Floor-Based 5-DOF Industrial Robot Using the Denavit-Hartenberg Method

This paper presents an analytical solution to the forward kinematics problem for a floor-based industrial robot manipulator with five degrees of freedom, intended for performing precise manufacturing operations such as positioning, assembly, transportation, and part processing. The robot's kinematic structure includes two translational and three rotational coordinates, providing a wide range of end-effector motion in space. To develop the mathematical model, the classical Denavit-Hartenberg (D-H) method was used, allowing for a formalized description of the manipulator's kinematic chain through successive homogeneous transformations between local coordinate systems. During the modeling process, coordinate systems were sequentially established for each link of the mechanism, a table of D-H parameters was constructed, and the corresponding transformation matrices were calculated. Based on this data, a general transformation matrix was obtained, describing the position and orientation of the end-effector in the base coordinate frame. Additionally, simulation modeling of the manipulator's motion was carried out with specified changes in joint angles and linear displacements over time. Graphs of the end-effector's position and orientation were generated, confirming the correctness and internal consistency of the model. The obtained results form a basis for further studies in inverse kinematics, trajectory control, digital twin development, and integration into CAD/CAE environments. The proposed approach is effective for industrial applications that require high precision, repeatability, and flexibility under modern manufacturing conditions. The resulting kinematic model is universal and can be adapted to various configurations of floor-based manipulators used in production systems with stringent positioning accuracy requirements. Thanks to its modular structure, it is suitable for further integration into robotic platforms, digital environments, and virtual testing systems. In particular, it can be used for trajectory training, configuration optimization, or preliminary validation of control algorithms. This approach significantly reduces the need for physical testing and accelerates the design cycle of new robotic solutions, which is especially relevant in the context of Industry 4.0 and flexible manufacturing paradigms.

Keywords: floor-based robot manipulator, forward kinematics, Denavit-Hartenberg method, modeling.

Відомості про авторів

Баранов Олег Олегович – доктор технічних наук, професор, завідувач кафедри теоретичної механіки, машинознавства та роботомеханічних систем, Національний аерокосмічний університет «Харківський авіаційний інститут» м. Харків, Україна, O.Baranov@khai.edu. ORCID: 0000-0001-5356-1125

Сорока Анастасія Сергіївна – студентка кафедри теоретичної механіки, машинознавства та роботомеханічних систем, Національний аерокосмічний університет «Харківський авіаційний інститут» м. Харків, Україна, a.soroka@student.khai.edu. ORCID: 0009-0005-3166-4621

Бреус Андрій Олександрович – кандидат технічних наук, доцент, доцент кафедри теоретичної механіки, машинознавства та роботомеханічних систем, Національний аерокосмічний університет «Харківський авіаційний інститут» м. Харків, Україна, A.Breus@khai.edu. ORCID: 0000-0002-7310-1465

About the Authors

Baranov Oleg – Doctor of Technical Sciences, Professor, Head of Department of Theoretical Mechanics, Engineering and Robomechanical Systems, National Aerospace University “Kharkiv Aviation Institute”, Kharkiv, Ukraine, O.Baranov@khai.edu. ORCID: 0000-0001-5356-1125.

Soroka Anastasiia – student of Department of Theoretical Mechanics, Engineering and Robomechanical Systems, National Aerospace University "Kharkov Aviation Institute", Kharkov, Ukraine, a.soroka@student.khai.edu. ORCID: 0009-0005-3166-4621.

Breus Andrii – PhD in Materials Science and Processing Technologies, Associate Professor of Department of Theoretical Mechanics, Engineering and Robomechanical Systems, National Aerospace University "Kharkov Aviation Institute", Kharkov, Ukraine, A.Breus@khai.edu. ORCID: 0000-0002-7310-1465.