

doi: 10.32620/oikit.2025.104.06

УДК 539.3

С. Ю. Свердлов

Аналіз напружено-деформованого стану консольної плити з лінійним підшипниковим з'єднанням

*Національний аерокосмічний університет «Харківський авіаційний інститут»,
61070, Україна, Харків, вул. Вадима Манька, 17*

Запропоновано методику розв'язання просторової задачі теорії пружності для плити з жорстким врізаним циліндричним закріпленням та підшипниковим з'єднанням. Розрахункову модель представлено у вигляді шару з повздовжньою циліндричною порожниною та повздовжньою циліндричною товстостінною трубою. На верхній та нижній межах шару задані напруження, на поверхні порожнини задані переміщення, на внутрішній поверхні труби задані умови контактного типу. Шар та труба жорстко спряжені між собою. Розв'язок задачі представлений у вигляді рівняння Ламе в різних системах координат: шар розглядається в декартовій системі, порожнина та труба в локальних циліндричних. Для поєднання базисних розв'язків рівняння Ламе між різними системами координат застосовується узагальнений метод Фур'є. Нескінченна система інтегро-алгебраїчних рівнянь, що виникає з граничних умов, аналітично зводиться до лінійних алгебраїчних рівнянь другого роду, що дозволяє застосувати до неї метод редукції. При її чисельному розв'язанні точність результатів прямо залежить від ступеня наближення граничних поверхонь одна до одної та порядку системи рівнянь. Розв'язавши систему рівнянь знаходяться невідомі рівняння Ламе, що дозволяє отримати переміщення та напруження в будь якій точці тіла з високою точністю. Проведений числовий аналіз напружено-деформованого стану, під час якого отримано розподілення напружень в місцях їх концентрації: навколо порожнини, труби, на верхній та нижній межах шару. Результати дають уяву про навантаження на механізм підшипників, розподілення напружень вздовж них, залежність від матеріалу шару. З числових досліджень можна зробити висновок, що плита з розмірами по ширині та довжині більше ніж відстань від опори до консольного навантаження може бути представлена у вигляді запропонованої моделі шару. Запропонована методика розв'язання дає змогу інженерам отримувати високоточні результати напружено-деформованого стану при розрахунку міцності підшипникових вузлів при різному матеріалі та геометрії. Це дозволяє оптимізувати конструкції та забезпечити їх надійність.

Ключові слова: рівняння Ламе; узагальнений метод Фур'є; шар з циліндричними порожнинами; шар з циліндричними вклученнями;

Вступ

Підшипникові з'єднання є поширеними серед конструкцій в машинобудівній та аерокосмічній галузі. Існує дуже велика кількість видів підшипників, що поділяються на підшипники кочення та підшипники ковзання. Кожен з цих видів, в свою чергу, поділяється за напрямком сприйняття навантаження на радіальні, осьові та радіально-осьові. Одним із видів, що відносяться до осьових та радіально-осьових є довгі лінійні підшипники. Цей вид застосовується в місцях, де потрібна більша площа контакту для розподілу навантаження та забезпечення більш плавного руху на довших дистанціях. Вони мають довшу гільзу, що містить більшу кількість кульок або роликів, ніж стандартні підшипники. Деякі типи роликів підшипників, такі як голчасті підшипники, можуть мати значну довжину відносно їх діаметра. Довгі голчасті підшипники використовуються в вузлах з обмеженим радіальним простором де потрібна висока несуча здатність. Також

існують довгі циліндричні роликові підшипники, які можуть витримувати великі радіальні навантаження. Довгі втулки або підшипники ковзання використовуються для забезпечення опори валів на значній довжині. Вони допомагають розподілити навантаження по більшій площі, зменшуючи знос і забезпечуючи стабільність вала.

Довгі лінійні підшипники є дуже поширеними в різних галузях машинобудування завдяки їх здатності забезпечувати плавний і точний лінійний рух на значних відстанях. Вони застосовуються у системах лінійного переміщення інструменту та заготовки для забезпечення високої точності обробки, у транспортерних системах, пакувальних машинах та іншому обладнанні, де потрібен лінійний рух деталей або інструментів, у сканерах, діагностичних приладах та іншому обладнанні, де необхідне точне лінійне позиціонування.

В авіації застосування довгих лінійних підшипників є менш поширеним порівняно з машинобудуванням, але вони можуть використовуватися в деяких специфічних вузлах, де потрібен лінійний рух з високою надійністю та точністю в умовах обмеженого простору та екстремальних навантажень.

В авіації кожен грам ваги має значення, тому конструкції повинні бути максимально легкими та компактними при збереженні необхідних характеристик. З іншого боку встановлення підшипника вимагає створення під нього отвору, що є концентратором напружень в тілі конструкції і повинно враховуватись при розрахунку.

Для розрахунку таких вузлів, що представляють собою просторовий шар з поздовжніми циліндричними концентраторами напружень, застосування класичних аналітичних методів [1 – 4] можливо тільки при значному спрощенні розрахункової моделі, що призводить до значного зменшення точності розрахунків. Вказані методи дозволяють враховувати тільки плоскі моделі, або з кількістю канонічних граничних поверхонь до трьох.

Застосування для розрахунку подібних конструкцій чисельних методів [5, 6] потребує аналізу достовірності у вигляді випробувань або аналізу аналітичними методами, що ускладнює процес або не дає впевненості у кінцевому результаті.

Аналітико-числові методи інтегрують аналітичні перетворення та числові алгоритми, поєднуючи переваги точності аналітичних розв'язків для спрощених підзадач із універсальністю числових методів для складних або нелінійних компонентів. Це забезпечує підвищену точність, розширений клас розв'язуваних задач, покращену обчислювальну ефективність та глибше розуміння поведінки системи. Наприклад, у роботах [7, 8] досліджено задачу про шар з вертикальною циліндричною порожниною, де розв'язок отримано за допомогою комбінації інтегрального перетворення Лапласа та скінченних перетворень Фур'є, застосованих до осесиметричних рівнянь руху та граничних умов. Однак, цей метод не дозволяє розглядати випадки з кількома циліндричними порожнинами.

У роботі [9] для оптимізації розподілу теплових напружень у композитних пластинах з отворами довільної форми, що піддаються рівномірному тепловому потоку, застосовуються метаевристичні алгоритми оптимізації. Теоретична частина дослідження ґрунтується на термопружній теорії та методі комплексної змінної. Однак, запропонований підхід не дозволяє аналізувати пластини з більш ніж однією циліндричною порожниною.

Для аналізу напружено-деформованого стану шару з декількома

паралельними межами циліндричними неоднорідностями ефективним є застосування аналітико-числового узагальненого методу Фур'є [10]. Ключовою перевагою цього підходу є можливість комбінування точних базисних розв'язків рівняння Ламе, записаних у різних системах координат, що дозволяє враховувати складну геометрію задачі.

У порівнянні з чисто числовими методами, аналітико-числовий метод Фур'є має низку важливих переваг. По-перше, він забезпечує вищу точність результатів, оскільки використовує точні аналітичні розв'язки на початковому етапі. По-друге, при аналізі задач певної складності, він може вимагати менших обчислювальних ресурсів, оскільки значна частина розв'язку отримується в аналітичній формі. По-третє, отримані аналітичні вирази можуть бути корисними для подальшого якісного аналізу напружено-деформованого стану досліджуваних тіл.

Так, узагальнений метод Фур'є успішно використовувався для розв'язання задач про пружну рівновагу циліндра з однією або декількома циліндричними порожнинами [11, 12], а також з циліндричними включеннями [13]. Ці роботи демонструють гнучкість та ефективність методу при аналізі тіл зі складною геометрією.

Важливим аспектом застосування цього підходу є обґрунтування формул переходу між різними системами координат. В роботі [14] детально розглядаються формули переходу базисних розв'язків між декартовою та циліндричною системами координат на прикладі задачі про півпростір з циліндричною порожниною. Це обґрунтування є важливим для коректного поєднання розв'язків, отриманих у різних координатних системах, і забезпечує точність кінцевого результату при аналізі шарів з множинними циліндричними неоднорідностями.

Із застосуванням узагальненого методу Фур'є розв'язані задачі для шару з однією циліндричною порожниною в переміщеннях [15], в напруженнях [16] та змішаного типу [17]. Шар з циліндричною трубою розглядався в роботах [18, 19]. Але запропоновані підходи [15 – 19] дають можливість розв'язати задачу тільки з однією циліндричною неоднорідністю.

Шар з декількома циліндричними неоднорідностями розглядався в роботах [20 – 24]. Так в роботі [20] проведений аналіз напруженого стану для шару на двох врізаних циліндричних опорах, які розглядаються як дві циліндричні порожнини із заданими на них переміщеннями. В роботі [21] розглядається шар з трьома циліндричними порожнинами, коли на одній порожнині задані напруження, на інших задані умови контактного типу. В роботах [22, 23] розглядався шар з двома циліндричними трубами. Задача для шару з двома підшипниками у вигляді труб із заданими на них умовами контактного типу розглядалась в роботі [24]. Але підходи, запропоновані в роботах [20 – 24] не можуть бути застосованими при розв'язку задачі для консольно закріпленого шару з лінійним підшипником.

Метою даної роботи є:

1. Створити методику розв'язання просторової задачі теорії пружності для шару з циліндричною врізаною опорою (порожнина із заданими на ній переміщеннями) та лінійним підшипником у вигляді труби із заданими на внутрішній поверхні умовами контактного типу.

2. Провести аналіз напруженого стану шару та товстостінної труби при заданому консольному навантаженні.

1. Постановка задачі

Шар має циліндричне жорстке закріплення та циліндричну товстостінну трубу, які розташовані паралельно його межах (рис. 1). Закріплення розглядається як порожнина із заданими на ній переміщеннями. Порожнина та труба розглядаються в локальних циліндричних координатах (ρ, φ, z) , де ρ – номер труби або порожнини), шар розглядається у декартовій системі координат (x, y, z) , яка співпадає з системою координат порожнини ($\rho = 1$).

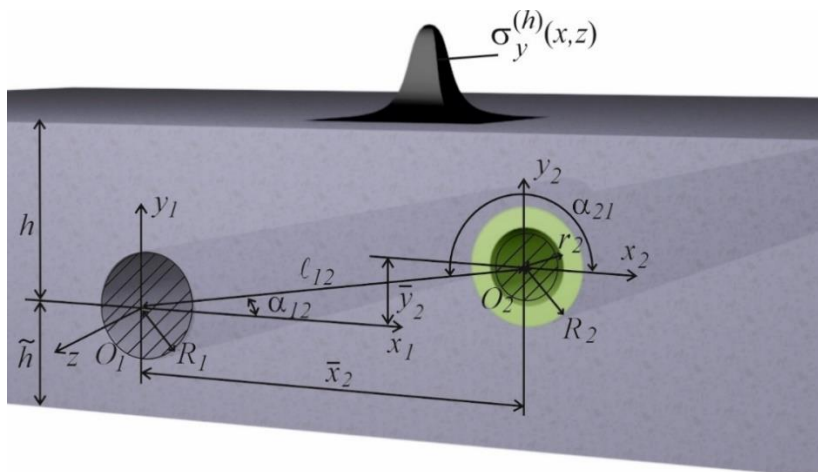


Рис. 1. Шар з циліндричною порожниною та трубою

Радіус порожнини та зовнішній радіус труби позначено R_p , внутрішній радіус труби r_p . Відстань до меж шару $y = h$ та $y = -\tilde{h}$.

Розв'язання задачі представлено у вигляді рівнянь Ламе, із заданими граничними умовами:

– на верхній та нижній межах шару задані напруження

$$F\vec{U}(x, z)|_{y=h} = \vec{F}_h^0(x, z), \quad F\vec{U}(x, z)|_{y=-\tilde{h}} = \vec{F}_{\tilde{h}}^0(x, z),$$

де

$$\begin{aligned} \vec{F}_h^0(x, z) &= \tau_{yx}^{(h)} \vec{e}_x + \sigma_y^{(h)} \vec{e}_y + \tau_{yz}^{(h)} \vec{e}_z, \\ \vec{F}_{\tilde{h}}^0(x, z) &= \tau_{yx}^{(\tilde{h})} \vec{e}_x + \sigma_y^{(\tilde{h})} \vec{e}_y + \tau_{yz}^{(\tilde{h})} \vec{e}_z. \end{aligned} \quad (1)$$

– на поверхні циліндричної порожнини ($\rho = 1$) задані переміщення

$$\vec{U}_p(\varphi_p, z)|_{\rho_p=\tilde{R}_p} = \vec{U}_p^0(\varphi_p, z) = U_\rho^{(p)} \vec{e}_\rho + U_\varphi^{(p)} \vec{e}_\varphi + U_z^{(p)} \vec{e}_z, \quad (2)$$

– на внутрішній поверхні труби задані умови гладкого контакту

$$\left. \begin{aligned} U_\rho(\varphi_p, z)|_{\rho_p=R_p} &= U_0^{(p)}(\varphi_p, z) \\ \tau_{\rho\varphi}(\varphi_p, z)|_{\rho_p=R_p} &= \tau_1^{(p)}(\varphi_p, z) \\ \tau_{\rho z}(\varphi_p, z)|_{\rho_p=R_p} &= \tau_2^{(p)}(\varphi_p, z) \end{aligned} \right\} \quad (3)$$

де $\vec{U}$ – переміщення в шарі;

$$F\vec{U} = 2 \cdot G \cdot \left[\frac{\sigma}{1-2 \cdot \sigma} \vec{n} \cdot \operatorname{div} \vec{U} + \frac{\partial}{\partial n} \vec{U} + \frac{1}{2} (\vec{n} \times \operatorname{rot} \vec{U}) \right] - \text{оператор напруження.}$$

Шар жорстко поєднаний з трубою умовами спряження

$$\vec{U}_0(\varphi_p, z) \Big|_{\rho_p=R_p} = \vec{U}_p(\varphi_p, z) \Big|_{\rho_p=R_p}, \quad (4)$$

$$F\vec{U}_0(\varphi_p, z) \Big|_{\rho_p=R_p} = F\vec{U}_p(\varphi_p, z) \Big|_{\rho_p=R_p}, \quad (5)$$

де $\vec{U}_0(\varphi, z)$ – розв'язок для шару; $\vec{U}_p(\varphi, z)$ – розв'язок для труби.

Всі задані функції є швидко спадаючими від початку координат.

2. Метод розв'язання

Рівняння Ламе представлено у вигляді запропонованому в роботі [24], тільки замість першої труби враховуємо порожнину:

$$\begin{aligned} \vec{U}_0 = & \sum_{p=1}^2 \sum_{k=1}^3 \int_{-\infty}^{\infty} \sum_{m=-\infty}^{\infty} B_{k,m}^{(p)}(\lambda) \cdot \vec{S}_{k,m}(\rho_p, \varphi_p, z; \lambda) d\lambda + \\ & + \sum_{k=1}^3 \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \left(H_k(\lambda, \mu) \cdot \vec{u}_k^{(+)}(x, y, z; \lambda, \mu) + \tilde{H}_k(\lambda, \mu) \cdot \vec{u}_k^{(-)}(x, y, z; \lambda, \mu) \right) d\mu d\lambda, \end{aligned} \quad (6)$$

$$\vec{U}_1 = \sum_{k=1}^3 \int_{-\infty}^{\infty} \sum_{m=-\infty}^{\infty} A_{k,m}^{(1)}(\lambda) \cdot \vec{R}_{k,m}(\rho_1, \varphi_1, z; \lambda) + \tilde{A}_{k,m}^{(1)}(\lambda) \cdot \vec{S}_{k,m}(\rho_1, \varphi_1, z; \lambda) d\lambda, \quad (7)$$

де $H_k(\lambda, \mu)$, $\tilde{H}_k(\lambda, \mu)$, $B_{k,m}^{(1)}(\lambda)$, $B_{k,m}^{(2)}(\lambda)$, $A_{k,m}^{(1)}(\lambda)$, $\tilde{A}_{k,m}^{(1)}(\lambda)$ – 18 невідомих функцій ($k = 1..3$), які необхідно знайти з крайових умов (1) – (3) та умов спряження (4) та (5); $\vec{S}_{k,m}$, $\vec{R}_{k,m}$, $\vec{u}_k^{(+)}$, $\vec{u}_k^{(-)}$ – базисні розв'язки рівняння Ламе, які представлено у вигляді [10]:

$$\vec{u}_k^{\pm}(x, y, z; \lambda, \mu) = N_k^{(d)} e^{i(\lambda z + \mu x) \pm \gamma y};$$

$$\vec{R}_{k,m}(\rho, \varphi, z; \lambda) = N_k^{(p)} I_m(\lambda \rho) e^{i(\lambda z + m \varphi)};$$

$$\vec{S}_{k,m}(\rho, \varphi, z; \lambda) = N_k^{(p)} \left[(\operatorname{sign} \lambda)^m K_m(|\lambda| \rho) \cdot e^{i(\lambda z + m \varphi)} \right]; k = 1, 2, 3;$$

$$N_1^{(d)} = \frac{1}{\lambda} \nabla; N_2^{(d)} = \frac{4}{\lambda} (\nu - 1) \vec{e}_2^{(1)} + \frac{1}{\lambda} \nabla(y \cdot); N_3^{(d)} = \frac{i}{\lambda} \operatorname{rot}(\vec{e}_3^{(1)} \cdot); N_1^{(p)} = \frac{1}{\lambda} \nabla;$$

$$N_2^{(p)} = \frac{1}{\lambda} \left[\nabla \left(\rho \frac{\partial}{\partial \rho} \right) + 4(\nu - 1) \left(\nabla - \vec{e}_3^{(2)} \frac{\partial}{\partial z} \right) \right]; N_3^{(p)} = \frac{i}{\lambda} \operatorname{rot}(\vec{e}_3^{(2)} \cdot);$$

$$\gamma = \sqrt{\lambda^2 + \mu^2}, \quad -\infty < \lambda, \mu < \infty,$$

де ν – коефіцієнт Пуассона; $I_m(x)$, $K_m(x)$ – модифіковані функції Бесселя.

Для запису рівнянь (6) та (7) в одній системі координат, застосовані формули переходу між базисними розв'язками рівняння Ламе [10]:

- від зовнішніх розв'язків для циліндра $\vec{S}_{k,m}$ до розв'язків для шару $\vec{u}_k^{(-)}$ (при $y > 0$) та $\vec{u}_k^{(+)}$ (при $y < 0$)

$$\begin{aligned}\vec{S}_{k,m}(\rho, \varphi, z; \lambda) &= \frac{(-i)^m}{2} \int_{-\infty}^{\infty} \omega_{\mp}^m \cdot \vec{u}_k^{(\mp)} \cdot \frac{d\mu}{\gamma}, \quad k=1, 3; \\ \vec{S}_{2,m}(\rho, \varphi, z; \lambda) &= \frac{(-i)^m}{2} \int_{-\infty}^{\infty} \omega_{\mp}^m \cdot \left(\left(\pm m \cdot \mu - \frac{\lambda^2}{\gamma} \right) \vec{u}_1^{(\mp)} - \lambda^2 \vec{u}_2^{(\mp)} + \right. \\ &\quad \left. \pm 4\mu(1-\nu) \vec{u}_3^{(\mp)} \right) \frac{d\mu}{\gamma^2},\end{aligned}\quad (8)$$

де $\gamma = \sqrt{\lambda^2 + \mu^2}$, $\omega_{\mp}(\lambda, \mu) = \frac{\mu \mp \gamma}{\lambda}$, $m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$;

- від розв'язків шару $\vec{u}_k^{(+)}$ та $\vec{u}_k^{(-)}$ до внутрішніх розв'язків циліндру $\vec{R}_{k,m}$

$$\begin{aligned}\vec{u}_k^{(\pm)}(x, y, z) &= \sum_{m=-\infty}^{\infty} (i \cdot \omega_{\mp})^m \vec{R}_{k,m}, \quad (k=1, 3); \\ \vec{u}_2^{(\pm)}(x, y, z) &= \sum_{m=-\infty}^{\infty} \left[(i \cdot \omega_{\mp})^m \cdot \lambda^{-2} \left((m \cdot \mu) \cdot \vec{R}_{1,m} \pm \right. \right. \\ &\quad \left. \left. \pm \gamma \cdot \vec{R}_{2,m} + 4\mu(1-\nu) \vec{R}_{3,m} \right) \right],\end{aligned}\quad (9)$$

де

$$\begin{aligned}\vec{R}_{k,m} &= \vec{b}_{k,m}(\rho, \lambda) \cdot e^{i(m\phi + \lambda z)}; \\ \vec{b}_{1,n}(\rho, \lambda) &= \vec{e}_{\rho} \cdot I'_n(\lambda\rho) + i \cdot I_n(\lambda\rho) \cdot \left(\vec{e}_{\phi} \frac{n}{\lambda\rho} + \vec{e}_z \right); \\ \vec{b}_{2,n}(\rho, \lambda) &= \vec{e}_{\rho} \cdot \left[(4\nu - 3) \cdot I'_n(\lambda\rho) + \lambda\rho I''_n(\lambda\rho) \right] + \\ &\quad + \vec{e}_{\phi} i \cdot m \left(I'_n(\lambda\rho) + \frac{4(\nu-1)}{\lambda\rho} I_n(\lambda\rho) \right) + \vec{e}_z i \lambda\rho I'_n(\lambda\rho); \\ \vec{b}_{3,n}(\rho, \lambda) &= - \left[\vec{e}_{\rho} \cdot I_n(\lambda\rho) \frac{n}{\lambda\rho} + \vec{e}_{\phi} \cdot i \cdot I'_n(\lambda\rho) \right];\end{aligned}$$

$\vec{e}_{\rho}$, $\vec{e}_{\phi}$, $\vec{e}_z$ – орти в циліндричній системі координат;

- від розв'язків циліндру з номером p до розв'язків циліндру з номером q

$$\vec{S}_{k,m}(\rho_p, \phi_p, z; \lambda) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \vec{b}_{k,pq}^{mn}(\rho_q) \cdot e^{i(n\phi_q + \lambda z)}, k=1, 2, 3; \quad (10)$$

$$\vec{b}_{1,pq}^{mn}(\rho_q) = (-1)^n \tilde{K}_{m-n}(\lambda \ell_{pq}) \cdot e^{i(m-n)\alpha_{pq}} \cdot \vec{b}_{1,n}(\rho_q, \lambda);$$

$$\vec{b}_{3,pq}^{mn}(\rho_q) = (-1)^n \tilde{K}_{m-n}(\lambda \ell_{pq}) \cdot e^{i(m-n)\alpha_{pq}} \cdot \vec{b}_{3,n}(\rho_q, \lambda);$$

$$\vec{b}_{2,pq}^{mn}(\rho_q) = (-1)^n \left\{ \tilde{K}_{m-n}(\lambda \ell_{pq}) \cdot \vec{b}_{2,n}(\rho_q, \lambda) - \frac{\lambda}{2} \ell_{pq} \cdot \right.$$

$$\left. \cdot \left[\tilde{K}_{m-n+1}(\lambda \ell_{pq}) + \tilde{K}_{m-n-1}(\lambda \ell_{pq}) \right] \cdot \vec{b}_{1,n}(\rho_q, \lambda) \right\} \cdot e^{i(m-n)\alpha_{pq}},$$

α_{pq} – кут між віссю x_p та відрізком ℓ_{pq} ; $\tilde{K}_m(x) = (\text{sign}(x))^m \cdot K_m(|x|)$.

Для знаходження 18 невідомих функцій (6) та (7) сформована система з 18 інтегро-алгебраїчних рівнянь.

Перші шість рівнянь утворені при виконанні граничних умов на плоских поверхнях шару (1). Для цього, до функцій (6) застосовано оператор напружень, а до (1) застосовано подвійний інтеграл Фур'є, після цього вони прирівняні один до одного. Базисні розв'язки $\vec{S}_{k,m}$ з циліндричної системи координат, за допомогою формул переходу (8), переписані через $\vec{u}_k^{(\pm)}$ в декартову.

Три рівняння записані для граничних умов на поверхні порожнини. Для цього до (2) застосовано інтеграл Фур'є по осі z та ряд Фур'є по куту ϕ , після цього вони підставлені у ліву частину (6). Базисні розв'язки $\vec{u}_k^{(\pm)}$ з декартової системи координат, за допомогою формул переходу (9), переписані через $\vec{R}_{k,m}$ в циліндричну.

Ще три рівняння утворюються при виконанні граничних умов на внутрішній поверхні труби (3). Для цього, до функцій (7) застосовано оператор напружень та створені відповідні рівняння: по $\vec{e}_\rho$ в переміщеннях, по $\vec{e}_\phi$, $\vec{e}_z$ в напруженнях. Ці вирази прирівняні до функцій (3), до яких застосовано інтеграл Фур'є по осі z та ряд Фур'є по куту ϕ .

Ще 6 рівнянь утворюються при виконанні умов спряження між шаром та трубою (4), (5). При виконанні цих умов, базисні розв'язки $\vec{u}_k^{(\pm)}$ переписані з декартової системи координат через $\vec{R}_{k,m}$ в локальні циліндричні за допомогою функцій переходу (9). Крім цього задіяні формули переходу базисних розв'язків від однієї локальної циліндричної системи координат до іншої (10).

З перших шести рівнянь були виражені $H_k(\lambda, \mu)$ та $\tilde{H}_k(\lambda, \mu)$ через $B_{k,m}^{(p)}(\lambda)$ та підставлені в інші рівняння. Звільнившись в лівій та правій частині від рядів та інтегралів ми отримали нескінчену систему з 12 лінійних алгебраїчних рівнянь другого роду до яких може бути застосований метод редукції. В

результаті розв'язання знайдені невідомі $B_{k,m}^{(1)}(\lambda)$, $B_{k,m}^{(2)}(\lambda)$, $A_{k,m}^{(1)}(\lambda)$, $\tilde{A}_{k,m}^{(1)}(\lambda)$. Отримані значення функцій $B_{k,m}^{(1)}(\lambda)$, $B_{k,m}^{(2)}(\lambda)$ підставлені у вираз для $H_k(\lambda, \mu)$ та $\tilde{H}_k(\lambda, \mu)$. В результаті були знайдені всі невідомі задачі.

3. Чисельні дослідження напруженого стану

Маємо шар із заданими на його плоских поверхнях напруженнями. Жорстке закріплення шару представлено як циліндрична порожнина із заданими на ній нульовими переміщеннями $U_\rho^{(p)} = U_\phi^{(p)} = U_z^{(p)} = 0$. Довгий лінійний підшипник представлений, як товстостінна труба, жорстко поєднана з шаром та заданими умовами гладкого контакту на внутрішній її поверхні $U_0^{(p)}(\phi_p, z) = \tau_1^{(p)}(\phi_p, z) = \tau_2^{(p)}(\phi_p, z) = 0$.

Фізичні характеристики шару: ABS пластик, коефіцієнт Пуассона $\nu_0 = 0,38$, модуль пружності $E_0 = 1700$ МПа. Фізичні характеристики труби: сталь, коефіцієнт Пуассона $\nu_1 = 0,25$, модуль пружності $E_1 = 2 \cdot 10^5$ МПа.

Геометричні параметри моделі: циліндрична порожнина та труба розташовані на одній горизонтальній осі ($\alpha_{12} = 0$), відстань між порожниною та трубою $\ell_{12} = 100$ мм, радіус порожнини та зовнішній радіус труби $R_1 = R_2 = 15$ мм, внутрішній радіус труби $r_2 = 10$ мм, відстані до верхньої та нижньої меж шару $h = \tilde{h} = 20$ мм.

Для визначення найбільш небезпечного місця розташування навантаження побудовані епюри ліній впливу (рис.2).

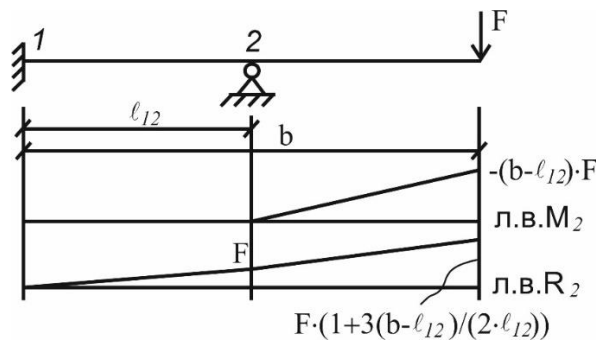


Рис. 2. Лінії впливу на підшипникове з'єднання

З рис.2 можна зробити висновок, що найбільш небезпечним є розташування навантаження на консолі.

Тож на верхній межі шару задані нормальні напруження $\sigma_y^{(h)}(x, z) = -10^8 \cdot (z^2 + 10^2)^{-2} \cdot ((x - b)^2 + 10^2)^{-2}$, $b = 2 \cdot \ell_{12} = 200$ мм та нульові

дотичні напруження $\tau_{yx}^{(h)} = \tau_{yz}^{(h)} = 0$, на нижній межі $\tau_{yx}^{(\tilde{h})} = \sigma_y^{(\tilde{h})} = \tau_{yz}^{(\tilde{h})} = 0$.

Консольне навантаження шару, який жорстко закріплений в опорі 1 та через товстостінну трубу гладко контактує з опорою 2 подана на рис.3.

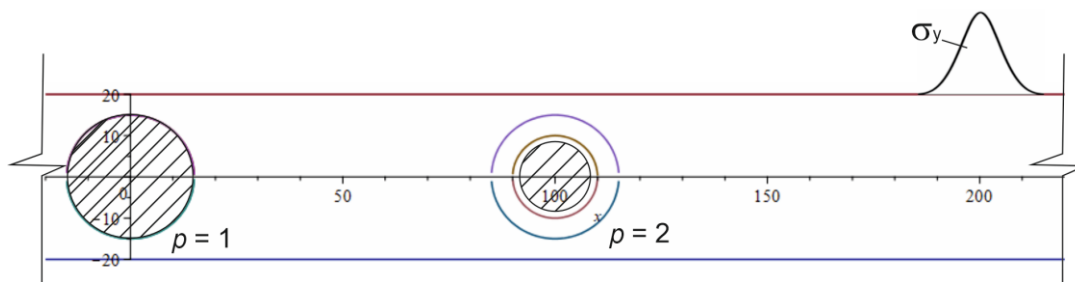
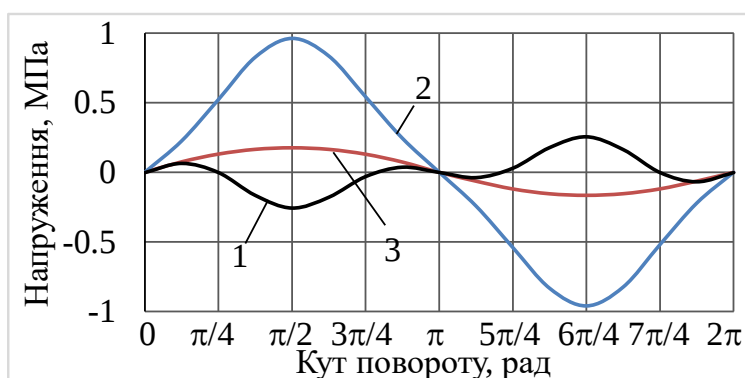


Рис.3. Розрахункова модель для чисельного дослідження

Нескінченна система була зрізана по параметру $m=6$ (кількість членів ряду Фур'є і порядок системи рівнянь). Точність виконання граничних умов при заданих геометричних параметрах становить не менше ніж 10^{-4} при значеннях від 0 до 1.

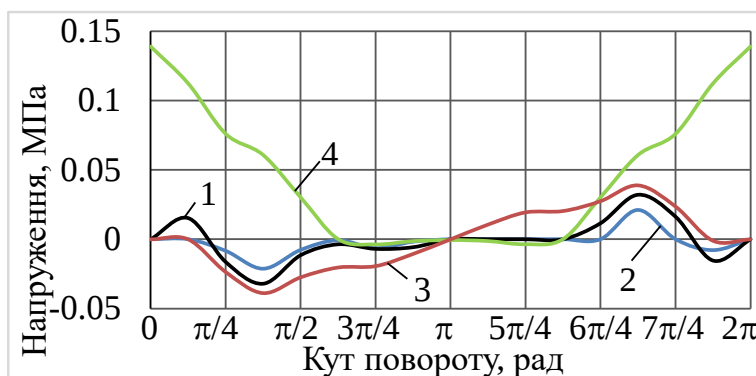
На рис. 4 представлені напруження на внутрішній поверхні труби при $z = 0$.

Рис. 4. Напруження на внутрішній поверхні труби; 1 – σ_r ; 2 – σ_ϕ ; 3 – σ_z

На поверхні труби максимальні напруження виникають в верхній і нижній частині (рис. 4). Від'ємні напруження σ_r розташовані в верхній частині труби (рис. 4, лінія 1), додатні напруження σ_r розташовані в нижній, що відповідає лінії впливу R_2 на рис. 2. Напруження σ_r дає розуміння про навантаження на безпосередньо механізм підшипників.

Напруження σ_ϕ , що виникають в верхній частині труби – додатні, в нижній частині – від'ємні та майже досягають заданих значень σ_y на поверхні шару.

На рис. 5 представлені напруження на поверхні отвору шару, що контактує з трубою при $z=0$.

Рис. 5. Напруження на поверхні отвору R_2 ; 1 – σ_r ; 2 – σ_ϕ ; 3 – σ_z ; 4 – $\tau_{r\phi}$

За рахунок жорсткого спряження шару з трубою, напруження σ_r , σ_φ та σ_z на поверхні отвору в шарі, де розташована труба, мають не великі значення. Тобто жорстке спряження з трубою значно посилює міцність цього вузла.

Однак необхідно звернути увагу на дотичні напруження $\tau_{r\varphi}$, які виникають в тілі шару праворуч від труби (рис. 5, лінія 4). Ці напруження є більш небезпечними, особливо для композитних багатошарових матеріалів.

Напруження σ_x на плоских поверхнях шару при $z = 0$ подані на рис.6.

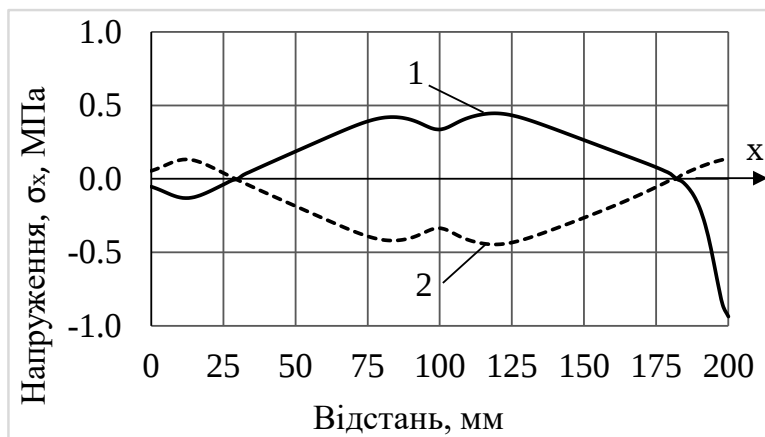


Рис. 6. Напруження σ_x на плоских поверхнях шару; 1 – верхня межа; 2 – нижня межа

Максимальні напруження σ_x виникають в місці розташування заданих напружень σ_y й майже досягають цих значень ($\sigma_{x,\max} = -0,9382$ МПа).

При заданій відстані до навантаження $b = 2l_{12}$ напруження σ_x на верхній та нижній межах шару в зоні підшипника по модулю не перевищують 0,45 МПа (рис. 6). При цьому максимальні значення не співпадають з віссю y_2 .

Вплив навантаження на напружений стан вздовж осі z над підшипником ($x = l_{12}$, $y = h$) в залежності від матеріалу шару поданий на рис. 7.

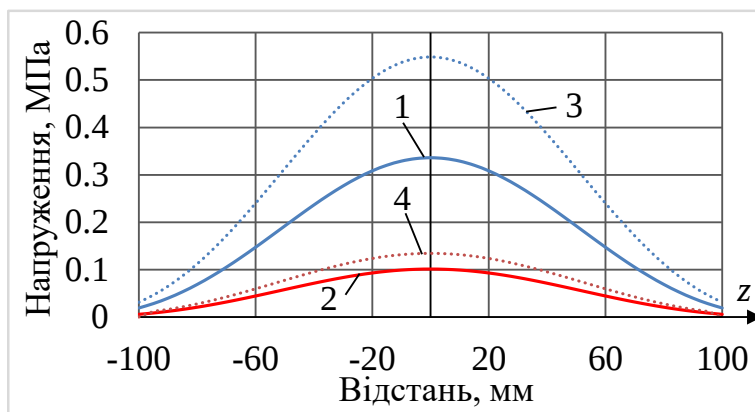


Рис. 7. Напруження вздовж осі z на верхній межі шару; 1 – σ_φ , пластик; 2 – σ_z , пластик; 3 – σ_φ , Д16Т; 4 – σ_z , Д16Т

При заданій функції, що має вигляд на рис. 3, на відстані що дорівнює $z = \pm l_{12}$ напруження σ_φ та σ_z згасають (рис. 7) і складають не більше 6 % від напруження при $z = 0$. Це відбувається пропорційно, не залежно від матеріалу.

З цього можна зробити висновок, що плита з розмірами по осі x і по осі z , більше ніж b може бути представлена у вигляді запропонованої моделі шару.

4. Висновки

1. Запропоновано аналітико-числовий підхід до розв'язання просторової задачі теорії пружності задачі для шару з циліндричною врізаною опорою (порожнина із заданими на ній переміщеннями) та лінійним підшипником у вигляді труби із заданими на внутрішній поверхні умовами контактного типу. Високоточний розв'язок задачі був досягнутий шляхом зведення її до нескінченної системи лінійних алгебраїчних рівнянь з подальшим застосуванням методу редукції та аналітико-чисельного узагальненого методу Фур'є.

2. Проведений числовий аналіз напружено-деформованого стану. Отримано розподілення напружень в місцях їх концентрації: навколо порожнини, труби, на верхній та нижній межах шару. Результати дають уяву про навантаження на механізм підшипників, розподілення напружень вздовж них, залежність від матеріалу шару.

3. Плита з довжиною та шириною більше ніж відстань від опори до консольного навантаження може бути представлена у вигляді шару.

4. Розроблений метод дає змогу інженерам отримувати високоточні результати напружено-деформованого стану при розрахунку міцності підшипникових вузлів при різному матеріалі та геометрії. Це дозволяє оптимізувати конструкції та забезпечити їх надійність.

В подальшому розвитку означеної теми досліджень необхідно розглянути моделі з додатковими циліндричними порожнинами та включеннями, а також з іншими граничними умовами.

Список літератури

1. Савин, Г. Н. Распределение напряжений около отверстий. Київ: Наук. думка, 1968. 891 с.
2. Космодамианский, А. С. Теоретическая и прикладная механика. Донецк: Донец. нац. ун-т, 2001. Вып. 32, 210 с.
3. Подильчук, Ю. Н. Трехмерные задачи теории упругости. Київ: Наук.Думка, 1979. 240с.
4. Гринченко, В.Т., Мелешко, В. В. Гармонические колебания и волны в упругих телах. Київ: Наук. думка, 1981. 284 с.
5. Tekkaya, A. E., Soyarslan C. Finite Element Method. In: *CIRP Encyclopedia of Production Engineering*. Berlin: Springer Berlin Heidelberg, 2014. P. 508–514. https://doi.org/10.1007/978-3-642-20617-7_16699.
6. Static Structural Simulation Using Ansys Discovery. Режим доступу: <https://courses.ansys.com/index.php/courses/structural-simulation> (дата звернення: 01.04.2025).
7. Fesenko, A., Vaysfel'd, N. The Wave Field of a Layer with a Cylindrical Cavity in Structural Integrity. In: *Structural Integrity*. Springer International Publishing, 2019. P. 277–282. https://doi.org/10.1007/978-3-030-21894-2_51.
8. Fesenko, A., Vaysfel'd, N. The dynamical problem for the infinite elastic layer with a cylindrical cavity. *Procedia Structural Integrity*. 2021. Vol. 33. P. 509–527. <https://doi.org/10.1016/j.prostr.2021.10.058>.
9. Jafari, M., Chaleshtari, M. H. B., Khoramishad, H., Altenbach,

H. Minimization of thermal stress in perforated composite plate using metaheuristic algorithms WOA, SCA and GA. *Composite Structures*. 2023. Vol. 304. P. 116403. <https://doi.org/10.1016/j.compstruct.2022.116403>.

10. Николаев, А. Г., Проценко, В. С. Обобщенный метод Фурье в пространственных задачах теории упругости. Харьков: Нац. аэрокосм. ун-т им. Н. Е. Жуковского «ХАИ», 2011. 344 с.

11. Nikolaev, A. G., Tanchik, E. A. The first boundary-value problem of the elasticity theory for a cylinder with N cylindrical cavities. *Numerical Analysis and Applications*. 2015. Vol. 8, № 2. P. 148–158. <https://doi.org/10.1134/s1995423915020068>.

12. Nikolaev, A. G., Tanchik, E. A. Stresses in an elastic cylinder with cylindrical cavities forming a hexagonal structure. *Journal of Applied Mechanics and Technical Physics*. 2016. Vol. 57, № 6. P. 1141–1149. <https://doi.org/10.1134/s0021894416060237>.

13. Nikolaev, A. G., Tanchik, E. A. Model of the Stress State of a Unidirectional Composite with Cylindrical Fibers Forming a Tetragonal Structure. *Mechanics of Composite Materials*. 2016. Vol. 52, № 2. P. 177–188. <https://doi.org/10.1007/s11029-016-9571-6>.

14. Ukrayinets, N., Murahovska, O., & Prokhorova, O. Solving a one mixed problem in elasticity theory for half-space with a cylindrical cavity by the generalized Fourier method. *Eastern-European Journal of Enterprise Technologies*. 2021. Vol. 2, № 7 (110). P. 48–57. <https://doi.org/10.15587/1729-4061.2021.229428>.

15. Miroshnikov V. Yu. The study of the second main problem of the theory of elasticity for a layer with a cylindrical cavity. *Strength of Materials and Theory of Structures*. 2019. № 102. P. 77–90. <https://doi.org/10.32347/2410-2547.2019.102.77-90>.

16. Miroshnikov, V., Denysova, T., Protsenko, V. The study of the first main problem of the theory of elasticity for a layer with a cylindrical cavity. *Strength of Materials and Theory of Structures*. 2019. Vol. 103. P. 208–218. <https://doi.org/10.32347/2410-2547.2019.103.208-218>.

17. Miroshnikov, V. Yu. Stress State of an Elastic Layer with a Cylindrical Cavity on a Rigid Foundation. *International Applied Mechanics*. 2020. Vol. 56, № 3. P. 372–381. DOI: 10.1007/s10778-020-01021-x.

18. Miroshnikov, V. Investigation of the Stress Strain State of the Layer with a Longitudinal Cylindrical Thick-Walled Tube and the Displacements Given at the Boundaries of the Layer. *Journal of Mechanical Engineering*. 2019. Vol. 22, № 2. P. 44–52. <https://doi.org/10.15407/pmach2019.02.044>.

19. Vitaly, M. Rotation of the Layer with the Cylindrical Pipe Around the Rigid Cylinder. In: *Advances in Mechanical and Power Engineering. CAMPE 2021*. Cham: Springer, 2023. P. 314–322. https://doi.org/10.1007/978-3-031-18487-1_32.

20. Miroshnikov, V. Yu., Savin, O. B., Hrebennikov, M. M., & Demenko, V. F. Analysis of the stress state for a layer with two incut cylindrical supports. *Journal of Mechanical Engineering – Problemy Mashynobuduvannia*. 2023. Vol. 26, № 1. P. 15–22. <https://doi.org/10.15407/pmach2023.01.015>.

21. Miroshnikov, V. Yu., Pelykh, V. P., & Denshchykov, O. Yu. Analysis of the stress state of a layer with two cylindrical swivel joints and a cylindrical cavity. *Journal of Mechanical Engineering – Problemy Mashynobuduvannia*. 2024. Vol. 27, № 2. P. 25–35. <https://doi.org/10.15407/pmach2024.02.025>.

22. Miroshnikov, V., Denshchykov, O., Grebeniuk, I., Savin, O. An Analysis of the Stress–Strain State of a Layer on Two Cylindrical Bearings. *Computation*. 2024.

Vol. 12, № 9. P. 182. <https://doi.org/10.3390/computation12090182>.

23. Denshchykov, O. Yu., Pelykh, V. P., Hrebeniuk, Ya. V., Miroshnikov, V. Yu. First Basic Problem of Elasticity Theory for a Composite Layer with Two Thick-Walled Tubes. *Journal of Mechanical Engineering – Problemy Mashynobuduvannia*. 2024. Vol. 27, № 4. P. 40-50. <https://doi.org/10.15407/pmach2024.04.040>.

24. Косенко, М. Л., Ільїн, О. О., Сverdlov, С. Ю., Савін, О. Б. Аналіз напруженого стану шару на двох циліндричних врізаних опорах з підшипниками ковзання. *International Science Journal of Engineering & Agriculture*. 2025. Том 4, № 2. С. 171-183. DOI: 10.46299/j.isjea.20250402.11.

References

1. Savin, G. N. (1968). *Raspreделение napriazhenii okolo otverstii* [Stress distribution around holes]. Naukova Dumka, 891 pages.
2. Kosmodamianskii, A. S. (2001). Teoreticheskaya i prikladnaya mekhanika [Theoretical and applied mechanics]. *Donetskii Natsional'nyi Universitet*, 32, 210 p.
3. Podil'chuk, Yu. N. (1979). *Trekhmernye zadachi teorii uprugosti* [Three-dimensional problems of the theory of elasticity]. Naukova Dumka, 240 pages.
4. Grinchenko, V. T., & Meleshko, V. V. (1981). *Garmonicheskie kolebaniia i volny v uprugikh telakh* [Harmonic oscillations and waves in elastic bodies]. Naukova Dumka, 284 pages.
5. Tekkaya, A. E., & Soyarslan, C. (2014). Finite Element Method. In *CIRP Encyclopedia of Production Engineering* (pp. 508–514). Springer Berlin Heidelberg. https://doi.org/10.1007/978-3-642-20617-7_16699
6. Ansys, (n.d.). *Static structural simulation using Ansys Discovery*. Ansys Courses. Retrieved April 1, 2025, from <https://courses.ansys.com/index.php/courses/structural-simulation>
7. Fesenko, A., & Vaysfel'd, N. (2019). The Wave Field of a Layer with a Cylindrical Cavity in Structural Integrity. In *Structural Integrity* (pp. 277–282). Springer International Publishing. https://doi.org/10.1007/978-3-030-21894-2_51
8. Fesenko, A., & Vaysfel'd, N. (2021). The dynamical problem for the infinite elastic layer with a cylindrical cavity. *Procedia Structural Integrity*, 33, 509–527. <https://doi.org/10.1016/j.prostr.2021.10.058>
9. Jafari, M., Chaleshtari, M. H. B., Khoramishad, H., & Altenbach, H. (2023). Minimization of thermal stress in perforated composite plate using metaheuristic algorithms WOA, SCA and GA. *Composite Structures*, 304, 116403. <https://doi.org/10.1016/j.compstruct.2022.116403>
10. Nikolaev, A. G., & Protsenko, V. S. (2011). *Obobshchennyi metod Fur'e v prostranstvennykh zadachakh teorii uprugosti* [Generalized Fourier method in spatial problems of elasticity theory]. Natsional'nyi Aerokosmicheskii Universitet im. N. E. Zhukovskogo "KhAI", 344 pages.
11. Nikolaev, A. G., & Tanchik, E. A. (2015). The first boundary-value problem of the elasticity theory for a cylinder with N cylindrical cavities. *Numerical Analysis and Applications*, 8(2), 148–158. <https://doi.org/10.1134/s1995423915020068>
12. Nikolaev, A. G., & Tanchik, E. A. (2016). Stresses in an elastic cylinder with cylindrical cavities forming a hexagonal structure. *Journal of Applied Mechanics and Technical Physics*, 57(6), 1141–1149. <https://doi.org/10.1134/s0021894416060237>
13. Nikolaev, A. G., & Tanchik, E. A. (2016). Model of the Stress State of a Unidirectional Composite with Cylindrical Fibers Forming a Tetragonal Structure. *Mechanics of Composite Materials*, 52(2), 177–188. <https://doi.org/10.1007/s11029->

016-9571-6

14. Ukrayinets, N., Murahovska, O., & Prokhorova, O. (2021). Solving a one mixed problem in elasticity theory for half-space with a cylindrical cavity by the generalized Fourier method. *Eastern-European Journal of Enterprise Technologies*, 2(7 (110)), 48–57. <https://doi.org/10.15587/1729-4061.2021.229428>

15. Miroshnikov, V. Yu. (2019). The study of the second main problem of the theory of elasticity for a layer with a cylindrical cavity. *Strength of Materials and Theory of Structures*, 102, 77–90. <https://doi.org/10.32347/2410-2547.2019.102.77-90>

16. Miroshnikov, V., Denysova, T., & Protsenko, V. (2019). The study of the first main problem of the theory of elasticity for a layer with a cylindrical cavity. *Strength of Materials and Theory of Structures*, 103, 208–218. <https://doi.org/10.32347/2410-2547.2019.103.208-218>

17. Miroshnikov, V. Yu. (2020). Stress State of an Elastic Layer with a Cylindrical Cavity on a Rigid Foundation. *International Applied Mechanics*, 56(3), 372–381. <https://doi.org/10.1007/s10778-020-01021-x>

18. Miroshnikov, V. (2019). Investigation of the Stress Strain State of the Layer with a Longitudinal Cylindrical Thick-Walled Tube and the Displacements Given at the Boundaries of the Layer. *Journal of Mechanical Engineering*, 22(2), 44–52. <https://doi.org/10.15407/pmach2019.02.044>

19. Vitaly, M. (2023). Rotation of the Layer with the Cylindrical Pipe Around the Rigid Cylinder. In *Advances in Mechanical and Power Engineering. CAMPE 2021* (pp. 314–322). Springer, Cham. https://doi.org/10.1007/978-3-031-18487-1_32

20. Miroshnikov, V. Yu., Savin, O. B., Hrebennikov, M. M., & Demenko, V. F. (2023). Analysis of the stress state for a layer with two incut cylindrical supports. *Journal of Mechanical Engineering – Problemy Mashynobuduvannia*, 26(1), 15–22. <https://doi.org/10.15407/pmach2023.01.015>

21. Miroshnikov, V. Yu., Pelykh, V. P., & Denshchykov, O. Yu. (2024). Analysis of the stress state of a layer with two cylindrical swivel joints and a cylindrical cavity. *Journal of Mechanical Engineering – Problemy Mashynobuduvannia*, 27(2), 25–35. <https://doi.org/10.15407/pmach2024.02.025>

22. Miroshnikov, V., Denshchykov, O., Grebeniuk, I., & Savin, O. (2024). An Analysis of the Stress–Strain State of a Layer on Two Cylindrical Bearings. *Computation*, 12(9), 182. <https://doi.org/10.3390/computation12090182>

23. Denshchykov, O. Yu., Pelykh, V. P., Hrebenuk, Ya. V., & Miroshnikov, V. Yu. (2024). First Basic Problem of Elasticity Theory for a Composite Layer with Two Thick-Walled Tubes. *Journal of Mechanical Engineering – Problemy Mashynobuduvannia*, 27(4), 40–50. <https://doi.org/10.15407/pmach2024.04.040>

24. Kosenko, M. L., Il'yin, O. O., Sverdlov, S. Yu., & Savin, O. B. (2025). Analiz napruzhenoho stanu sharu na dvokh tsilindrychnykh vrizanykh oporakh z pidshypnykamy kovzannia [Analysis of the stress state of a layer on two cylindrical embedded supports with sliding bearings]. *International Science Journal of Engineering & Agriculture*, 4(2), 171–183. <https://doi.org/10.46299/j.isjea.20250402.11>

Надійшла до редакції 12.05.2025, розглянута на редколегії 12.05.2025

Analysis of the stress-strain state of a cantilever plate with a linear bearing connection

A methodology for solving a spatial problem of elasticity theory for a slab with a

rigid embedded cylindrical fixation and a bearing connection is proposed. The computational model is represented as a layer with a longitudinal cylindrical cavity and a longitudinal cylindrical thick-walled pipe. Stresses are specified at the upper and lower boundaries of the layer, displacements are specified on the surface of the cavity, and contact-type conditions are specified on the inner surface of the pipe. The layer and the pipe are rigidly connected to each other. The solution to the problem is presented in the form of the Lamé equation in different coordinate systems: the layer is considered in the Cartesian system, the cavity and the pipe in the local cylindrical system. To combine the basic solutions of the Lamé equation between different coordinate systems, the generalized Fourier method is used. The infinite system of integro-algebraic equations arising from the boundary conditions is analytically reduced to linear algebraic equations of the second kind, which allows us to apply the method of reduction to it. When solving it numerically, the accuracy of the results directly depends on the degree of approximation of the boundary surfaces to each other and the order of the system of equations. By solving the system of equations, the unknown Lamé equations are found, which makes it possible to obtain displacements and stresses at any point of the body with high accuracy. A numerical analysis of the stress-strain state was performed, during which the stress distribution was obtained in places of their concentration: around the cavity, pipe, at the upper and lower boundaries of the layer. The results give an idea of the load on the bearing mechanism, the distribution of stresses along them, and the dependence on the layer material. From the numerical studies, it can be concluded that a slab with dimensions in width and length greater than the distance from the support to the cantilever load can be represented by the proposed model. The developed method allows engineers to obtain highly accurate results of the stress-strain state when calculating the strength of bearing assemblies with different materials and geometries. This makes it possible to optimize structures and ensure their reliability.

Keywords: Lamé equation; generalized Fourier method; layer with cylindrical cavities; layer with cylindrical inclusions;

Відомості про авторів:

Свердлов Сергій Юрійович – аспірант каф. міцності літальних апаратів, Національний аерокосмічний університет «ХАІ». s.y.sverdlov@khai.edu, +380991195301, ORCID: 0009-0001-8220-8731

About the Authors:

Serhii Sverdlov – PhD student, Department of Aircraft Strength, National Aerospace University “KhAI”. s.y.sverdlov@khai.edu, +380 991195301, ORCID: 0009-0001-8220-8731