doi: 10.32620/oikit.2025.103.02

УДК 531.8 О. О. Баранов, Є. О. Баранова, А. О. Бреус, О. Ю. Кладова

Кінематичний розрахунок положення та орієнтації захоплювального пристрою робота Annin Robotics AR3

Національний аерокосмічний університет «Харківський авіаційний інститут»

У роботі здійснено комплексний аналіз та практичне розв’язання задачі прямої кінематики шестивісного маніпулятора Annin Robotics AR3 – відкритої робототехнічної платформи, яка активно застосовується у навчальних, лабораторних та промислових середовищах. Враховуючи конструктивні особливості AR3, обрано класичний підхід до моделювання кінематики на основі параметрів Денавіта-Хартенберга. Детально описано процес побудови спеціальних систем координат для кожної з ланок маніпулятора, з урахуванням особливостей їх розміщення та обертання. На підставі кінематичної схеми складено таблицю параметрів переходу між ланками, які використовуються для формування відповідних однорідних матриць перетворень.

У роботі послідовно сформовано шість однорідних матриць переходу, що описують положення та орієнтацію виконавчого органу у базовій системі координат. Представлено повну математичну процедуру множення матриць і виокремлення геометричних характеристик – напрямних косинусів та просторових координат захоплювального пристрою. З метою верифікації розрахунків побудовано графіки положення та орієнтації виконавчого органу для заданої часової послідовності кутів обертання. В результаті виконаних обчислень отримано динаміку зміни положення та орієнтації захоплювача у просторі з точністю, що відповідає технічним характеристикам робота AR3. У статті також зроблено огляд сучасних наукових публікацій, присвячених розв’язанню аналогічних задач. Зокрема, розглянуто гібридні підходи, які поєднують аналітичні моделі з машинним навчанням, сенсорну адаптацію кінематичних моделей у реальному часі, та використання цифрових двійників для моделювання роботи маніпуляторів у віртуальному середовищі. Отримані результати підтверджують доцільність використання класичного аналітичного підходу для освітніх і прикладних завдань та слугують основою для подальших розробок алгоритмів зворотної кінематики, адаптивного керування та вбудованого планування руху.

Ключові слова: пряма кінематика, параметри Денавіта-Хартенберга, роботизований маніпулятор, Annin Robotics AR3, освітня робототехніка.

Вступ

У сучасній інженерії роботизовані маніпулятори стали невід’ємною частиною автоматизованих виробничих процесів, лабораторних досліджень та навчальних програм. Їх здатність виконувати точні та повторювані рухи у тривимірному просторі відкриває широкі можливості для вирішення прикладних задач – від зварювання до хірургічних операцій [1,2]. Серед усіх типів роботів шестивісні серійні маніпулятори займають особливе місце завдяки своїй гнучкості, компактності та здатності досягати складних позицій з високою точністю [3]. Ключовим завданням при роботі з такими маніпуляторами є вирішення задачі прямої кінематики (Direct Kinematics Problem, DKP), що передбачає визначення положення та орієнтації виконавчого органу робота за заданими значеннями кутів суглобів. Це фундаментальна задача, яка впливає на точність позиціонування, обчислення зворотної кінематики, реалізацію траєкторного планування та інтеграцію з сенсорними системами [4].

Значна кількість досліджень у сфері кінематики роботів були присвячені моделюванню та аналізу роботизованих маніпуляторів з шістьма ступенями свободи (DOF) з використанням як класичних, так і альтернативних методів. Зокрема, низка публікацій застосовує метод Денавіта-Хартенберга (DH) для виведення моделей прямої та оберненої кінематики, що дозволяє точно обчислювати положення та орієнтацію виконавчого органа. Низка авторів запропонувала моделі прямої кінематики з акцентом на точне керування траєкторією зчленувань через матричні перетворення [5, 6]. Аналогічно, були надані розширені формулювання, що включають обернену кінематику та обчислення матриці Якобі [7, 8]. Ці результати були доповнені експериментальною перевіркою методу, заснованого на DH, продемонструвавши підвищену точність [9]. У протилежність цьому, було запропонувано альтернативний алгебраїчний підхід на основі експоненціальних обертових матриць, що забезпечує вищу обчислювальну ефективність та інтуїтивно зрозуміле фізичне тлумачення [10]. Сукупно ці дослідження підкреслюють важливу роль точного кінематичного моделювання для підвищення точності й керованості роботизованих маніпуляторів. Ці результати дозволили успішно визначили параметри DH та пряму кінематику для хірургічного робота з 6 ступенями свободи, підтвердивши модель за допомогою 3D-візуалізації [11]. Також був запропонований порівняльний огляд різних координатних систем для роботів і застосований метод DH для вирішення прямої кінематики структури RRRT [12]. В іншому дослідженні був змодельований промисловий робот ABB IRB 4400, для якого за допомогою MATLAB обчислено та підтверджено як пряму, так і обернену кінематику [13]. Інші автори застосували метод DH до руки гуманоїдного робота NAO, зосередившись на перетвореннях зчленувань і моделюванні, або на аналітичному визначенні параметрів DH для підвищення точності при мінімальному діапазоні вимірювання [14,15]. Крім того, було проведене порівняння стандартного й модифікованого позначення DH для прямої кінематики, підкресливши відмінності в розміщенні координат і порядку перетворень на прикладі робота YASKAWA-MOTOMAN-GP7 [16]. Більш того, наукова література свідчить про зростаючий інтерес до вдосконалення методів кінематичного моделювання роботизованих маніпуляторів. У проведених дослідженнях було підкреслено ефективність поєднання параметрів DH, багатотільних моделей і симуляційних інструментів для планування траєкторії робота COMAU з шістьма осями [17], а також запропонуваний систематичний алгебраїчний метод призначення параметрів DH, адаптований до довільних базових і кінцевих координат [18]. Зусилля дослідників були також спрямовані на аналіз 6-DOF шарнірного робота зі сферичним зап'ястям, використовуючи метод Піпера для спрощення оберненої кінематики [19]. Сінгх і співавтори здійснили огляд класичних і модифікованих DH-методів, порівнюючи їх з альтернативами, такими як метод добутку експонент, а Майорідіс і співавтори запропонували новий поліноміальний метод DH для геометричного проєктування просторових маніпуляторів з обертовими зчленуваннями [20, 21]. Дослідження з меншою кількістю ступенів свободи показали успішне застосування методу DH у практичних задачах [22]. Крім того, Віллалобос і співавтори статистично порівняли кілька рішень оберненої кінематики на основі DH для маніпулятора UR5, виявивши різні рівні точності [23].

Серед сучасних відкритих платформ роботів, особливе місце займає Annin Robotics AR3 – шестивісний маніпулятор, який завдяки своїй відкритій архітектурі, програмному забезпеченню на основі ROS та документації, став популярним у освітніх та дослідницьких установах. Його конструкція дозволяє гнучко модифікувати апаратне середовище та легко реалізовувати різноманітні алгоритми кінематичного аналізу, що є важливим як для навчальних, так і для дослідницьких цілей. У контексті розв'язання задачі прямої кінематики для AR3, актуальним є побудова повної аналітичної моделі на основі DH-параметрів, реалізація у середовищі MATLAB або Python, верифікація у симуляційному середовищі, а також аналіз відхилень. Такий підхід є критично важливим для подальшої реалізації зворотної кінематики, планування траєкторій та інтеграції зі штучним інтелектом. У цій роботі, основна увага приділяється саме побудова повної аналітичної моделі на основі DH-параметрів.

Основний матеріал

Опис робота-маніпулятора AR3 і формулювання прямої задачі кінематики. На сьогоднішній день робот-маніпулятор моделі AR3 від компанії Annin Robotics широко застосовується, перш за все, у навчальному процесі у різних освітніх закладах по всьому світу. До сфер його застосування також відносяться контроль якості технологічних операцій і різні операції на виробництві. Популярність робота обумовлена відносно недорогою вартістю, яка поєднується з розвиненою механічною системою, що включає в себе сукупність шести мехатронних виробів – крокових двигунів, подекуди – із вбудованими редукторами. Annin Robotics AR3 – це 6-осьовий робот (робот-маніпулятор), що працює з навантаженням до 1 кг на дистанції до 600 мм. Точність позиціонування Annin Robotics AR3 становить 0,2 мм, а маса робота приблизно дорівнює 10 кг. 3D модель робота-маніпулятора AR3 показана на Рис. 1.

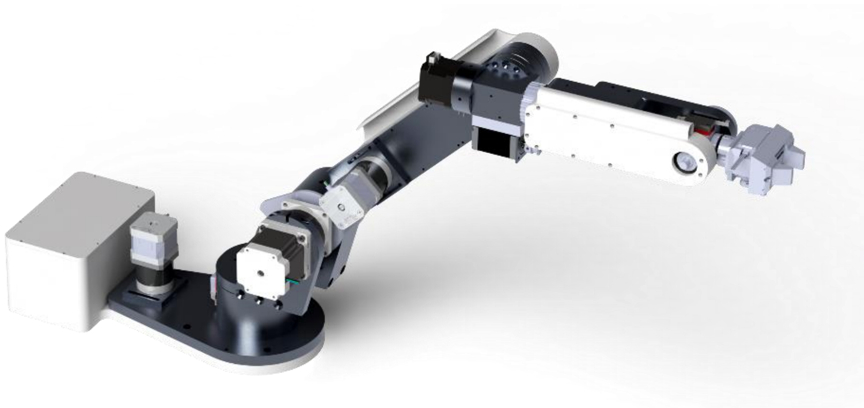


Рис. 1. 3D модель робота-маніпулятора Annin Robotics AR3

Для прогнозування положення виконавчого органу робота-маніпулятора (захоплювача, зварювальної головки, фарбопульта тощо) необхідно розраховувати залежності орієнтації і координат цього органу у базовій системі координат, відносно якої ведеться відлік при зміненні узагальнених координат, які, у свою чергу, залежать від положення виконавчих приводів (валів електричних двигунів, штоків пневмо- та гідро-циліндрів тощо) у певний момент часу.

Пряма задача кінематики маніпуляторів формулюється так: задана кінематична схема маніпулятора і в певний момент часу відомі значення узагальнених координат, що визначають положення всіх ланок маніпулятора одна відносно одної. Потрібно визначити положення і орієнтацію останньої ланки маніпулятора (захоплювача) у системі відліку, зв'язаної зі стояком. Геометричні розміри ланок вважаються заданими.

Опис спеціальної системи координат. Для розв’язання прямої задачі кінематики робота-маніпулятора моделі AR3 застосовуємо метод Денавіта-Хартенберга. Першим етапом реалізації цього методу є впровадження до кінематичної схеми маніпулятора осей, які підлягають наступним вимогам. Віссю обертальної пари (i, $i + 1$), складеної з ланок i та $i + 1$, є вісь циліндричного шарніра, жорстко зв'язана з ланкою i, навколо якої обертається ланка $i + 1$. Для поступальної пари (i, $i + 1$) віссю є будь-яка пряма, паралельна вектору швидкості поступального руху ланки $i + 1$ відносно ланки i.

Другим етапом є нумерація всіх ланок маніпулятора від стояка (ланка 0) до захоплювача (ланки n), після чого кожною ланкою необхідно зв'язати свою систему декартових координат, вибрану таким чином: вісь z_i проходить по осі кінематичної пари (i, $i + 1$); початок координат системи i, жорстко зв'язаної з ланкою i, лежить або на загальному перпендикулярі до осей z_{i-1} і z_i, або в точці їх перетину (якщо така є), або в будь-якій точці осі кінематичної пари, якщо вісь z_i збігається з віссю z_{i-1} або паралельна їй; вісь x_i проходить по загальному перпендикуляру, проведеному до осей z_{i-1} і z_i і спрямованому від точки перетину цього перпендикуляра з віссю z_{i-1} до точки його перетину з віссю z_i (або в будь-яку сторону по нормалі до площини, що містить осі z_{i-1} і z_i, якщо вони перетинаються, або довільним способом, якщо z_{i-1} і z_i проходять по одній прямій); вісь y_i вибирається за правилом правої трійки векторів. Початок координат системи 0, тобто системи, жорстко зв'язаної зі стояком, може лежати в будь-якій точці осі пари (0, 1); вісь x_0 прямує довільним чином. При цьому вибір системи n теж не піддається загальному правилу, оскільки ланка $n + 1$ відсутня. Тому пропонується уявити будь-який тип пари (n, $n + 1$) і після цього вибрати систему за загальним правилом. Початок вибраної таким чином системи називається центром захоплювача. Застосовуємо цей алгоритм до кінематичної схеми робота-маніпулятора моделі AR3 і отримуємо наступну схему (Рис. 2). Для досліджуваної кінематичної схеми маніпулятора будуємо і поступово заповнюємо Таблицю 1 параметрів переходу від базової спеціальної системи координат до останньої, що пов’язана із робочим органом маніпулятора. Згідно з методом Деневіта–Хартенберга, спеціальний вибір систем координат ланок маніпулятора дозволяє за допомогою лише чотирьох параметрів (а не шести, як у загальному випадку) описати перехід з однієї системи в іншу. Систему $i - 1$ можна перетворити на систему i за допомогою повороту, двох зсувів (переносів) і ще одного повороту, які виконуються в такому порядку:

1) поворот системи $i - 1$ навколо осі z_{i-1} на кут Θ_i до тих пір, поки вісь x_{i-1} не стане паралельною осі x_i;

2) зсув повернутої системи уздовж осі z_{i-1} на величину s_i до тих пір, поки осі x_{i-1} і x_i не опиняться на одній прямій;

3) зсув уздовж осі x_i на величину a_i до тих пір, поки не зійдуться початки координат;

4) поворот навколо осі x_i на кут α_i до суміщення осі z_{i-1} з віссю z_i.

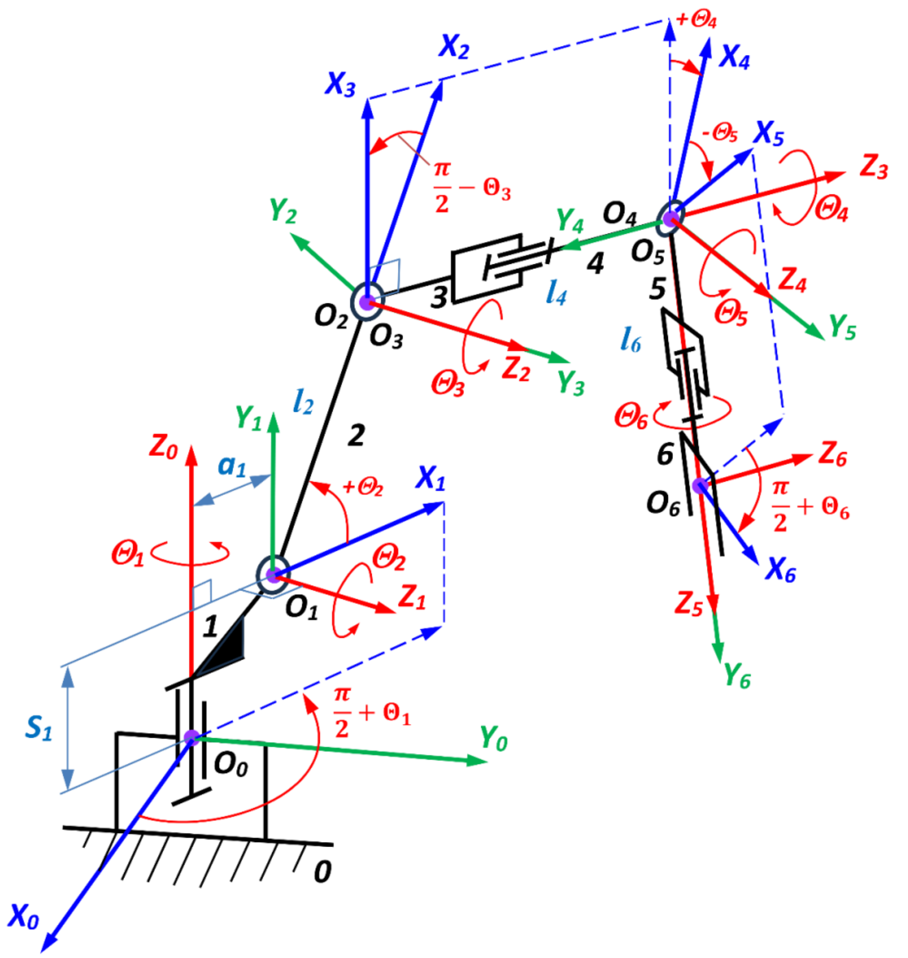


Рис. 2. Кінематична схема робота-маніпулятора моделі AR3, що застосовується для розв’язання прямої задачі кінематики

Отже, для заповнення Таблиці 1 виконуємо наступні дії.

Спочатку розглядаємо кінематичну пару 0-1, що пов’язана з ланками 0 і 1 – перехід від СК $X_0Y_0Z_0$ (система «0») до $X_1Y_1Z_1$ (система «1»):

1) поворот системи *0* навколо осі z_0 на кут Θ_1 доти, поки вісь x_0 не стане паралельній осі x_1 – це змінний параметр π/2+Θ_1 (тут і далі кути початкової фази обираються з метою визначення певного початкового положення маніпулятора, щоб перехід від базової системи координат (БСК) до системи координат робочого органу (РОСК) здійснювався лише за допомогою зсуву (x_{6c}, y_{6c}, z_{6c}), коли $i_6 \parallel i_0$, $j_6 \parallel j_0$, $k_6 \parallel k_0$);

2) зсув поверненої системи вздовж осі z_0 на величину s_1 до тих пір, поки осі x_0 і x_1 не будуть на одній прямій – це стала величина S_1;

3) зсув вздовж осі x_1 на величину a_1, до тих пір, поки початки координат не стануть збігатися – це стала величина a_1;

4) поворот навколо осі x_1 на кут α_1 до поєднання осі z_0 с віссю z_1 – це кут π/2.

Результати заносимо в перший рядок Таблиці 1.

Переходимо до кінематичної пари 1-2, що пов’язана з ланками 1 і 2 – перехід від СК $X_1Y_1Z_1$ (система «1») до $X_2Y_2Z_2$ (система «2»):

1) поворот системи *1* навколо осі z_1 на кут Θ_2 доти, доки вісь x_1 не стане паралельній осі x_2 – це змінний кут Θ_2;

2) зсув повернененої системи вздовж осі z_1 на величину s_2 до тих пір, поки осі x_1 і x_2 не будуть на одній прямій – ці осі співпали після попереднього кроку, отже ця величина дорівнює 0;

3) зсув вздовж осі x_2 на величину a_2 до тих пір, поки початки координат не почнуть збігатися – це стала величина l_2, яка дорівнює довжині ланки 2 (відстань O_1–O_2);

4) поворот навколо осі x_2 на кут α_2 до поєднання осі z_1 з віссю z_2 – ці осі співпали після попереднього кроку, отже ця величина дорівнює 0.

Результати заносимо до другого рядка Таблиці 1.

Переходимо до кінематичної пари 2-3, що пов'язана з ланками 2 і 3 – перехід від СК $X_2Y_2Z_2$ (система «2») до $X_3Y_3Z_3$ (система «3»):

1) поворот системи *2* навколо осі z_2 на кут Θ_3 доти, поки вісь x_2 не стане паралельній осі x_3 – це змінний параметр π/2–Θ_3;

2) зсув повернененої системи вздовж осі z_2 на величину s_3 до тих пір, поки осі x_2 і x_3 не будуть на одній прямій – ці осі співпали після попереднього кроку, отже ця величина дорівнює 0;

3) зсув вздовж осі x_3 на величину a_3 до тих пір, поки не зійдуться початки координат – початки координат співпали після попереднього кроку, отже ця величина дорівнює 0;

4) поворот навколо осі x_3 на кут α_3 до поєднання осі z_2 з віссю z_3 – це сталий кут $\pi/2$.

Результати заносимо в третій рядок Таблиці 1.

Переходимо до кінематичної пари 3-4, що пов'язана з ланками 3 і 4 – перехід від СК $X_3Y_3Z_3$ (система «3») до $X_4Y_4Z_4$ (система «4»):

1) поворот системи *3* навколо осі z_3 на кут Θ_4 доти, поки вісь x_3 не стане паралельній осі x_4 – це змінний кут Θ_4;

2) зсув повернененої системи вздовж осі z_3 на величину s_4 до тих пір, поки осі x_3 і x_4 не будуть на одній прямій – це стала величина l_4, яка дорівнює відстані O_3–O_4;

3) зсув вздовж осі x_4 на величину a_4 до тих пір, поки не зійдуться початки координат – початки координат співпали після попереднього кроку, отже ця величина дорівнює 0;

4) поворот навколо осі x_4 на кут α_4 до поєднання осі z_3 з віссю z_4 – це сталий кут -$\pi/2$.

Ці результати заносимо в четвертий рядок Таблиці 1.

Переходимо до кінематичної пари 4-5, що пов'язана з ланками 4 і 5 – перехід від СК $X_4Y_4Z_4$ (система «4») до $X_5Y_5Z_5$ (система «5»):

1) поворот системи *4* навколо осі z_4 на кут Θ_5 доти, поки вісь x_4 не стане паралельній осі x_5 – це змінний кут -Θ_5;

2) зсув повернененої системи вздовж осі z_4 на величину s_5 до тих пір, поки осі x_4 і x_5 не будуть на одній прямій – ці осі співпали після попереднього кроку, отже ця величина дорівнює 0;

3) зсув вздовж осі x_5 на величину a_5 до тих пір, поки не зійдуться початки координат – початки координат співпали після попереднього кроку, отже ця величина дорівнює 0;

4) поворот навколо осі x_5 на кут α_5 до поєднання осі z_4 з віссю z_5 – це сталий кут $\pi/2$.

Ці результати заносимо в п'ятий рядок Таблиці 1.

Таблиця 1

Параметри переходу від базової спеціальної системи координат до останньої, що пов’язана із робочим органом маніпулятора

Кінематична пара	Тип пари	№ ланки	Параметри			
			Θ	α	*S*	*a*
0,1	Обертальна	1	$\pi/2+\Theta_1$	$\pi/2$	S_1	a_1
1,2	Обертальна	2	Θ_2	0	0	l_2
2,3	Обертальна	3	$\pi/2-\Theta_3$	$\pi/2$	0	0
3,4	Обертальна	4	Θ_4	$-\pi/2$	l_4	0
4,5	Обертальна	5	$-\Theta_5$	$\pi/2$	0	0
5,6	Обертальна	6	$\pi/2+\Theta_6$	$\pi/2$	l_6	0

Переходимо до кінематичної пари 5-6, що пов’язана з ланками 5 і 6 – перехід від СК $X_5Y_5Z_5$ (система «5») до $X_6Y_6Z_6$ (система «6»):

1) поворот системи *5* навколо осі z_5 на кут Θ_6 доти, поки вісь x_5 не стане паралельній осі x_6 – це змінний кут $\pi/2+\Theta_6$;

2) зсув повернені системи вздовж осі z_5 на величину s_6 до тих пір, поки осі x_5 і x_6 не будуть на одній прямій – це стала величина l_6, яка дорівнює відстані O_5–O_6;

3) зсув вздовж осі x_6 на величину a_6 до тих пір, поки не збігаються початки координат – початки координат співпали після попереднього кроку, отже ця величина дорівнює 0;

4) поворот навколо осі x_6 на кут α_6 до поєднання осі z_5 з віссю z_6 – це сталий кут $\pi/2$.

Результати заносимо в шостий рядок Таблиці 1.

Матриці переходу і визначення орієнтації і координат захополювального пристрою у базовій системі координат. Відповідно до методу Денавіта-Хартенберга, на наступному етапі необхідно записати розширені матриці переходу для кожної кінематичної пари. При цьому кожному з чотирьох елементарних рухів відповідає одна з матриць переходу (*B*-матриць): або матриця обертання, або матриця зсуву. Результуюча матриця переходу, що зв'язує системи *i* – 1 та *i*, є добутком цих матриць:

$$A_i = B_{об}\left(\vec{k},\Theta_i\right)B_{зс}\left(\vec{k},s_i\right)B_{зс}\left(\vec{i},a_i\right)B_{об}\left(\vec{i},\alpha_i\right). \quad (1)$$

Після перемноження отримуємо:

$$A_i = B_{об}\left(\vec{k},\Theta_i\right)B_{зс}\left(\vec{k},s_i\right)B_{зс}\left(\vec{i},a_i\right)B_{об}\left(\vec{i},\alpha_i\right)=$$

$$=\begin{bmatrix}\cos\Theta_i & -\sin\Theta_i & 0 & 0\\ \sin\Theta_i & \cos\Theta_i & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1 & s_i\\ 0 & 0 & 0 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 0 & 0 & a_i\\ 0 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & \cos\alpha_i & -\sin\alpha_i & 0\\ 0 & \sin\alpha_i & \cos\alpha_i & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1\end{bmatrix}=$$

$$=\begin{bmatrix} \cos\Theta_i & -\sin\Theta_i\cos\alpha_i & \sin\Theta_i\sin\alpha_i & a_i\cos\Theta_i \\ \sin\Theta_i & \cos\Theta_i\cos\alpha_i & -\cos\Theta_i\sin\alpha_i & a_i\sin\Theta_i \\ 0 & \sin\alpha_i & \cos\alpha_i & s_i \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}. \quad (2)$$

Матриця (2) є шаблоном, в який необхідно підставляти параметри з Таблиці 1 для отримання матриць переходу, що описують певну кінематичну схему маніпулятора. Отже, для кожного рядка Таблиці 1 записуємо свою матрицю переходу, для чого використовуємо шаблонну матрицю (2):

$$A_1 = A_{об}\left(\vec{k},\Theta_1\right)A_{зс}\left(\vec{k},s_1\right)A_{зс}\left(\vec{i},a_1\right)A_{об}\left(\vec{i},\alpha_1\right)=$$

$$=\begin{bmatrix} \cos\Theta_1 & -\sin\Theta_1\cos\alpha_1 & \sin\Theta_1\sin\alpha_1 & a_1\cos\Theta_1 \\ \sin\Theta_1 & \cos\Theta_1\cos\alpha_1 & -\cos\Theta_1\sin\alpha_1 & a_1\sin\Theta_1 \\ 0 & \sin\alpha_1 & \cos\alpha_1 & s_1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}=$$

$$=\begin{bmatrix} \cos\left(\frac{\pi}{2}+\Theta_1\right) & -\sin\left(\frac{\pi}{2}+\Theta_1\right)\cos\frac{\pi}{2} & \sin\left(\frac{\pi}{2}+\Theta_1\right)\sin\frac{\pi}{2} & a_1\cos\left(\frac{\pi}{2}+\Theta_1\right) \\ \sin\left(\frac{\pi}{2}+\Theta_1\right) & \cos\left(\frac{\pi}{2}+\Theta_1\right)\cos\frac{\pi}{2} & -\cos\left(\frac{\pi}{2}+\Theta_1\right)\sin\frac{\pi}{2} & a_1\sin\left(\frac{\pi}{2}+\Theta_1\right) \\ 0 & \sin\frac{\pi}{2} & \cos\frac{\pi}{2} & s_1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}=$$

$$=\begin{bmatrix} -\sin\Theta_1 & 0 & \cos\Theta_1 & -a_1\sin\Theta_1 \\ \cos\Theta_1 & 0 & \sin\Theta_1 & a_1\cos\Theta_1 \\ 0 & 1 & 0 & s_1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}; \quad (3)$$

$$A_2 = A_{об}\left(\vec{k},\Theta_2\right)A_{зс}\left(\vec{k},s_2\right)A_{зс}\left(\vec{i},a_2\right)A_{об}\left(\vec{i},\alpha_2\right)=$$

$$=\begin{bmatrix} \cos\Theta_2 & -\sin\Theta_2\cos\alpha_2 & \sin\Theta_2\sin\alpha_2 & a_2\cos\Theta_2 \\ \sin\Theta_2 & \cos\Theta_2\cos\alpha_2 & -\cos\Theta_2\sin\alpha_2 & a_2\sin\Theta_2 \\ 0 & \sin\alpha_2 & \cos\alpha_2 & s_2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}=$$

$$=\begin{bmatrix} \cos\Theta_2 & -\sin\Theta_2 & 0 & l_2\cos\Theta_2 \\ \sin\Theta_2 & \cos\Theta_2 & 0 & l_2\sin\Theta_2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}; \tag{4}$$

$$A_3 = A_{об}\left(\vec{k},\Theta_3\right)A_{зс}\left(\vec{k},s_3\right)A_{зс}\left(\vec{i},a_3\right)A_{об}\left(\vec{i},\alpha_3\right)=$$

$$=\begin{bmatrix} \cos\Theta_3 & -\sin\Theta_3\cos\alpha_3 & \sin\Theta_3\sin\alpha_3 & a_3\cos\Theta_3 \\ \sin\Theta_3 & \cos\Theta_3\cos\alpha_3 & -\cos\Theta_3\sin\alpha_3 & a_3\sin\Theta_3 \\ 0 & \sin\alpha_3 & \cos\alpha_3 & s_3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}=$$

$$=\begin{bmatrix} \cos\left(\frac{\pi}{2}-\Theta_3\right) & -\sin\left(\frac{\pi}{2}-\Theta_3\right)\cos\frac{\pi}{2} & \sin\left(\frac{\pi}{2}-\Theta_3\right)\sin\frac{\pi}{2} & 0\cos\left(\frac{\pi}{2}-\Theta_3\right) \\ \sin\left(\frac{\pi}{2}-\Theta_3\right) & \cos\left(\frac{\pi}{2}-\Theta_3\right)\cos\frac{\pi}{2} & -\cos\left(\frac{\pi}{2}-\Theta_3\right)\sin\frac{\pi}{2} & 0\sin\left(\frac{\pi}{2}-\Theta_3\right) \\ 0 & \sin\frac{\pi}{2} & \cos\frac{\pi}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}=$$

$$=\begin{bmatrix} \sin\Theta_3 & 0 & \cos\Theta_3 & 0 \\ \cos\Theta_3 & 0 & -\sin\Theta_3 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}; \tag{5}$$

$$A_4 = A_{об}\left(\vec{k},\Theta_4\right)A_{зс}\left(\vec{k},s_4\right)A_{зс}\left(\vec{i},a_4\right)A_{об}\left(\vec{i},\alpha_4\right)=$$

$$=\begin{bmatrix} \cos\Theta_4 & -\sin\Theta_4\cos\alpha_4 & \sin\Theta_4\sin\alpha_4 & a_4\cos\Theta_4 \\ \sin\Theta_4 & \cos\Theta_4\cos\alpha_4 & -\cos\Theta_4\sin\alpha_4 & a_4\sin\Theta_4 \\ 0 & \sin\alpha_4 & \cos\alpha_4 & s_4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}=$$

$$=\begin{bmatrix} \cos\Theta_4 & 0 & -\sin\Theta_4 & 0 \\ \sin\Theta_4 & 0 & \cos\Theta_4 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & l_4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}; \tag{6}$$

$$A_5 = A_{об}\left(\vec{k},\Theta_5\right)A_{зс}\left(\vec{k},s_5\right)A_{зс}\left(\vec{i},a_5\right)A_{об}\left(\vec{i},\alpha_5\right)=$$

$$=\begin{bmatrix} \cos\Theta_5 & -\sin\Theta_5\cos\alpha_5 & \sin\Theta_5\sin\alpha_5 & a_5\cos\Theta_5 \\ \sin\Theta_5 & \cos\Theta_5\cos\alpha_5 & -\cos\Theta_5\sin\alpha_5 & a_5\sin\Theta_5 \\ 0 & \sin\alpha_5 & \cos\alpha_5 & s_5 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}=$$

$$=\begin{bmatrix} \cos\Theta_5 & 0 & -\sin\Theta_5 & 0 \\ -\sin\Theta_5 & 0 & -\cos\Theta_5 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}; \qquad (7)$$

$$A_6 = A_{об}\left(\vec{k},\Theta_6\right)A_{зс}\left(\vec{k},s_6\right)A_{зс}\left(\vec{i},a_6\right)A_{об}\left(\vec{i},\alpha_6\right)=$$

$$=\begin{bmatrix} \cos\Theta_6 & -\sin\Theta_6\cos\alpha_6 & \sin\Theta_6\sin\alpha_6 & a_6\cos\Theta_6 \\ \sin\Theta_6 & \cos\Theta_6\cos\alpha_6 & -\cos\Theta_6\sin\alpha_6 & a_6\sin\Theta_6 \\ 0 & \sin\alpha_6 & \cos\alpha_6 & s_6 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}=$$

$$=\begin{bmatrix} \cos\left(\frac{\pi}{2}+\Theta_6\right) & -\sin\left(\frac{\pi}{2}+\Theta_6\right)\cos\frac{\pi}{2} & \sin\left(\frac{\pi}{2}+\Theta_6\right)\sin\frac{\pi}{2} & 0\cos\left(\frac{\pi}{2}+\Theta_6\right) \\ \sin\left(\frac{\pi}{2}+\Theta_6\right) & \cos\left(\frac{\pi}{2}+\Theta_6\right)\cos\frac{\pi}{2} & -\cos\left(\frac{\pi}{2}+\Theta_6\right)\sin\frac{\pi}{2} & 0\sin\left(\frac{\pi}{2}+\Theta_6\right) \\ 0 & \sin\frac{\pi}{2} & \cos\frac{\pi}{2} & l_6 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}=$$

$$=\begin{bmatrix} -\sin\Theta_6 & 0 & \cos\Theta_6 & 0 \\ \cos\Theta_6 & 0 & \sin\Theta_6 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & l_6 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}; \qquad (8)$$

Обчислення матриць переходу A_i дозволяє визначити положення і орієнтацію останньої ланки маніпулятора (захоплювача) у системі відліку, зв'язаної зі стояком. При цьому геометричні розміри ланок вважаються заданими.

Це завдання вирішується за допомогою формули:

$$R_0 = T_n R_n, \qquad (9)$$

де T_n – матриця, що дорівнює добутку матриць A_i:

$$T_n = A_1 A_2 \ldots A_n. \qquad (10)$$

У формулі (9) R_n і R_0 – матриці-стовпці розміром 4×1, перші три елементи яких – це координати довільної точки захоплювача відповідно в системах *n* і 0.

Оскільки робот-маніпулятор моделі AR3 характеризується шістьма ступенями свободи (*n* = 6), обчислюємо елементи матриці T_6:

$$T_6 = A_1 A_2 A_3 A_4 A_5 A_6 =$$

$$= \begin{bmatrix} -\sin\Theta_1 & 0 & \cos\Theta_1 & -a_1\sin\Theta_1 \\ \cos\Theta_1 & 0 & \sin\Theta_1 & a_1\cos\Theta_1 \\ 0 & 1 & 0 & s_1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos\Theta_2 & -\sin\Theta_2 & 0 & l_2\cos\Theta_2 \\ \sin\Theta_2 & \cos\Theta_2 & 0 & l_2\sin\Theta_2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \times$$

$$\times \begin{bmatrix} \sin\Theta_3 & 0 & \cos\Theta_3 & 0 \\ \cos\Theta_3 & 0 & -\sin\Theta_3 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos\Theta_4 & 0 & -\sin\Theta_4 & 0 \\ \sin\Theta_4 & 0 & \cos\Theta_4 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & l_4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \times$$

$$\times \begin{bmatrix} \cos\Theta_5 & 0 & -\sin\Theta_5 & 0 \\ -\sin\Theta_5 & 0 & -\cos\Theta_5 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -\sin\Theta_6 & 0 & \cos\Theta_6 & 0 \\ \cos\Theta_6 & 0 & \sin\Theta_6 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & l_6 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} t_{11} & t_{12} & t_{13} & t_{14} \\ t_{21} & t_{22} & t_{23} & t_{24} \\ t_{31} & t_{32} & t_{33} & t_{34} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}. \qquad (11)$$

Відомо, що стовпці матриці T_n мають геометричне тлумачення. Перші три елементи першого, другого і третього стовпців є напрямними косинусами відповідно до осей x_n, y_n, z_n у системі 0, а три елементи четвертого стовпця – це координати x_c, y_c, z_c центру захоплювача в тій же системі:

$$T_n = \begin{bmatrix} \cos\left(\vec{i}_n, \vec{i}_0\right) & \cos\left(\vec{j}_n, \vec{i}_0\right) & \cos\left(\vec{k}_n, \vec{i}_0\right) & x_c \\ \cos\left(\vec{i}_n, \vec{j}_0\right) & \cos\left(\vec{j}_n, \vec{j}_0\right) & \cos\left(\vec{k}_n, \vec{j}_0\right) & y_c \\ \cos\left(\vec{i}_n, \vec{k}_0\right) & \cos\left(\vec{j}_n, \vec{k}_0\right) & \cos\left(\vec{k}_n, \vec{k}_0\right) & z_c \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}. \qquad (12)$$

Отже, отримана матриця T_6 визначає напрямні косинуси:

$$t_{11} = \cos\left(\vec{i}_n, \vec{i}_0\right) = \cos\Theta_1\left[\cos\Theta_4\cos\Theta_6 + \sin\Theta_4\cos\Theta_5\sin\Theta_6\right] -$$
$$-\sin\Theta_1\sin\left(\Theta_2 - \Theta_3\right)\left[\sin\Theta_4\cos\Theta_6 + \cos\Theta_4\cos\Theta_5\sin\Theta_6\right] + \qquad (13)$$
$$+\sin\Theta_1\cos\left(\Theta_2 - \Theta_3\right)\sin\Theta_5\sin\Theta_6;$$

$$t_{21} = \cos\left(\vec{i}_n, \vec{j}_0\right) = \sin\Theta_1\left[\cos\Theta_4\cos\Theta_6 - \sin\Theta_4\cos\Theta_5\sin\Theta_6\right] +$$
$$+\cos\Theta_1\sin\left(\Theta_2 - \Theta_3\right)\left[\sin\Theta_4\cos\Theta_6 + \cos\Theta_4\cos\Theta_5\sin\Theta_6\right] - \qquad (14)$$

$$-\cos\Theta_1\cos\left(\Theta_2-\Theta_3\right)\sin\Theta_5\sin\Theta_6;$$

$$t_{31}=\cos\left(\vec{i}_n,\vec{k}_0\right)=-\cos\left(\Theta_2-\Theta_3\right)\left[\sin\Theta_4\cos\Theta_6+\cos\Theta_4\cos\Theta_5\sin\Theta_6\right]-$$
$$-\sin\left(\Theta_2-\Theta_3\right)\sin\Theta_5\sin\Theta_6; \quad (15)$$

$$t_{12}=\cos\left(\vec{j}_n,\vec{i}_0\right)=-\sin\Theta_1\cos\left(\Theta_2-\Theta_3\right)\cos\Theta_5-\cos\Theta_1\sin\Theta_4\sin\Theta_5-$$
$$-\sin\Theta_1\sin\left(\Theta_2-\Theta_3\right)\cos\Theta_4\sin\Theta_5; \quad (16)$$

$$t_{22}=\cos\left(\vec{j}_n,\vec{j}_0\right)=\cos\Theta_1\sin\left(\Theta_2-\Theta_3\right)\cos\Theta_4\sin\Theta_5+$$
$$+\cos\Theta_1\cos\left(\Theta_2-\Theta_3\right)\cos\Theta_5-\sin\Theta_1\sin\Theta_4\sin\Theta_5; \quad (17)$$

$$t_{32}=\cos\left(\vec{j}_n,\vec{k}_0\right)=\sin\left(\Theta_2-\Theta_3\right)\cos\Theta_5-\cos\left(\Theta_2-\Theta_3\right)\cos\Theta_4\sin\Theta_5; \quad (18)$$

$$t_{13}=\cos\left(\vec{k}_n,\vec{i}_0\right)=\cos\Theta_1\left[\cos\Theta_4\sin\Theta_6+\sin\Theta_4\cos\Theta_5\cos\Theta_6\right]-$$
$$-\sin\Theta_1\sin\left(\Theta_2-\Theta_3\right)\left[\sin\Theta_4\sin\Theta_6-\cos\Theta_4\cos\Theta_5\sin\Theta_6\right]-$$
$$-\sin\Theta_1\cos\left(\Theta_2-\Theta_3\right)\sin\Theta_5\cos\Theta_6; \quad (19)$$

$$t_{23}=\cos\left(\vec{k}_n,\vec{j}_0\right)=\sin\Theta_1\left[\cos\Theta_4\sin\Theta_6+\sin\Theta_4\cos\Theta_5\cos\Theta_6\right]+$$
$$+\cos\Theta_1\sin\left(\Theta_2-\Theta_3\right)\left[\sin\Theta_4\sin\Theta_6-\cos\Theta_4\cos\Theta_5\cos\Theta_6\right]+$$
$$+\cos\Theta_1\cos\left(\Theta_2-\Theta_3\right)\sin\Theta_5\cos\Theta_6; \quad (20)$$

$$t_{33}=\cos\left(\vec{k}_n,\vec{k}_0\right)=\sin\left(\Theta_2-\Theta_3\right)\sin\Theta_5\cos\Theta_6-\cos\left(\Theta_2-\Theta_3\right)\times$$
$$\times\left[\sin\Theta_4\sin\Theta_6-\cos\Theta_4\cos\Theta_5\cos\Theta_6\right]; \quad (21)$$

а також координати центра захоплювального пристрою:

$$t_{14}=x_c=-\sin\Theta_1(a_1+l_2\cos\Theta_2)-(l_4+l_6\cos\Theta_5)\sin\Theta_1\cos\left(\Theta_2-\Theta_3\right)-$$
$$-l_6\sin\Theta_5\left[\cos\Theta_1\sin\Theta_4+\sin\Theta_1\sin\left(\Theta_2-\Theta_3\right)\cos\Theta_4\right]; \quad (22)$$

$$t_{24}=y_c=\cos\Theta_1(a_1+l_2\cos\Theta_2)+(l_4+l_6\cos\Theta_5)\cos\Theta_1\cos\left(\Theta_2-\Theta_3\right)-$$
$$-l_6\sin\Theta_5\left[\sin\Theta_1\sin\Theta_4-\cos\Theta_1\sin\left(\Theta_2-\Theta_3\right)\cos\Theta_4\right]; \quad (23)$$

$$t_{34}=z_c=s_1+l_2\sin\Theta_2+\left(l_4+l_6\cos\Theta_5\right)\sin\left(\Theta_2-\Theta_3\right)-$$
$$-l_6\cos\left(\Theta_2-\Theta_3\right)\cos\Theta_4\sin\Theta_5. \quad (24)$$

Результати розрахунку для обраної часової послідовності кутів повороту. Формули (13)–(24) були використані для тестування положення маніпулятора моделі AR3, з наступними параметрами довжин ланок: s_1 =0,164м; a_1 = 0,079 м; l_2 = 0,305 м; l_4 = 0,222 м; l_6 = 0,0777 м, а часова послідовність кутів повороту $\theta_1-\theta_6$ задана, як показано на Рис. 3.

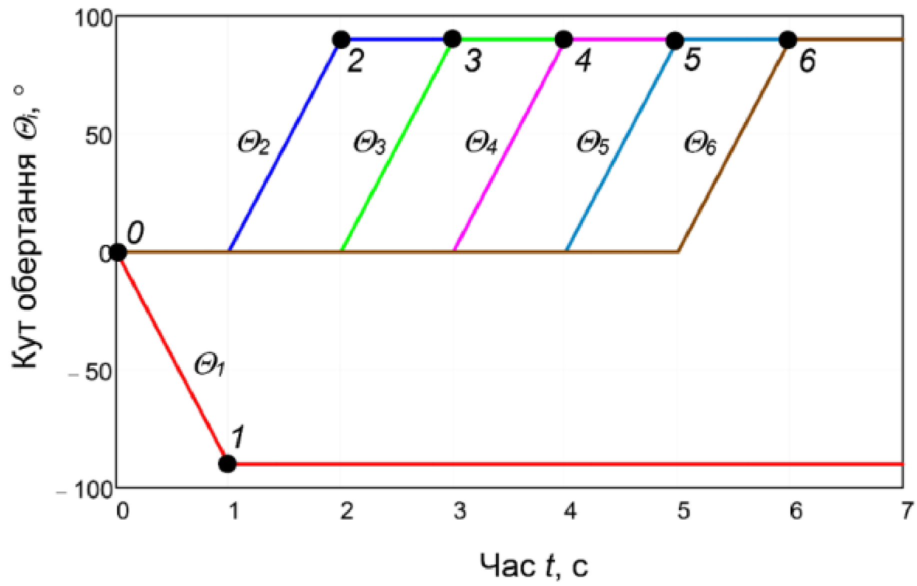


Рис. 3. Часова послідовність кутів повороту $\theta_1 - \theta_6$

У якості опорних точок обрані положення захоплювача маніпулятора, які на Рис. 4 позначені позиціями 0–6. Цей графік демонструє зміну кутів обертання суглобів (осьових приводів) робота-маніпулятора Annin Robotics AR3 у часі.

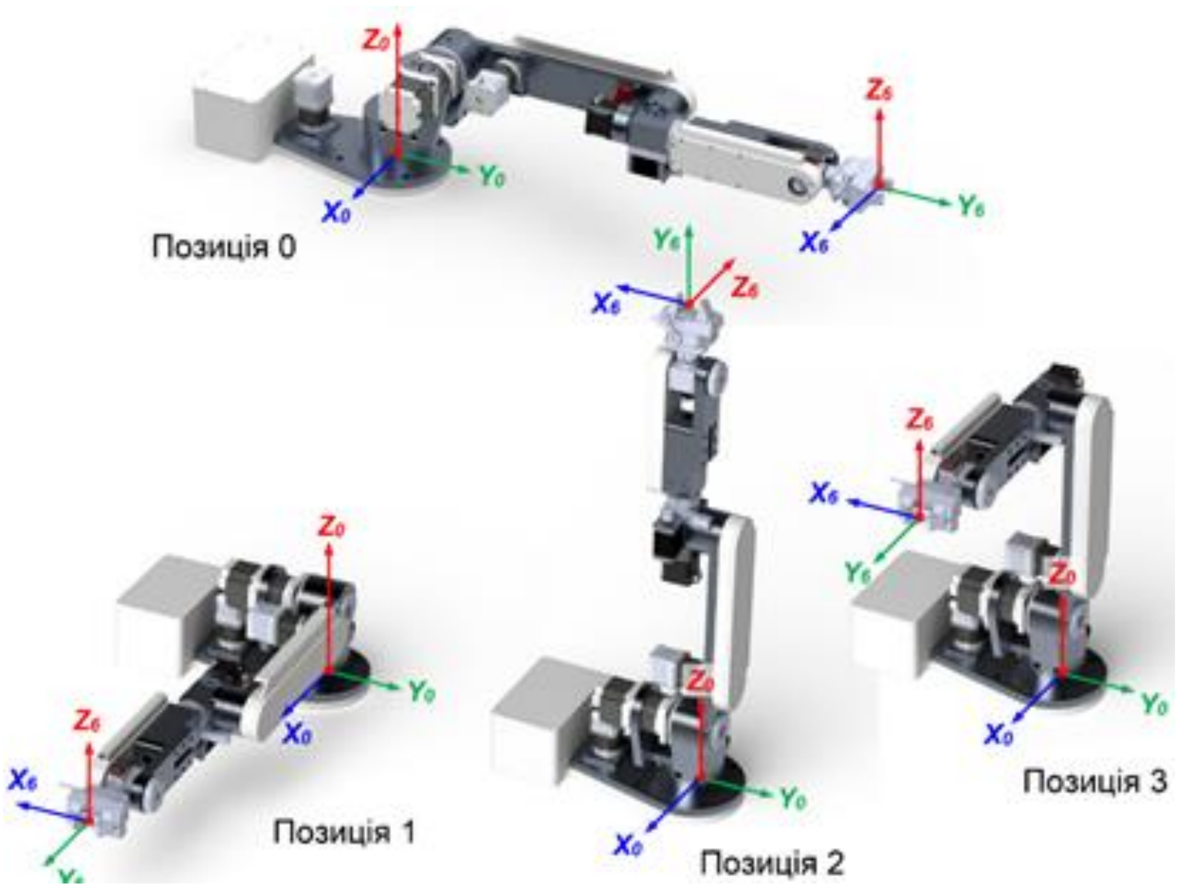
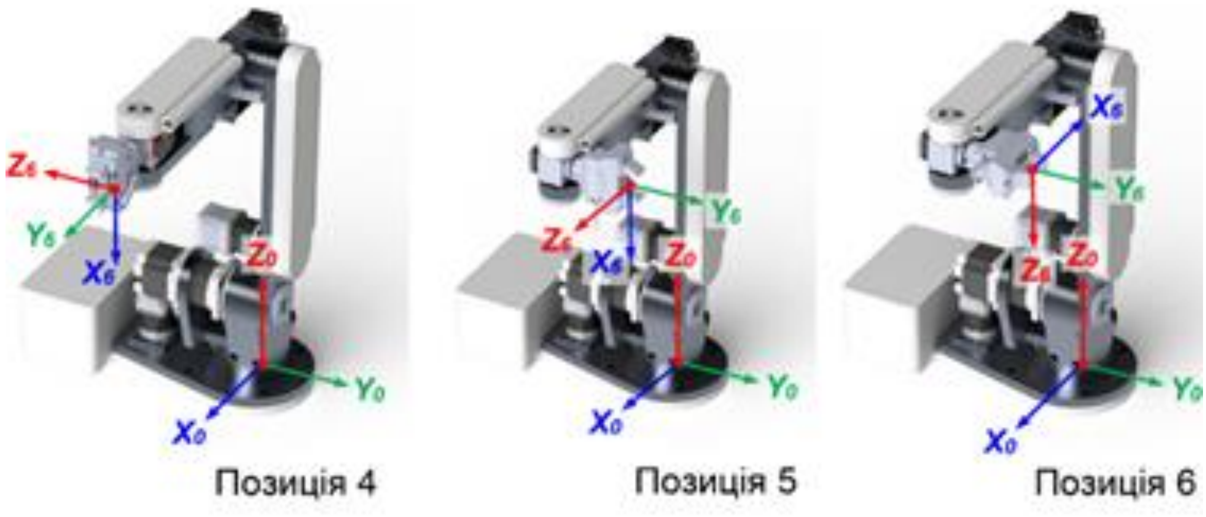


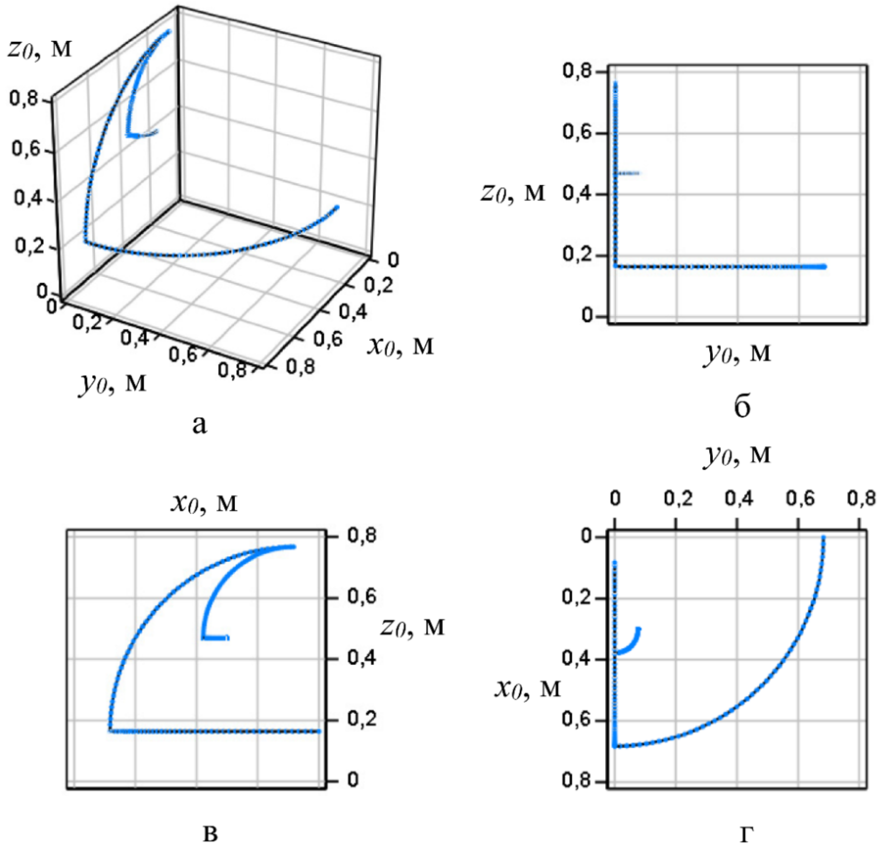
Рис. 4. Послідовність досліджуваних положень робота AR3



Продовжекння рис. 4

На вертикальній осі позначено кут обертання (Θ_i) у градусах, а на горизонтальній — час (t) у секундах. Видно, що кожен привід активується послідовно з інтервалом приблизно в одну секунду, що свідчить про поетапне керування кожним ступенем свободи окремо. Перший суглоб (Θ_1) повертається на -90° протягом першої секунди, після чого утримує це положення. Наступні суглоби, з Θ_2 до Θ_6, обертаються по черзі на +90°, кожен у власному часовому інтервалі. Після завершення обертання кожен привід залишається у досягнутому положенні, що видно з горизонтальних відрізків графіка. Така траєкторія характерна для тестування або калібрування, коли аналізується рух кожного суглоба окремо. Це дозволяє чітко прослідкувати вплив кожного з них на положення та орієнтацію захоплювального пристрою маніпулятора та використовується як перевірочна програма для оцінки кінематичних властивостей AR3.

Результати розрахунку координат центра захоплювача (x_c, y_c, z_c) у базовій системі координат (x_0, y_0, z_0) для послідовності положень 1–6 наведені на рисунку 5; результати розрахунку орієнтації вектора $\vec{\imath}_n$ у базовій системі координат $(\vec{\imath}_0, \vec{\jmath}_0, \vec{k}_0)$ наведені на рисунку 6; результати розрахунку орієнтації векторів $\vec{\jmath}_n$ і $\vec{k}_n$ у базовій системі координат $(\vec{\imath}_0, \vec{\jmath}_0, \vec{k}_0)$ наведені на рисунку 7 і 8 відповідно.



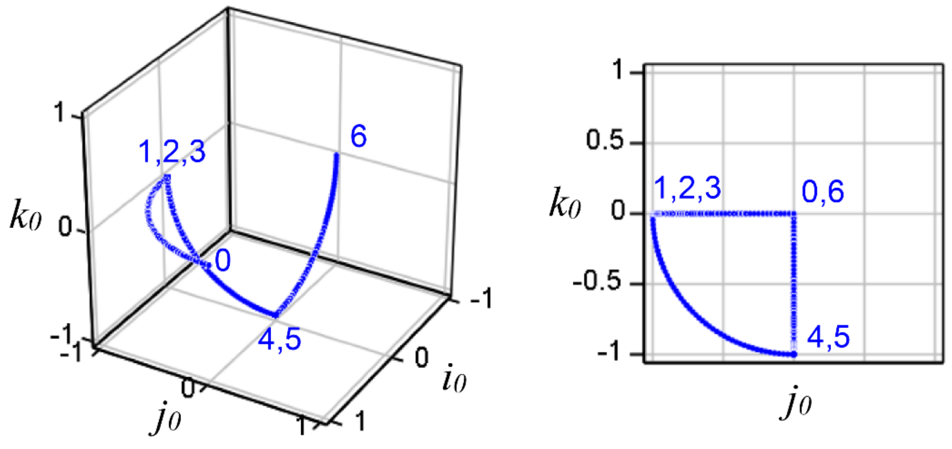
$$
\begin{array}{c} \\ \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \end{array}
\begin{array}{c} 0 \\ \begin{pmatrix} \boxed{\begin{matrix} 0 \\ 0{,}683 \\ 0{,}164 \end{matrix}} \\ 1 \end{pmatrix} \end{array}
\to
\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0{,}683 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0{,}164 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}_{1}
\to
\begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 & 0{,}079 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0{,}768 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}_{2}
\to
$$

$$
\to
\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0{,}378 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0{,}469 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}_{3}
\to
\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0{,}378 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0{,}469 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}_{4}
\to
\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0{,}301 \\ 0 & 1 & 0 & 0{,}077 \\ -1 & 0 & 0 & 0{,}469 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}_{5}
\to
$$

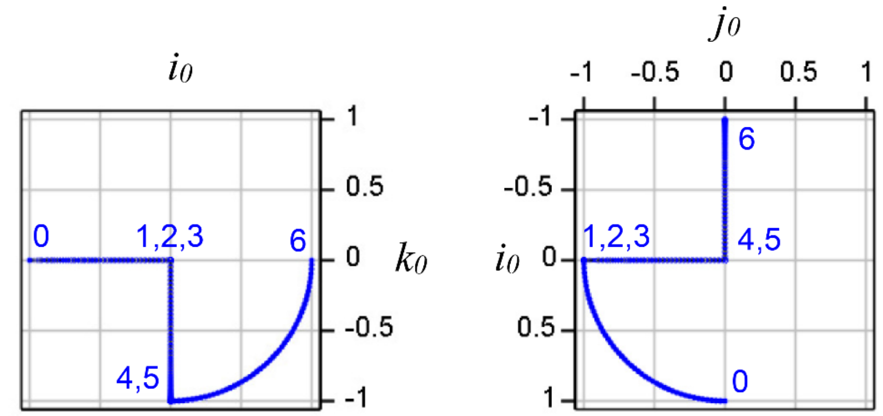
$$
\to
\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0{,}301 \\ 0 & 1 & 0 & 0{,}077 \\ 0 & 0 & -1 & 0{,}469 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}_{6}
$$

д

Рис. 5. Результати розрахунку координат центра захоплювача (x_c, y_c, z_c) у базовій системі координат (x_0, y_0, z_0) для послідовності положень 1–6 (див. рис. 3): а – аксонометрична проекція; б – проекція на площину $y_0 - z_0$; в – проекція на площину $x_0 - z_0$; г – проекція на площину $x_0 - y_0$; д – послідовність змінення елементів матриці переходу T_6 під час руху між положеннями 0–6



а б



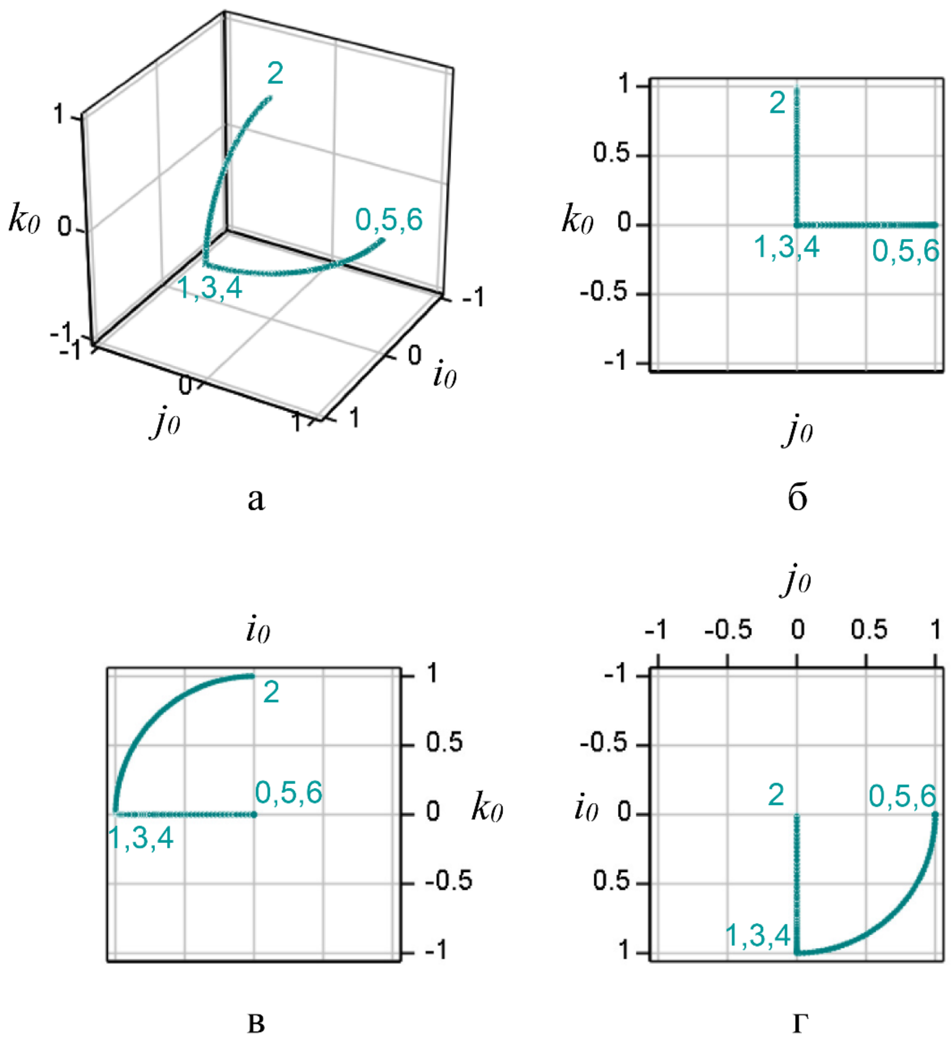
в г

$$\overset{0}{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}} \to \overset{1}{\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 4 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}} \to \overset{2}{\begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 & 1 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}} \to \overset{3}{\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 3 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}} \to$$

$$\to \overset{4}{\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}} \to \overset{5}{\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}} \to \overset{6}{\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}}$$

д

Рис. 6. Результати розрахунку орієнтації вектора $\vec{i}_n$ у базовій системі координат $(\vec{i}_0, \vec{j}_0, \vec{k}_0)$ для послідовності положень 1–6 (див. рис. 3): а – аксонометрична проекція; б – проекція на площину $y_0 - z_0$; в – проекція на площину $x_0 - z_0$; г – проекція на площину $x_0 - y_0$; д – послідовність змінення елементів матриці переходу T_6 під час руху між положеннями 0–6

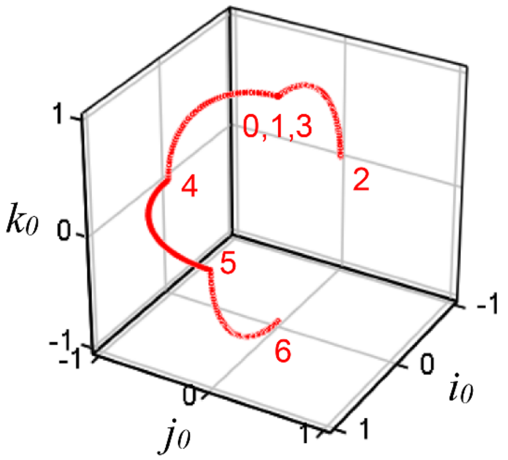


$$
\overset{0}{\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&4\\0&0&1&1\\0&0&0&1\end{pmatrix}}\rightarrow
\overset{1}{\begin{pmatrix}0&1&0&4\\-1&0&0&0\\0&0&1&1\\0&0&0&1\end{pmatrix}}\rightarrow
\overset{2}{\begin{pmatrix}0&0&-1&1\\-1&0&0&0\\0&1&0&4\\0&0&0&1\end{pmatrix}}\rightarrow
\overset{3}{\begin{pmatrix}0&1&0&3\\-1&0&0&0\\0&0&1&2\\0&0&0&1\end{pmatrix}}\rightarrow
$$

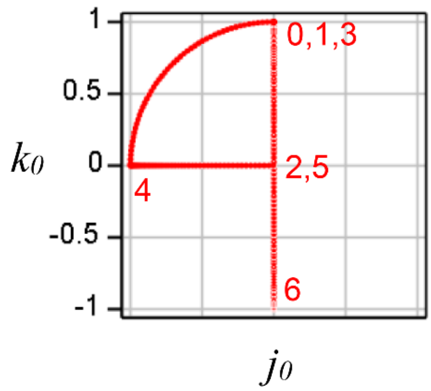
$$
\rightarrow\overset{4}{\begin{pmatrix}0&1&0&3\\0&0&-1&0\\-1&0&0&2\\0&0&0&1\end{pmatrix}}\rightarrow
\overset{5}{\begin{pmatrix}0&0&1&2\\0&1&0&1\\-1&0&0&2\\0&0&0&1\end{pmatrix}}\rightarrow
\overset{6}{\begin{pmatrix}-1&0&0&2\\0&1&0&1\\0&0&-1&2\\0&0&0&1\end{pmatrix}}
$$

д

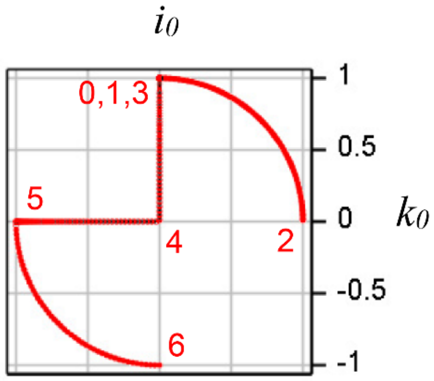
Рис. 7. Результати розрахунку орієнтації вектора $\vec{j}_n$ у базовій системі координат $(\vec{i}_0, \vec{j}_0, \vec{k}_0)$ для послідовності положень 1–6 (див. рис. 3): а – аксонометрична проекція; б – проекція на площину $y_0 - z_0$; в – проекція на площину $x_0 - z_0$; г – проекція на площину $x_0 - y_0$; д – послідовність змінення елементів матриці переходу T_6 під час руху між положеннями 0–6



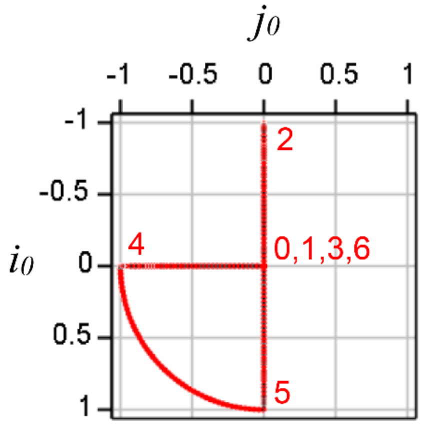
а



б



в



г

$$\begin{array}{c} 0 \\ \begin{pmatrix} 1&0&0&0\\ 0&1&0&4\\ 0&0&1&1\\ 0&0&0&1 \end{pmatrix} \end{array} \rightarrow \begin{array}{c} 1 \\ \begin{pmatrix} 0&1&0&4\\ -1&0&0&0\\ 0&0&1&1\\ 0&0&0&1 \end{pmatrix} \end{array} \rightarrow \begin{array}{c} 2 \\ \begin{pmatrix} 0&0&-1&1\\ -1&0&0&0\\ 0&1&0&4\\ 0&0&0&1 \end{pmatrix} \end{array} \rightarrow \begin{array}{c} 3 \\ \begin{pmatrix} 0&1&0&3\\ -1&0&0&0\\ 0&0&1&2\\ 0&0&0&1 \end{pmatrix} \end{array} \rightarrow$$

$$\rightarrow \begin{array}{c} 4 \\ \begin{pmatrix} 0&1&0&3\\ 0&0&-1&0\\ -1&0&0&2\\ 0&0&0&1 \end{pmatrix} \end{array} \rightarrow \begin{array}{c} 5 \\ \begin{pmatrix} 0&0&1&2\\ 0&1&0&1\\ -1&0&0&2\\ 0&0&0&1 \end{pmatrix} \end{array} \rightarrow \begin{array}{c} 6 \\ \begin{pmatrix} -1&0&0&2\\ 0&1&0&1\\ 0&0&-1&2\\ 0&0&0&1 \end{pmatrix} \end{array}$$

д

Рис. 8. Результати розрахунку орієнтації вектора $\vec{k}_n$ у базовій системі координат $(\vec{i}_0, \vec{j}_0, \vec{k}_0)$ для послідовності положень 1–6 (див. рис. 3): а – аксонометрична проекція; б – проекція на площину $y_0 - z_0$; в – проекція на площину $x_0 - z_0$; г – проекція на площину $x_0 - y_0$; д – послідовність змінення елементів матриці переходу T_6 під час руху між положеннями 0–6

Висновки

У межах даної роботи було проведено комплексне дослідження прямої кінематики шестивісного роботизованого маніпулятора Annin Robotics AR3. На основі аналітичного підходу з використанням параметрів Денавіта–Хартенберга побудовано повну кінематичну модель маніпулятора, що дозволяє визначати положення та орієнтацію виконавчого органу у базовій системі координат за відомими значеннями кутів обертання суглобів. Отримані матриці однорідних перетворень, а також аналітичні вирази для кінцевих координат і напрямних косинусів підтверджують ефективність і надійність обраної методики. Виконана верифікація результатів у симуляційному середовищі підтвердила правильність математичних розрахунків та відповідність моделі фізичним характеристикам робота AR3. Аналіз отриманих графіків показав плавність і безперервність зміни положення та орієнтації захоплювача відповідно до змін вхідних параметрів. Це свідчить про доцільність застосування даної моделі в задачах планування траєкторій, візуалізації рухів, а також як базової структури для реалізації зворотної кінематики. Крім того, було проведено огляд сучасних досліджень у сфері кінематики роботів за останні роки, що дало змогу порівняти класичні підходи з новітніми гібридними методами, які залучають штучний інтелект, сенсорну адаптацію та цифрові двійники. Таким чином, сформована модель може бути інтегрована у складніші системи керування або використана як навчальний інструмент у курсах з робототехніки. Подальші дослідження передбачають розробку алгоритмів зворотної кінематики, впровадження адаптивної компенсації похибок та створення інтерактивних програмних модулів для практичного застосування розробленої моделі у реальному та віртуальному середовищах.

Список літератури

1. Siciliano, B. Springer Handbook of Robotics / B. Siciliano, O. Khatib. – Berlin: Springer, 2016. – 2228 p.

2. Craig, J. J. Introduction to Robotics: Mechanics and Control / J. J. Craig. – New York: Pearson, 2005. – 408 p.

3. Kucuk, S. Robot kinematics: Forward and inverse kinematics. Industrial Robot / S. Kucuk, Z. Bingul // Industrial Robotics: Theory, Modelling and Control. – 2014. – Vol. 41, Iss. 4. – p. 447–454.

4. Denavit, J. A kinematic notation for lower-pair mechanisms / J. Denavit, R. S. Hartenberg // Journal of Applied Mechanics. – 1955. – Vol. 22, Iss. 2. – p. 215–221.

5. Panigrahi, N. Kinematic Model Design of a 6 DOF Industrial Robot / N. Panigrahi, K. K. – Applications of Robotics in Industry Using Advanced Mechanisms. Learning and Analytics in Intelligent Systems : Springer, Cham. – 2020. – 568 p.

6. Robot control and kinematic analysis with 6DoF manipulator using direct kinematic method / K. S. Gaeid, A. F. Nashee, I. A. Ahmed, M. H. Dekheel // Bulletin of Electrical Engineering and Informatics. – Vol.10, Iss.1. – 2021. – p. 70-78

7. Analytical inverse kinematic solution using the D-H method for a 6-DOF robot / J.-D. Sun, G.-Z. Cao, W.-B. Li, Y.-X. Liang, S.-D. Huang // 14th International Conference on Ubiquitous Robots and Ambient Intelligence (URAI), Jeju, Korea (South). – 2017. – p. 714-716.

8. Kaur, M. Kinematics Analysis and Jacobian calculation for six Degrees of Freedom Robotic Arm / M. Kaur, S. Sondhi, V. K. Yanumula // IEEE 17th India Council

International Conference (INDICON), New Delhi, India. – 2020. – p. 1-6

9. Younis, M. A Methodology for the Design of 6D Robotic Arm / M. Younis, E. Nasser, A. Nasser // Proceedings of International Exchange and Innovation Conference on Engineering & Sciences (IEICES). – 2021. – Vol. 7. – p. 329-335.

10. Ayiz, C. The kinematics of industrial robot manipulators based on the exponential rotational matrices / C. Ayiz, S. Kucuk // IEEE International Symposium on Industrial Electronics, Seoul, Korea (South). – 2009. – pp. 977-982

11. Farah, E. D-H Parameters and Forward Kinematics Solution for 6D of Surgical Robot / Edris Farah, S. Liu // Applied Mechanics and Materials. – 2013. – Vol. 415. – p. 18-22.

12. Baločková, L. The Method for Solving Kinematics of an Industrial Robot / L. Baločková // Applied Mechanics and Materials. – 2013. – Vol. 282. – P. 274-281.

13. Saadah, A. Computing The Kinematics Study of a 6 DOF Industrial Manipulator Prototype By Matlab / A. Saadah // Recent Innovations in Mechatronics. – 2021. – Vol. 7, Iss. 1. – p. 1-5.

14. The study of NAO robot arm based on direct kinematics by using D-H method / S. Wen, Z. Ma, S. Wen, Y. Zhao, J. Yao // UKACC International Conference on Control (CONTROL). – 2014. – Loughborough, UK. – p. 515-518.

15. Identification of Denavit-Hartenberg Parameters of an Industrial Robot / A. A. Hayat, Rajeevlochana G. Chittawadigi, A. D. Udai, S. Saha // Advanced Robotics, Proceedings of Conference on Advances In Robotics. – 2013. – p. 1–6.

16. Ciuccio, R. Comparison of Modified D-H Notation with Standard D-H for and all of Direct Kinematics of Industrial Robotic manipulators / R. Ciuccio // Engineering and Technology Journal. – 2022. – Vol. 07, Iss. 07. – 2022. – p. 1419-1421.

17. Modeling techniques for kinematic analysis of a six-axis robotic arm / R. Guida, M. D. De Simone, P. Dašić, D. Guida // IOP Conference Series: Materials Science and Engineering. – 2019. – Vol. 568. – Article No. 012115.

18. Corke, P. I. A Simple and Systematic Approach to Assigning Denavit–Hartenberg Parameters / P. I. Corke // IEEE Transactions on Robotics. – 2007. – Vol. 23, Iss. 3. – pp. 590-594.

19. Asif, S. Kinematics Analysis of 6-DoF Articulated Robot with Spherical Wrist / S. Asif, P. Webb // Mathematical Problems in Engineering. – 2021. – Vol. 2021, Iss. 1. – Article No. 6647035. – p. 1-11.

20. Singh, R. A Review on Forward and Inverse Kinematics of Classical Serial Manipulators / R. Singh, V. Kukshal, V. S. Yadav // Advances in Engineering Design . Lecture Notes in Mechanical Engineering. – 2021. – Springer, Singapore. – p. 322-331.

21. Mavroidis, C. A New Polynomial Solution to the Geometric Design Problem of Spatial R-R Robot Manipulators Using the Denavit and Hartenberg Parameters / C. Mavroidis, Eric Lee, Munshi Alam // Journal of Mechanical Design. – 2001. – Vol. 123, Iss. 1. – p. 58-67.

22. Performance Evaluation of 3 DOF Arm Robot With Forward Kinematics Denavit-Hartenberg Method For Coffee Maker Machine / H. P. Nurba, D. Hadian, N. Lestari, K. A. Munastha, H. Mistialustina, E. Rachmawati // 16th International Conference on Telecommunication Systems, Services, and Applications (TSSA). – 2022. – Lombok, Indonesia. – p. 1-6.

23. Villalobos, J. Statistical comparison of Denavit-Hartenberg based inverse kinematic solutions of the UR5 robotic manipulator / J. Villalobos, I. Y. Sanchez, F. Martell, //International Conference on Electrical, Computer, Communications and

Mechatronics Engineering (ICECCME). – Mauritius, Mauritius. – 2021. – p. 1-6.

Надійшла до редакції 17.03.2025, розглянута на редколегії 17.03.2025.

Kinematic Calculation of Position and Orientation of Gripper of the Annin Robotics AR3 Robot

This paper presents a comprehensive analysis and practical solution to the direct kinematics problem of the six-axis manipulator Annin Robotics AR3 – an open-source robotic platform widely used in educational, laboratory, and industrial environments. Considering the structural features of the AR3, a classical approach based on Denavit-Hartenberg parameters was chosen for kinematic modeling. The process of constructing specific coordinate systems for each manipulator link is described in detail, taking into account their placement and rotational axes. Based on the kinematic diagram, a table of link transition parameters is compiled and used to form the corresponding homogeneous transformation matrices. The study sequentially constructs six homogeneous transformation matrices that describe the position and orientation of the end effector in the base coordinate frame. A complete mathematical procedure for matrix multiplication and extraction of geometric characteristics – direction cosines and spatial coordinates of the gripper—is presented. To verify the calculations, plots of the end effector's position and orientation over time were generated for a given sequence of joint angles. As a result of the computations, the spatial dynamics of the gripper's movement were obtained with an accuracy that corresponds to the AR3 robot's technical specifications. The article also reviews recent scientific publications addressing similar problems. In particular, it examines hybrid approaches combining analytical models with machine learning, real-time sensor adaptation of kinematic models, and the use of digital twins to simulate manipulator operation in virtual environments. The results confirm the feasibility of using classical analytical methods for both educational and applied purposes and serve as a foundation for future developments in inverse kinematics algorithms, adaptive control, and embedded motion planning.
Keywords: direct kinematics, Denavit-Hartenberg parameters, robotic manipulator, Annin Robotics AR3, educational robotics.

Відомості про авторів

Баранов Олег Олегович – доктор технічних наук, професор, завідувач кафедри теоретичної механіки, машинознавства та роботомеханічних систем, Національний аерокосмічний університет ім. М. Є. Жуковського «Харківський авіаційний інститут» м. Харків, Україна, O.Baranov@khai.edu. ORCID: 0000-0001-5356-1125

Баранова Єлизавета Олегівна – студент і науковий співробітник кафедри теоретичної механіки, машинознавства та роботомеханічних систем, Національний аерокосмічний університет «ХАІ» м. Харків, Україна, Y.O.Baranova@khai.edu. ORCID: 0009-0002-6365-4979

Бреус Андрій Олександрович – кандидат технічних наук, доцент, доцент кафедри теоретичної механіки, машинознавства та роботомеханічних систем, Національний аерокосмічний університет «ХАІ» м. Харків, Україна, A.Breus@khai.edu, ORCID: 0000-0002-7310-1465

Кладова Ольга Юріївна – кандидат технічних наук, доцент, доцент кафедри теоретичної механіки, машинознавства та роботомеханічних систем, Національний аерокосмічний університет «ХАІ» м. Харків, Україна, O.Kladova@khai.edu. ORCID: 0009-0008-1629-1080

About the Authors

Baranov Oleg, PhD in Aircraft Technology and Materials Science, DSc in Materials Science and Processing Technologies, Professor, Head of Department of Theoretical Mechanics, Engineering and Robomechanical Systems, National Aerospace University “KhAI”, Kharkiv, Ukraine, O.Baranov@khai.edu. ORCID: 0000-0001-5356-1125

Baranova Yelyzaveta, MSc student and researcher of Department of Theoretical Mechanics, Engineering and Robomechanical Systems, National Aerospace University “KhAI”, Kharkov, Ukraine, Y.O.Baranova@khai.edu, ORCID: 0009-0002-6365-4979

Breus Andrii, PhD in Materials Science and Processing Technologies, Associate Professor of Department of Theoretical Mechanics, Engineering and Robomechanical Systems, National Aerospace University “KhAI”, Kharkov, Ukraine, A.Breus@khai.edu, ORCID: 0000-0002-7310-1465

Kladova Olha, PhD in Processes and Machines of Plastic Working, Associate Professor of Department of Theoretical Mechanics, Engineering and Robomechanical Systems, National Aerospace University “KhAI”, Kharkov, Ukraine, O.Kladova@khai.edu, ORCID: 0009-0008-1629-1080