

Друга основна задача теорії пружності у півпросторі з декількома паралельними круговими циліндричними порожнинами

Харківський національний університет будівництва та архітектури, Харків

Розраховано тривимірну задачу теорії пружності, коли в пружному півпросторі на межах паралельних циліндричних порожнин та на межі півпростору задано переміщення. Розв'язок отримано узагальненим методом Фур'є стосовно системи рівнянь Ламе в циліндричних координатах, пов'язаних із циліндрами, та декартових координатах, пов'язаних з півпростором. Нескінченні системи лінійних алгебраїчних рівнянь, до яких зведено проблему, вирішено методом усічення. В результаті було знайдено переміщення, а потім напруження в пружному тілі. Числові результати наведено для випадку півпростору та двох циліндрів.

Ключові слова: циліндричні порожнини в півпросторі, рівняння Ламе, узагальнений метод Фур'є, друга основна задача.

Вступ

При проектуванні на невеликій глибині різного роду комунікацій і тунелів потрібно знати напружено–деформований стан пружного тіла (простору або півпростору) з порожнинами, а також взаємний вплив їх один на одного. Таку інформацію можна отримати, розв'язавши відповідну задачу теорії пружності. Готових розрахунків подібних задач у просторовому варіанті немає, тож проблема розрахунку таких задач є актуальною.

Аналіз публікацій. Просторові (тривимірні) задачі теорії пружності для тіл, які обмежені канонічними поверхнями (поверхні другого порядку: циліндр, конус, куля, еліпсоїд, параболоїд та ін.) вивчалися в роботах [1-4]. Точні рішення в цих роботах отримані виключно методом розділення змінних і методом Фур'є. Задачі для пружних тіл із декількома граничними поверхнями не можуть бути вирішені в рамках класичного підходу. Для таких задач необхідно було створювати узагальнений метод Фур'є [5-8]. На основі цього методу і був розроблений метод вирішення задачі, вказаної у заголовку. В роботах [9-12] також застосовано узагальнений метод Фур'є, для трансверсально-ізотропних тіл, обмежених координатними поверхнями в циліндричних і параболоїдальних координатах. У статті [13] розглянуто другу основну задачу теорії пружності для півпростору з однією циліндричною порожниною і умовами на межі півпростору: $U_y = f(x) \cdot \cos \lambda z$, $U_x = U_z = 0$. Методу розрахунку півпростору з паралельними циліндричними порожнинами, на яких задані переміщення без аналізу напруженого стану, розглянуто в роботі [14].

Мета статті. Провести аналіз напружено–деформованого стану півпростору з декількома циліндричними порожнинами, паралельними між собою та межею півпростору, а також їх взаємного впливу. Для досягнення цієї мети використано узагальнений метод Фур'є.

Основний матеріал

Постановка задачі. Пружний однорідний півпростір має N кругових циліндричних паралельних порожнин, непересічних між собою і межею півпростору. Введемо системи координат: порожнини будемо розглядати в циліндричній системі (ρ_p, ϕ_p, z) , де p – номер циліндра, півпростір у декартовій системі (x, y, z) , яка од-

наково орієнтована та поєднана з системою координат циліндра з номером $p=1$. Межа півпростору розташована на відстані $y=h$. Рівняння межі півпростору S_d : $y=h$, поверхні циліндрів: S_p : $\rho_p = R_p$. На межах півпростору та на межах порожнин задані переміщення, які будемо вважати швидко убутними до нуля на далеких відстанях від начала координат. Потрібно знайти розв'язок рівняння Ламе

$$\Delta \vec{u} + (1 - 2\sigma)^{-1} \nabla \operatorname{div} \vec{u} = 0 \quad (1)$$

за умов, що на межах циліндричних порожнин задані переміщення $\vec{U}_p^0(\phi_p, z)$, $p=1, 2, \dots, N$; (ρ_p, ϕ_p, z) – система локальних циліндричних координат, а на межі півпростору задано переміщення $\vec{U}_d^0(x, z)$.

У зазначених системах координат візьмемо базисні розв'язки рівняння Ламе:

$$\begin{aligned} \vec{u}_k^\pm(M_d; \lambda, \mu) &= N_k^{(d)} u^\pm(M_d; \lambda, \mu); \quad (k=1, 2, 3); \\ N_1^{(d)} &= \frac{1}{\lambda} \nabla; \quad N_2^{(d)} = \frac{4}{\lambda} (\sigma - 1) \vec{e}_2^{(1)} + \frac{1}{\lambda} \nabla(y \cdot); \quad N_3^{(d)} = \frac{i}{\lambda} \operatorname{rot}(\vec{e}_3^{(1)} \cdot); \\ u^\pm(M_d; \lambda, \mu) &= e^{i\lambda z \pm \gamma y + i\mu x}; \\ \vec{R}_{k,m}(M_p; \lambda) &= N_k^{(p)} I_m(\lambda \rho) e^{i(\lambda z + m\phi)}, \quad \vec{S}_{k,m}(M_p; \lambda) = N_k^{(p)} \left[s_m(\rho_p; \lambda) \cdot \right. \\ &\left. \cdot e^{i(\lambda z + m\phi)} \right], k=1, 2, 3; \end{aligned} \quad (2)$$

$$\begin{aligned} N_1^{(p)} &= \frac{1}{\lambda} \nabla; \quad N_2^{(p)} = \frac{1}{\lambda} \left[\nabla \left(\rho \frac{\partial}{\partial \rho} \right) + 4(\sigma - 1) \left(\nabla - \vec{e}_3^{(2)} \frac{\partial}{\partial z} \right) \right]; \\ N_3^{(p)} &= \frac{i}{\lambda} \operatorname{rot}(\vec{e}_3^{(2)} \cdot); \quad s_m(\rho_p; \lambda) = (\operatorname{sign} \lambda)^m K_m(|\lambda| \rho_p); \end{aligned}$$

$$\gamma = \sqrt{\lambda^2 + \mu^2}; \quad -\infty < \lambda, \mu < \infty,$$

де $M_d = (x, y, z)$ – точка простору в декартовій системі координат, пов'язаної з півпростором;

$M_p = (\rho_p, \phi_p, z)$ – точка простору в циліндричній системі координат, пов'язаній з p -м циліндром;

$\vec{e}_j^{(k)}$, ($j=1, 2, 3$) – орти декартової ($k=1$) і циліндричної ($k=2$) систем координат;

σ - коефіцієнт Пуассона;

$I_m(\lambda \rho)$, $K_m(|\lambda| \rho)$ – модифіковані функції Бесселя;

$\vec{R}_{k,m}$, $\vec{S}_{k,m}$, ($k=1, 2, 3$) – відповідно внутрішній та зовнішній розв'язки рівняння Ламе для циліндра;

$\vec{u}_k^{(-)}$, $\vec{u}_k^{(+)}$ – розв'язки рівняння Ламе для півпростору.

Розв'язок задачі представимо у вигляді

$$\vec{U} = \sum_{k=1}^3 \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} H_k(\lambda, \mu) \cdot \vec{u}_k^{(+)}(M_d; \lambda, \mu) d\mu d\lambda + \sum_{p=1}^N \sum_{k=1}^3 \int_{-\infty}^{\infty} \sum_{m=-\infty}^{\infty} B_{k,m}^{(p)}(\lambda) \cdot \vec{S}_{k,m}(M_p; \lambda) d\lambda, \quad (4)$$

де $\vec{S}_{k,m}(M_p; \lambda)$ і $\vec{u}_k^{(+)}(M_d; \lambda, \mu)$ задані формулами (2), (3), а невідомі інтегральні щільності $H_k(\lambda, \mu)$, $B_{k,m}^{(p)}(\lambda)$ необхідно знайти із крайових умов.

Якщо вираз (4) записати в системі координат півпростору (x, y, z) та підставити у ліву частину крайові умови $\vec{U}_d^0(x, z)$, ми отримаємо систему із трьох лінійних алгебраїчних рівнянь відносно $H_k(\lambda, \mu)$ (по одному на кожну проекцію на осі x , y , z). Аналогічно записавши (4) в системі координат кожного циліндра з номером p з крайовими умовами в лівій частині $\vec{U}_p^0(\phi_p, z)$, ми отримаємо ще $3 \cdot N$ нескінченних систем лінійних інтегро - алгебраїчних рівнянь для кожного циліндра p відносно коефіцієнтів $B_{k,m}^{(p)}(\lambda)$. У сукупності маємо $3 \cdot (N+1)$ лінійних інтегро - алгебраїчних рівнянь відносно $H_k(\lambda, \mu)$, $B_{k,m}^{(p)}(\lambda)$.

Для переходу між системами координат (рис.1) застосовано формули:

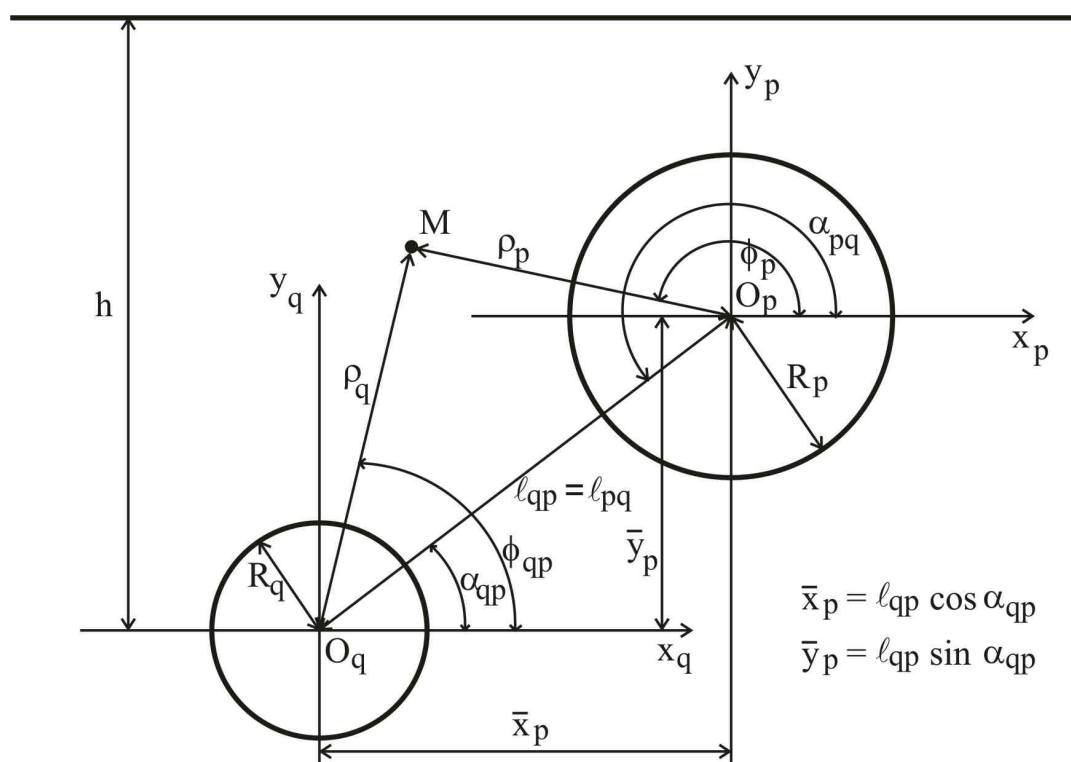


Рис. 1. Півпростір із циліндричними порожнинами

- від циліндра з номером p до півпростору

$$\begin{aligned}\vec{S}_{k,m}(M_p; \lambda) &= \frac{(-i \cdot \text{sign}(\lambda))^m}{2} \int_{-\infty}^{\infty} \omega^m \cdot \vec{u}_k^{(-)} \cdot e^{-i\mu\bar{x}_p + \bar{y}_p} \frac{d\mu}{\gamma}, k=1, 3; \\ \vec{S}_{2,m}(M_p; \lambda) &= \frac{(-i \cdot \text{sign}(\lambda))^m}{2} \int_{-\infty}^{\infty} \omega^m \cdot \left(\left(m \cdot \mu - \frac{\lambda^2}{\gamma} + \lambda^2 \bar{y}_p \right) \vec{u}_1^{(-)} - \lambda^2 \vec{u}_2^{(-)} + \right. \\ &\quad \left. + 4\mu(1-\sigma) \vec{u}_3^{(-)} \right) \frac{e^{-i\mu\bar{x}_p + \bar{y}_p} d\mu}{\gamma^2},\end{aligned}\quad (5)$$

де $\gamma = \sqrt{\lambda^2 + \mu^2}$, $\omega(\lambda, \mu) = \frac{\mu - \gamma}{\lambda}$, $y > 0$, $m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$;

- від півпростору до циліндра p

$$\begin{aligned}\vec{u}_k^{(+)} &= \sum_{m=-\infty}^{\infty} (i \cdot \omega)^m \vec{R}_{k,m} \cdot e^{i\mu\bar{x}_p + \bar{y}_p}, (k=1, 3); \\ \vec{u}_2^{(+)} &= e^{i\mu\bar{x}_p + \bar{y}_p} \sum_{m=-\infty}^{\infty} \left[(i \cdot \omega)^m \cdot \lambda^{-2} \left(m \cdot \mu \cdot \vec{R}_{1,m} + \gamma \cdot \vec{R}_{2,m} + 4\mu(1-\sigma) \vec{R}_{3,m} \right) + \right. \\ &\quad \left. + \bar{y}_p \cdot (i \cdot \omega)^m \vec{R}_{1,m} \right],\end{aligned}\quad (6)$$

де $\vec{R}_{k,m} = \vec{b}_{k,m}(\rho, \lambda) \cdot e^{i(n\phi + \lambda z)}$; $\bar{x}_p, \bar{y}_p$ – координати циліндра p відносно першого циліндру.

$$\begin{aligned}\vec{b}_{1,n}(\rho, \lambda) &= \vec{e}_\rho \cdot I'_n(\lambda\rho) + i \cdot I_n(\lambda\rho) \cdot \left(\vec{e}_\phi \frac{n}{\lambda\rho} + \vec{e}_z \right); \\ \vec{b}_{2,n}(\rho, \lambda) &= \vec{e}_\rho \cdot \left[(4\sigma - 3) \cdot I'_n(\lambda\rho) + \lambda\rho I''_n(\lambda\rho) \right] + \\ &+ \vec{e}_\phi i \cdot m \left(I'_n(\lambda\rho) + \frac{4(\sigma - 1)}{\lambda\rho} I_n(\lambda\rho) \right) + \vec{e}_z i \lambda\rho I'_n(\lambda\rho); \\ \vec{b}_{3,n}(\rho, \lambda) &= - \left[\vec{e}_\rho \cdot I_n(\lambda\rho) \frac{n}{\lambda\rho} + \vec{e}_\phi \cdot i \cdot I'_n(\lambda\rho) \right],\end{aligned}$$

- для переходу від координат циліндра із номером p до координат циліндра q

$$\vec{S}_{k,m}(M_p; \lambda) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \vec{b}_{k,pq}^{mn}(\rho_q) \cdot e^{i(n\phi_q + \lambda z)}, k=1, 2, 3; \quad (7)$$

$$\begin{aligned}\vec{b}_{1,pq}^{mn}(\rho_q) &= (-1)^n \tilde{K}_{m-n}(\lambda \ell_{pq}) \cdot e^{i(m-n)\alpha_{pq}} \cdot \vec{b}_{1,n}(\rho_q, \lambda); \\ \vec{b}_{3,pq}^{mn}(\rho_q) &= (-1)^n \tilde{K}_{m-n}(\lambda \ell_{pq}) \cdot e^{i(m-n)\alpha_{pq}} \cdot \vec{b}_{3,n}(\rho_q, \lambda);\end{aligned}$$

$$\vec{b}_{2,pq}^{mn}(\rho_q) = (-1)^n \left\{ \tilde{K}_{m-n}(\lambda \ell_{pq}) \cdot \vec{b}_{2,n}(\rho_q, \lambda) - \frac{\lambda}{2} \ell_{pq} \cdot \left[\tilde{K}_{m-n+1}(\lambda \ell_{pq}) + \tilde{K}_{m-n-1}(\lambda \ell_{pq}) \right] \cdot \vec{b}_{1,n}(\rho_q, \lambda) \right\} \cdot e^{i(m-n)\alpha_{pq}}.$$

$$\text{де } \tilde{K}_m(x) = (\text{sign}(x))^m \cdot K_m(|x|).$$

Метод вирішення. Для реалізації крайових умов на межі півпростору та на поверхні p -го циліндра відомі вектори $\vec{U}_d^0(x, y, z)$ і $\vec{U}_p^0(\phi, z)$ наведемо у вигляді розкладання

$$\begin{aligned} \vec{U}_p^0(\phi_p, z) &= \int_{-\infty}^{\infty} \sum_{m=-\infty}^{\infty} \vec{h}_m^{(p)}(\lambda) \cdot e^{i(\lambda \phi_p + \lambda z)} d\lambda, \\ \vec{U}_d^0(x, z) &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \vec{c}(\lambda, \mu) \cdot e^{i(\mu x + \lambda z)} d\lambda d\mu, \end{aligned} \quad (8)$$

де

$$\begin{aligned} \vec{h}_m^{(p)}(\lambda) &= \frac{1}{4\pi^2} \int_0^{2\pi} d\phi_p \int_{-\infty}^{\infty} \vec{U}_p^0(\phi_p, z) \cdot e^{-i(\lambda z + m\phi_p)} dz, \quad (p=1, 2, \dots, N); \\ \vec{c}(\lambda, \mu) &= \frac{1}{4\pi^2} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \vec{U}_d^0(x, z) \cdot e^{-i(\mu x + \lambda z)} dx dz. \end{aligned}$$

Розв'язок (3) для циліндрів $\vec{S}_{k,m}(M_p; \lambda)$ (при $\rho_p = R_p$) матиме такий вигляд:

$$\vec{S}_{k,m}(\rho, \phi, z; \lambda) = \vec{a}_{k,m}(\rho, \lambda) \cdot e^{i(m\phi + \lambda z)}, \quad (k=1, 2, 3), \quad (9)$$

$$\text{де } \vec{a}_{1,m}(\rho, \lambda) = \left[\vec{e}_\rho \cdot K'_m(t) \cdot \text{sign}(\lambda) + i \cdot K_m(t) \left(\vec{e}_\phi \frac{m}{\lambda \rho} + \vec{e}_z \right) \right] \cdot (\text{sign}(\lambda))^m;$$

$$\begin{aligned} \vec{a}_{2,m}(\rho, \lambda) &= (\text{sign}(\lambda))^m \left\{ \vec{e}_\rho \cdot \left[(4\sigma - 3) \cdot K'_m(t) \cdot \text{sign}(\lambda) + \lambda \rho K''_m(t) \right] + \right. \\ &\quad \left. + \vec{e}_\phi i \cdot m \left(\frac{4(\sigma - 1)}{\lambda \rho} K_m(t) + K'_m(t) \text{sign}(\lambda) \right) + \vec{e}_z \cdot i \cdot |\lambda| \cdot \rho \cdot K'_m(t) \right\}; \end{aligned}$$

$$\vec{a}_{3,m}(\rho, \lambda) = -(\text{sign}(\lambda))^m \left[\vec{e}_\rho K_m(t) \frac{m}{\lambda \rho} + \vec{e}_\phi i \cdot \text{sign}(\lambda) \cdot K'_m(t) \right], \quad t = |\lambda| \cdot \rho.$$

Функції (2) на межі півпростору (при $y=h$) мають вигляд

$$\begin{aligned}
 \vec{u}_1^{(\pm)} &= \vec{d}_1^{(\pm)} \cdot e^{i(\lambda z + \mu x)}, \quad \vec{u}_2^{(\pm)} = \vec{d}_2^{(\pm)} \cdot e^{i(\lambda z + \mu x)}, \quad \vec{u}_3^{(\pm)} = \vec{d}_3^{(\pm)} \cdot e^{i(\lambda z + \mu x)}; \\
 \vec{d}_1^{(+)} &= \left(i\mu \vec{e}_x + \gamma \vec{e}_y + i\lambda \vec{e}_z \right) \frac{e^{\gamma h}}{\lambda}, \quad \vec{d}_2^{(+)} = \left(i\mu h \vec{e}_x + (4\sigma - 3 + \gamma h) \vec{e}_y + i h \lambda \vec{e}_z \right) \frac{e^{\gamma h}}{\lambda}; \\
 \vec{d}_3^{(+)} &= \left(i\gamma \vec{e}_x + \mu \vec{e}_y \right) \frac{e^{\gamma h}}{\lambda}, \quad \vec{d}_1^{(-)} = \left(i\mu \vec{e}_x - \gamma \vec{e}_y + i\lambda \vec{e}_z \right) \frac{e^{-\gamma h}}{\lambda}; \\
 \vec{d}_2^{(-)} &= \left(i\mu h \vec{e}_x + (4\sigma - 3 - \gamma h) \vec{e}_y + i h \lambda \vec{e}_z \right) \frac{e^{-\gamma h}}{\lambda}, \quad \vec{d}_3^{(-)} = \left(-i\gamma \vec{e}_x + \mu \vec{e}_y \right) \frac{e^{-\gamma h}}{\lambda}.
 \end{aligned} \tag{10}$$

Задовольняючи крайові умови на межі циліндра S_q у розв'язку (4) перепишемо $\vec{u}_k^{(+)}(M_d)$ у системі координат циліндра $p=q$ за формулами (6), для кожного циліндра $p \neq q$ перепишемо $\vec{S}_{k,m}(M_p; \lambda)$ за формулами (7) і, враховуючи розв'язок (9) для циліндра $p=q$, прирівняємо векторні коефіцієнти при $e^{i(\lambda z + m\phi)}$:

$$\begin{aligned}
 \sum_{s=1}^3 \left(B_{s,m}^{(q)}(\lambda) \cdot \vec{d}_{s,m}(R_q, \lambda) + \sum_{n=-\infty}^{\infty} \sum_{p=1, p \neq q}^N B_{s,m}^{(p)}(\lambda) \cdot \vec{b}_{s,pq}^{mn}(R_q) \right) = \\
 = \vec{h}_m^{(p)}(\lambda) - \sum_{s=1}^3 \int_{-\infty}^{\infty} H_s(\lambda, \mu) \cdot \sum_{n=1}^3 \vec{b}_{n,m}(\rho, \lambda) \cdot f_{s,n}^m(\lambda, \mu) d\mu,
 \end{aligned} \tag{11}$$

де матриця

$$f^m(\lambda, \mu) = \left[f_{s,n}^m(\lambda, \mu) \right] = (i \cdot \omega(\lambda, \mu))^m \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \frac{m\mu}{\lambda^2} + \bar{y}_p & \frac{\gamma}{\lambda^2} & \frac{4\mu(1-\sigma)}{\lambda^2} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot e^{i\mu \bar{x}_p + \gamma \bar{y}_p}.$$

Задовольняючи крайові умови на межі півпростору S_d у розв'язку (4) перепишемо для кожного циліндра $\vec{S}_{k,m}(M_p; \lambda)$ у системі координат півпростору за допомогою формул (5) і, враховуючи розв'язок для півпростору (10), прирівняємо векторні коефіцієнти при $e^{i(\lambda z + \mu x)}$:

$$\begin{aligned}
 \sum_{s=1}^3 H_s(\lambda, \mu) \vec{d}_s^{(+)}(\lambda, \mu) = \vec{c}(\lambda, \mu) - \sum_{p=1}^N \sum_{s=1}^3 \sum_{m=-\infty}^{\infty} B_{s,m}^{(p)}(\lambda) \cdot \\
 \cdot \sum_{n=1}^3 \frac{(-i\omega(\lambda, \mu) \operatorname{sign}(\lambda))^m}{2\gamma} g_{p,n}^m(\lambda, \mu) \vec{d}_n^{(-)}(\lambda, \mu),
 \end{aligned} \tag{12}$$

де матриця

$$g^m(\lambda, \mu) = [g_{p,n}^m(\lambda, \mu)] = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \frac{m\mu - \lambda^2/\gamma}{\gamma} + \bar{y}_p \frac{\lambda^2}{\gamma} & \frac{-\lambda^2}{\gamma} & \frac{4\mu(1-\sigma)}{\gamma} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} e^{i\mu\bar{x}_p + \bar{y}_p}.$$

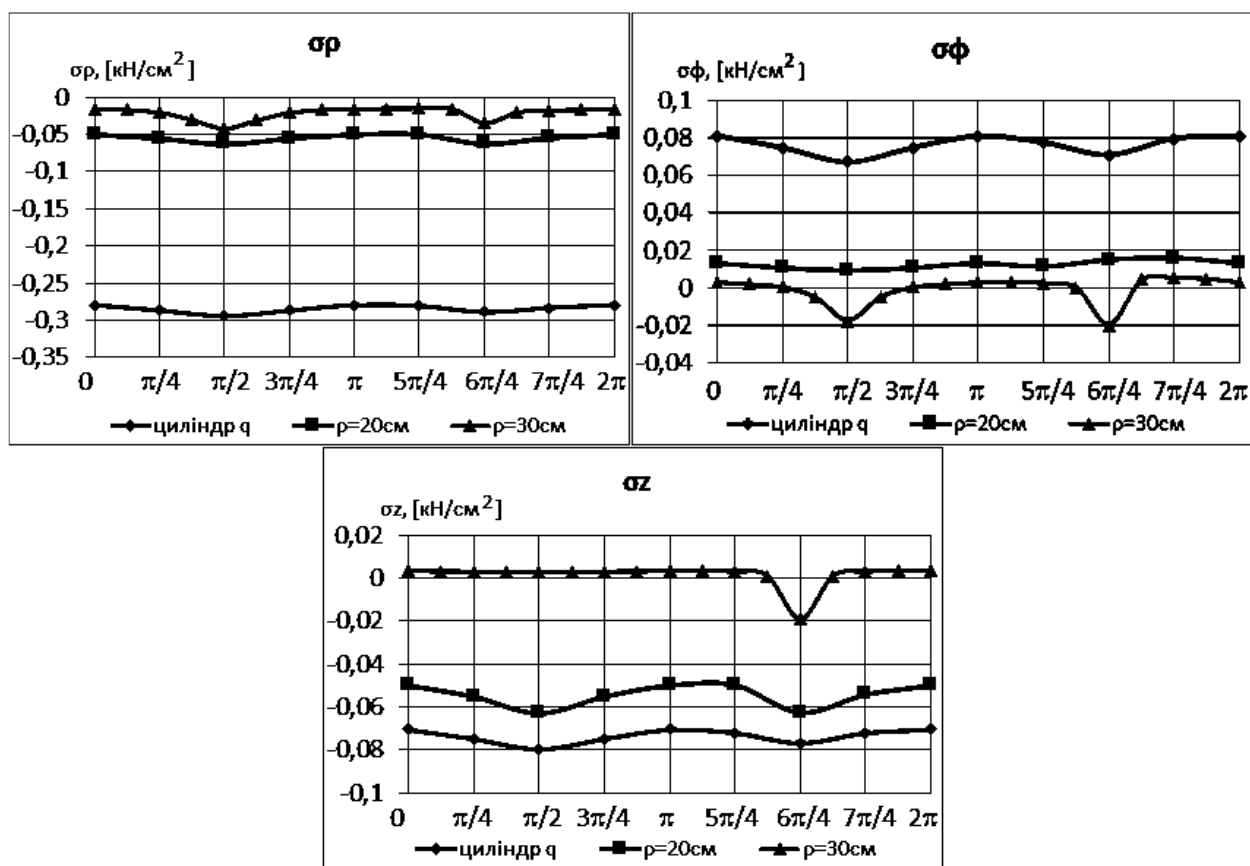
Визначник системи (12) відносно $H_s(\lambda, \mu)$ дорівнює $\frac{\gamma}{\lambda^2}(3-4\sigma)e^{3\gamma h} > 0$.

Якщо з рівняння (12) виразити $H_s(\lambda, \mu)$, отриманий вираз підставити у (11) та спроектувати ці векторні рівності на осі координат (прирівняти проекції при базисних векторах $\vec{e}_p$, $\vec{e}_\phi$, $\vec{e}_z$ для циліндрів), то отримаємо сукупність $3 \cdot N$ нескінченних систем лінійних алгебраїчних рівнянь відносно $B_{s,m}^{(p)}(\lambda)$. Для отриманих систем можна довести їх однозначну розв'язність. Більше того, ці системи можна вирішувати методом усичення і має місце збіжність наближених рішень до точного, як це доведено в [13] для однієї порожнини. Отримавши із системи рівнянь числові значення $B_{s,m}^{(p)}(\lambda)$, підставимо їх у знайдені вирази для $H_s(\lambda, \mu)$. Отже знайдені всі невідомі коефіцієнти і функції з виразу (4).

Числові результати для двох циліндрів. Маємо дві паралельні циліндричні порожнини у півпросторі (рис. 1), які розташовані на відстані $\ell_{qp} = 40$ см. під кутом $\alpha_{qp} = 3\pi/2$, $h=30$ см. Радіуси порожнин $R_p = R_q = 10$ см. Простір – ізотропний матеріал, коефіцієнт Пуассона $\sigma = 0,35$, модуль пружності $E = 2\kappa H / \text{см}^2$. На межах циліндрів задано вектор переміщення у вигляді $U_\rho^{(q)} = 10^{-4} \cdot (z^2 + 10^2)^2$; $U_\rho^{(p)} = 0$; $U_z^{(q)} = U_z^{(p)} = 0$; $U_\phi^{(q)} = U_\phi^{(p)} = 0$; на межі півпростору $U_x^{(d)} = U_y^{(d)} = U_z^{(d)} = 0$.

Отримана нескінченна система рівнянь була зведена до кінцевої: $m=-4, \dots, 4$, межі інтеграції за λ були взяті від $-3, \dots, 3$, за μ від $-1, \dots, 1$. Обчислення інтегралів виконано за допомогою квадратурних формул Філона та Сімпсона. Це є достатнім при заданих геометричних умовах, точність виконання граничних умов у цьому випадку досягає 10^{-4} .

У результаті розв'язання цієї системи рівнянь були знайдені невідомі функції, перевірено виконання граничних умов на межі півпростору та на межах циліндричних порожнин, побудовані графіки нормальних напружень відносно навантаженого циліндра q (рис.2). На рис. 2 видно, що екстремальні напруження виникають у місцях, наближених до півпростору та іншого циліндра. Більше того, півпростір має більший вплив на σ_ρ , а циліндрична порожнина більше впливає на σ_ϕ і σ_z .


Рис. 2. Нормальні напруження в координатах циліндра q

Найбільш напружений стан знаходиться на перешийку між циліндром q та площиною $y=h$ (вздовж Y_q від циліндра q до межі півпростору, рис.3, ліворуч) і між циліндричними порожнинами по лінії ℓ_{qp} (вздовж Y_q від циліндра q до циліндра p , рис. 3, праворуч).

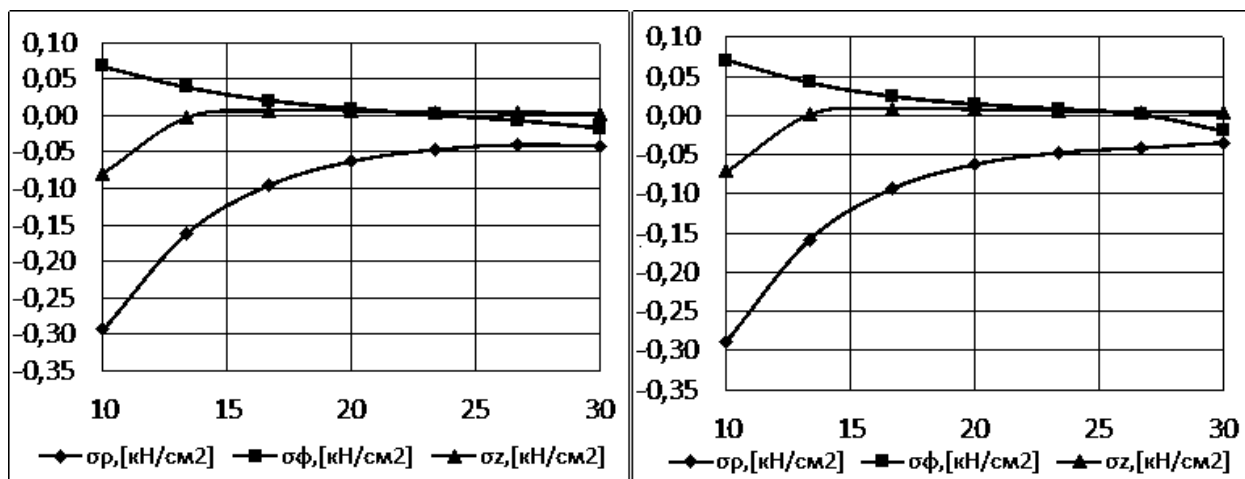


Рис. 3. Нормальні напруження на перешийках

Якщо зменшити відстані між порожнинами та межею півпростору, залишимо всі інші параметри незмінними, тобто приймемо $\ell_{qp} = 25\text{см}$ (відношення

$\frac{R_p + R_q}{\ell_{qp}} = 0,8$), $h=15$ см. Для забезпечення виконання граничних умов з точністю 10^{-4} кількість членів ряду Фур'є необхідно збільшити до $m = -10, \dots, 10$.

На рис. 4 порівняно з рис.2 можна побачити, як вплинула зміна відстані на нормальні напруження. Напруження σ_r та σ_z значно збільшились і мають більш виражений характер. Напруження σ_ϕ на поверхні циліндра p в областях, наближених до циліндра q та півпростору, змінили знак на протилежний і тепер мають стискаючі значення.

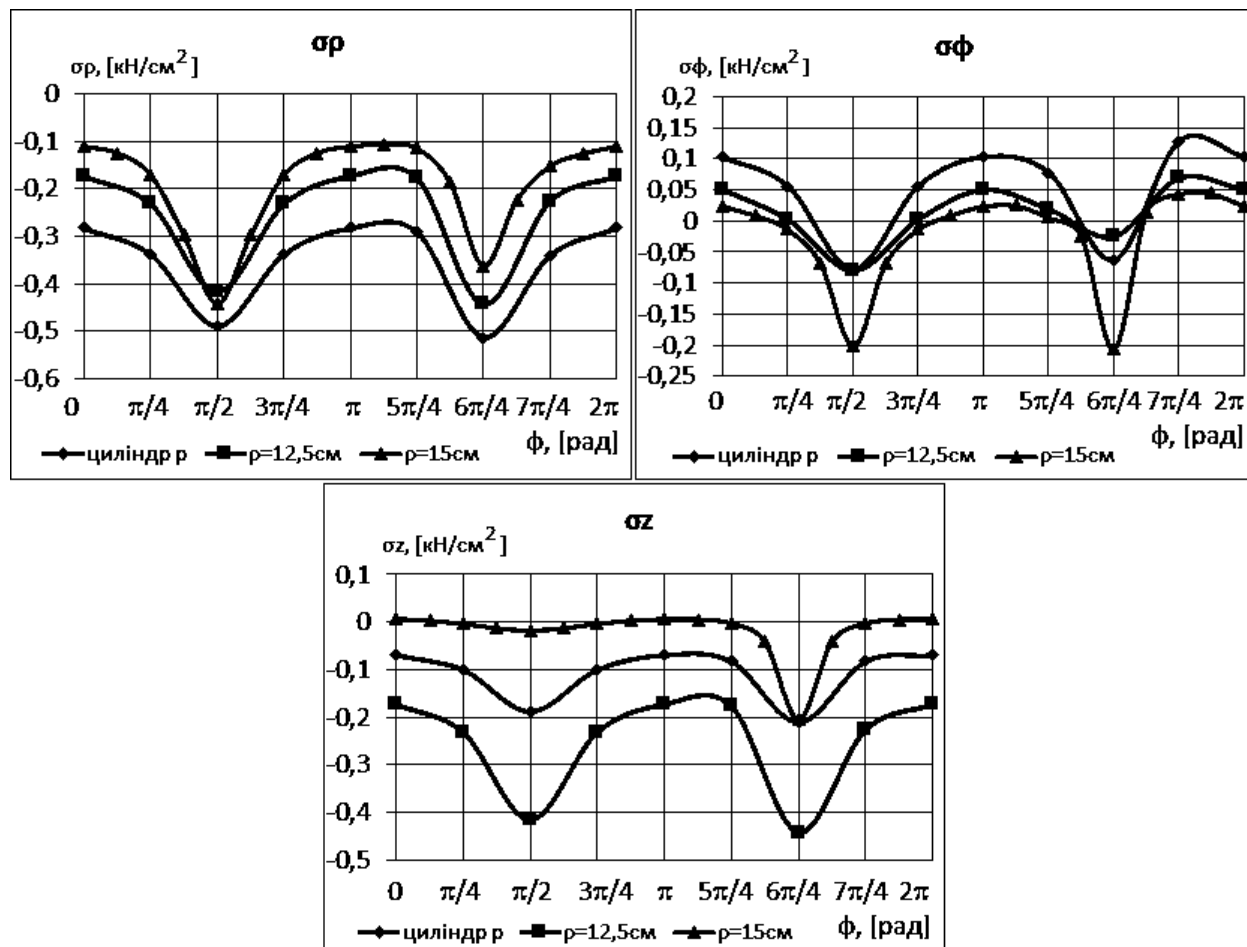


Рис. 4. Нормальні напруження в координатах циліндра q

На рис. 5 порівняно з рис. 3 можна побачити, що напруження на перешийках не тільки зросли, але й мають іншу форму, наприклад, σ_ϕ у попередній задачі зменшувалась, прямуючи до нуля та лише на межі півпростору, або циліндра p мала невеликий ріст. У цьому випадку σ_ϕ при наближенні до межі півпростору або циліндра p має впевнений зріст зі значеннями, значно вищими, ніж на циліндрі q , який має ненульове переміщення.

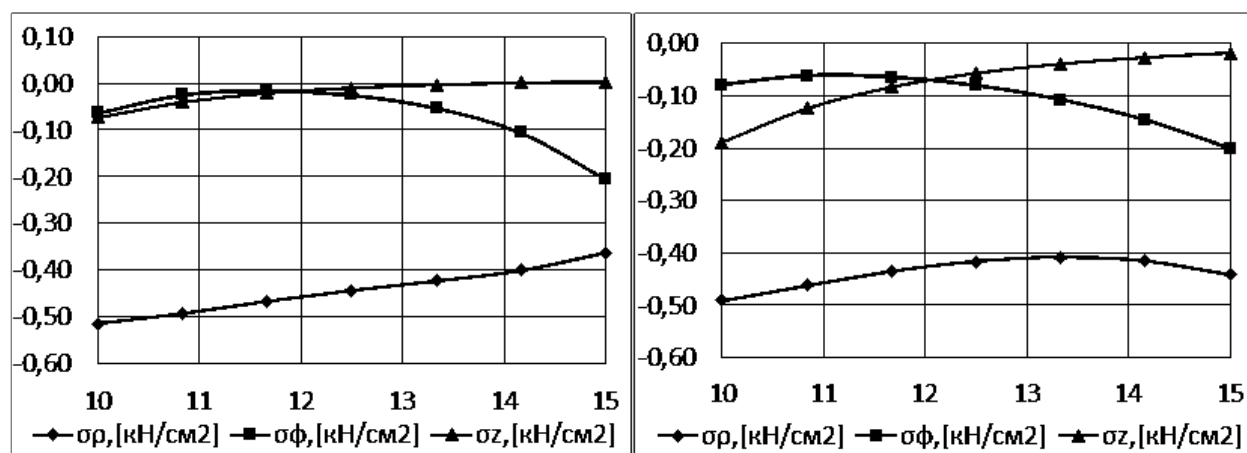


Рис. 5. Нормальні напруження на перешийках

Висновки

Запропоновано метод розв'язання задачі теорії пружності, коли на межі півпростору та на межах декількох паралельних циліндричних кругових порожнин задані переміщення.

Проведені числові дослідження алгебраїчної системи для двох циліндрів ($N=2$) дозволяють стверджувати, що її рішення може бути з будь-яким ступенем точності знайдено методом редукції.

Наведені графіки дають уявлення про розподіл напружень у тілі у найбільш цікавих зонах, про взаємний вплив циліндричних порожнин одна на одну та взаємний вплив межі півпростору і циліндричних порожнин.

Список літератури

1. Подильчук, Ю.Н. Пространственные задачи теории упругости/ Ю.Н. Подильчук. – Київ: Наук.думка, 1979. –240 с.
2. Гринченко, В.Т. Пространственные задачи теории упругости и пластичности. Равновесие упругих тел канонической формы/ В.Т. Гринченко, А.Ф. Улитко. – Київ: Наук.думка, 1985. –280 с.
3. Улитко, А.Ф. Метод собственных векторных функций в пространственных задачах теории упругости/ А.Ф. Улитко.- Київ: Наук.думка, 1979. –265 с.
4. Уфлянд, Я.С. Интегральные преобразования в задачах теории упругости/ Я.С. Уфлянд. – Ленинград:Наука, 1967. –402 с.
5. Гузь, А.Н. Сферические днища, ослабленные отверстиями/ А.Н. Гузь, И.С. Чернышенко, К.И. Шнеренко. – Київ: Наук.думка, 1970. –323 с.
6. Гузь, А.Н. Дифракция упругих волн в многосвязных телах/ А.Н. Гузь, В.Т. Головчан. – Київ: Наук.думка, 1972. –254 с.
7. Николаев, О.Г. Узагальнений метод Фур'є в просторових задачах теорії пружності для канонічних багатозв'язкових тіл/ О.Г. Николаев. – Дніпропетровськ: автореф. дис. д-ра физ-мат. наук, 1997. –36 с.
8. Николаев, А.Г. Обобщенный метод Фурье в пространственных задачах теории упругости/ А.Г. Николаев, В.С. Проценко. – Харьков: Нац. аэрокосм. университет им. Н.Е. Жуковского «ХАИ», 2011. –344 с.

9. Щербакова, Ю. А. Сравнительный анализ НДС многосвязных трансверсально-изотропных тел с различными упругими характеристиками / Ю. А. Щербакова, Е. М. Шехватова // Вісник Запорізького національного університету. – Запоріжжя, 2015. – Вып. 2. – С. 253-261.

10. Николаев, А. Г. Аппарат и приложения обобщенного метода Фурье для трансверсально-изотропных тел, ограниченных плоскостью и параболоидом вращения / А.Г. Николаев, Ю.А. Щербакова // Мат. методи та фіз.-мех. поля. – 2009. – 52, №3. – С. 160-169.

11. Николаев, А. Г. Обоснование метода Фурье в осесимметричных задачах теории упругости для трансверсально-изотропных тел, ограниченных поверхностью параболоида / А.Г. Николаев, Ю.А. Щербакова // Открытые информационные и компьютерные интегрированные технологии : сб. науч. тр. – Харьков: Нац. аэрокосм. ун-т «ХАИ», 2010. – Вып. 48. – С. 180-190.

12. Николаев, А. Г. Действие сосредоточенной силы на трансверсально-изотропное полупространство с параболоидальным включением / А.Г. Николаев, А.Ю. Щербакова, А.И. Юхно // Вопросы проектирования и производства конструкций летательных аппаратов. Сб. науч. тр. Нац. аэрокосм. ун-та им. Н. Е. Жуковского «ХАИ». – Харьков: НАКУ, 2006. – Вып. 2(45). – С. 47-51.

13. Проценко, В.С. Вторая основная краевая задача теории упругости для полупространства с круговой цилиндрической полостью / В.С. Проценко, Н.А. Попова. – Київ: Доп. НАН України, – 2004. – №12. – С. 52-58.

14. Визначення НДС в пружному напівпросторі з циліндровими порожнинами / В.Ю. Мірошніков, А.В. Медведєва, С.О. Ворончіхіна, С.В. Олешкевич. // Науковий вісник будівництва. – Вип. 68. – Харків: ХОТВАБУ ХНУБА. – 2012. – С. 156-162.

15. Николаев, А.Г. Обоснование метода Фурье в основных краевых задачах теории упругости для некоторых пространственных канонических областей / А.Г. Николаев. – Київ: Доп. НАН України, – 1998. – №2. – С.78-83.

Надійшла до редакції 20.02.2018

Вторая основная задача теории упругости в полупространстве с несколькими параллельными круговыми цилиндрическими полостями

Решена трехмерная задача теории упругости, когда в упругом полупространстве на границах параллельных цилиндрических полостей и на границе полупространства задано перемещение. Решение получено обобщенным методом Фурье относительно системы уравнений Ламе в цилиндрических координатах, связанных с цилиндрами и декартовых координатах, связанных с полупространством. Бесконечные системы линейных алгебраических уравнений, к которым сведена проблема, решены методом усечения. В результате были найдены перемещения, а затем напряжения в упругом теле. Числовые результаты приведены для случая полупространства и двух цилиндров.

Ключевые слова: цилиндрические полости в полупространстве, уравнения Ламе, обобщенный метод Фурье, вторая основная задача.

The Second Basic Problem of the Theory of Elasticity in a Half-Space with Several Parallel Circular Cylindrical Cavities

A three-dimensional problem of the theory of elasticity is solved, when a displacement is prescribed in an elastic half-space at the boundaries of parallel cylindrical cavities and on the boundary of a half-space. The solution is obtained by the generalized Fourier method with respect to the system of Lamé equations in cylindrical coordinates connected with cylinders and Cartesian coordinates connected with a half-space. Infinite systems of linear algebraic equations, to which the problem is reduced, are solved by the truncation method. As a result, displacements were found, followed by stresses in the elastic body. Numerical results are given for the case of a half-space and two cylinders.

Keywords: cylindrical cavities in a half-space, Lamé equations, generalized Fourier method, second main problem.

Відомості про автора:

Мирошников Виталий Юрьевич – канд. техн. наук, доцент кафедры Строительной механики, Харьковский национальный университет строительства и архитектуры, Украина.