doi: 10.32620/oikit.2019.86.11

УДК 519.161 О. Б. Маций

Обзор задач маршрутизации, сводимых к задаче коммивояжера

Харьковский национальный автомобильно-дорожный университет

Решение задачи повышения эффективности управления транспортным процессом зависит не только от уровня модернизации транспортных средств и степени использования современных информационных технологий, но и от выбора маршрутов, сокращающих расходы на перевозку грузов и пассажиров. Реальные условия работы транспортных средств в сетях автомобильных дорог выдвигают ряд задач оптимизации замкнутых маршрутов, в основе которых лежит классическая задача маршрутизации (VRP – Vehicle Routing Problem).

VRP представляет собой одно из обобщений труднорешаемой задачи коммивояжера. Задача коммивояжера является NP-полной. Она относятся к основным задачам комбинаторной оптимизации и, образуя непрерывно пополняемое множество приложений и обобщений, остается актуальной темой исследований Точное решение задачи коммивояжера можно найти только методами сокращения перебора типа ветвей и границ, не всегда применимыми в оперативном планировании движением транспортных средств. Поэтому разработка новых и усовершенствование известных в настоящее время методов решения задач маршрутизации, сводимых к задаче коммивояжера, и их программная реализация является как теоретической, так практически важной проблемой. В статье рассмотрен класс задач маршрутизации, сводимых к задаче коммивояжера. Показано, что задачи оптимизации замкнутых маршрутов (задачи маршрутизации), которые являются важной частью транспортной логистики, занимают при поддержке современными информационными технологиями ключевые позиции в управлении процессами перемещения грузов и пассажиров. Очевидная особенность, объединяющая рассмотренный список задач маршрутизации (симметричная задача коммивояжера, задача об упаковке в контейнеры, задача о школьном автобусе) заключается в том, что они формулируются как обобщения или варианты NP-полной задачи коммивояжера с ограничениями, которые сужают область допустимых решений. Самые сильные из ограничений становятся недостаточными условиями разрешимости, стимулируя интерес к исследованию задач комбинаторной оптимизации, связанных с задачей коммивояжера.

Ключевые слова: комбинаторная оптимизация, транспортная логистика, задача маршрутизации, задача коммивояжера, маршруты, целевая функция.

1. Постановка проблемы

Выполненные в данной работе исследования направлены на развитие недавних результатов в области комбинаторной оптимизации, образующих математический аппарат транспортной логистики.

К широкому спектру моделей транспортной логистики относятся модели оптимизации замкнутых маршрутов (модели маршрутизации), которые содержат ряд условий и ограничений, присущих реальному процессу перемещения объектов на плоскости или в пространстве. Поэтому задачи маршрутизации занимают ключевое место в экономически обоснованном принятии решений, ускоряющих выполнение транспортных работ.

2. Анализ литературы

Задачам в области формирования оптимальных транспортных маршрутов посвящены многочисленные исследования в разных странах. Особую актуальность приобретают работы, позволяющие точно вычислять объемы грузоперевозок, рассчитывать количество единиц транспорта, необходимых для обеспечения грузопотоков, определять рациональные маршруты движения, а также сократить суммарные затраты на транспортировку.

Реальные условия работы транспортных средств в сетях автомобильных дорог выдвигают ряд задач оптимизации замкнутых маршрутов.

В основе задач оптимизации замкнутых маршрутов лежит классическая задача маршрутизации (VRP – Vehicle Routing Problem), сформулированной Данцигом и Рамсером [1, 2]. Известен целый ряд ее обобщений, в которых учитываются различные ограничения и критерии [3, 4, 5]. Обычно, для большинства таких обобщений поиск решения, который удовлетворял бы по точности и быстродействию, оказывается слишком трудоемким. Существует достаточно большое количество задач VRP, которые отличаются друг от друга теми или иными характеристиками транспортных средств, а также введением дополнительных ограничений.

Наличие различных ограничений определяется типом задач, а часто также тем, что реальные задачи являются очень сложными и в таких случаях рассматриваются упрощенные задачи [4, 6, 7, 8].

3. Цель статьи

Цель статьи – обзор и анализ современных достижений комбинаторной оптимизации, формирующей математический аппарат транспортной логистики, определение класса задач маршрутизации, сводимых к задаче коммивояжера.

4. Класс задач маршрутизации

В VRP рассматривается *n* потребителей *i*, каждому из которых нужно доставить однородный груз в заданном количестве d_i с единственной базы 0, используя *K* транспортных средств (ТС) одинаковой вместимости *S*.

Каждый потребитель обслуживается только одним ТС, выполняющим замкнутый маршрут с началом в базе.

Задана стоимость d_{ij} перевозки из пункта *i* в пункт $j, i \in N \cup \{n+1\}, |N| = n,$ не зависящая от объема (веса) груза, причем $d_{ij} = d_{ji}.$

Допустимое решение VRP состоит в разбиении множества *N* на *K* подмножеств, представленных перестановками $\sigma_k.$ Перестановка $\sigma_k.$ определяет последовательность доставки грузов каждому потребителю и удовлетворяет условию $\sum_{i \in \sigma_k} d_i \le S.$

Оптимальное решение VRP минимизирует $\sum_{k=1}^{K} \sum_{i,j \in \sigma_k} d_{ij}.$ Оно находится в полном графе с *n* + 1 вершинами, соответствующими *n* пунктам потребления и базе, и ребрами с весами, равными d_{ij} [1, 2].

Если в VRP все потребители обслуживаются одним ТС, то *K* = 1 и

$\sum_{i=1}^{n} d_i \le S.$

В этом случае VRP формулируется как задача коммивояжера (ЗК): требуется найти простой цикл, включающий все *n* + 1 вершин полного графа и доставляющий минимум транспортных затрат.

Одна из распространенных постановок ЗК состоит в том, что известны расстояния d_{ij} между каждой парой городов *i* и *j*, $i, j \in \{1, 2, \dots, n\}$, и требуется найти такую последовательность городов $(\pi[1], \pi[2], \dots, \pi[i], \dots, \pi[n])$, для которой минимальна величина

$$\sum_{i=1}^{n-1} d_{\pi[i]\pi[i+1]} + d_{\pi[n][\pi_1]} \tag{1}$$

Эта величина равна длине кратчайшего маршрута (обхода), начинающегося в городе $\pi[1]$, поочередно проходящего по всем городам и заканчивающегося в $\pi[1]$ после посещения $\pi[n]$ ЗК, в которой $d_{ij} = d_{ji}$ для каждой пары городов $\{i, j\}$, называется симметричной ЗК (СЗК) [3, 4, 5].

ЗК и СЗК являются NP-полными в сильном смысле проблемами. Они относятся к основным задачам комбинаторной оптимизации и, образуя непрерывно пополняемое множество приложений и обобщений, остаются актуальной темой исследований [4, 6, 7].

Пусть в полном графе с n +1 вершинами каждому ребру приписан нулевой вес (все маршруты доставки в VRP имеют одинаковую стоимость), но определена плата за использование каждой единицы ТС. Эта плата фиксирована для всех ТС одинаковой вместимости. Здесь требуется найти минимальное число ТС, обеспечивающее перевозку *n* грузов d_i.

Поставленная задача, известная как задача об упаковке в контейнеры, NP-полна в сильном смысле. Так как VRP включает условия СЗК и задачи об упаковке, то мало надежды на построение точного решения VRP эффективными алгоритмами [4].

Кроме того, ограничение $\sum_{i=1}^{n} d_i \le KS$ при заданном *K* > 2 не является достаточным условием существования допустимого решения VRP. К ЗК с ограничениями сводится задача маршрутизации, в условиях которой имеется одно ТС, первоначально расположенное в базе. ТС должно перевезти однородный груз из пунктов производства в пункты потребления и вернуться на базу.

Заданы общее число пунктов производства и потребления, равное *n*, $N = \{1, 2, \dots, n\}$ (базе присвоен номер 0), стоимости d_{ij} транспортировки груза из пункта i в пункт j, $i, j \in \{0\} \cup N$, вместимость ТС, равная *S*, вес q_i груза, который надо вывезти из пункта производства (при этом $q_i < 0$), или доставить в пункт потребления (при этом $q_i > 0$).

Естественно, что выполняется условие баланса $\sum_{i=1}^{n} q_i = 0.$ Требуется найти перестановку $(\pi[1],\ \pi[2],\ \ldots,\ \pi[i],\ \ldots,\ \pi[n])$ множества *N*, такую, что

$$0 \le \sum_{i=1}^{u} q_{\pi[i]} \le S,\ u \in N, \tag{2}$$

$$d_{0,\pi[1]} + \sum_{i=1}^{n-1} d_{\pi[i]\pi[i+1]} + d_{\pi[n],0} \to \min \tag{3}$$

Из выражений (1) и (3) следует, что сформулированная задача является ЗК, в которой множество допустимых решений при условии (2) может оказаться пустым.

Класс задач маршрутизации, сводимых к ЗК, включает задачу о кране [1, 8].

В ней задан смешанный граф (*V*, *U*, *A*), в котором множество вершин *V*, множество дуг *A* и множество ребер *U* образуют модель транспортной сети.

Известна матрица расстояний d_{ij} определенная на ее ребрах и дугах.

Дуга сети соответствует переносу груза с одного места на другое, а ребро – перемещению крана без груза.

Требуется найти такой маршрут крана, который бы проходил по всем дугам сети и имел минимальную длину.

Задача о кране сводится к ЗК, если положить длины всех дуг, равными 0, а каждую пару вершин, связанных дугой, объединить в одну вершину.

Пусть i^1 является объединением вершин i_1 и i_2, а вершина j^1 – объединением вершин j_1 и j_2.

Расстояние между вершинами i^1 и j^1 определяется следующим образом:

$$d_{i^1 j^1} = \min\left\{d_{i_1 j_1},\ d_{i_1 j_2},\ d_{i_2 j_1},\ d_{i_2 j_2}\right\}. \tag{4}$$

После решения ЗК с матрицей $\left\|d_{ij}\right\|$ нужно вернуться к исходной транспортной сети и добавить все дуги в полученный обход. Известно несколько прикладных версий VRP. Например, задача о школьном автобусе (SBRP – School Bus Routing Problem), которая имеет следующую формулировку. Школа располагает парком одинаковых ТС вместимости *S*, предназначенных для доставки каждого ученика *i* к месту его проживания по окончанию занятий, $i = \overline{1,n},\ n = |N|$.

Школе присвоен номер 0.

Известны время проезда t_{ij} от пункта i в пункт j, $i, j \in \{0\} \cup N$ и стоимость проезда d_{ij} Каждое ТС должно вернуться в пункт 0 за время, не превосходящее T [1]. Требуется найти булевы переменные x_{ij}, $i, j \in \{0\} \cup N,$ и такое количество K ТС, что пункт 0 является началом (концом) маршрута каждого ТС:

$$\sum_{i=1}^{n} x_{i0} = \sum_{i=1}^{n} x_{0i} = k; \tag{5}$$

любой пункт доставки *i* входит в единственный маршрут $i \in N$:

$$\sum_{i=1}^{n} x_{ij} = \sum_{i=1}^{n} x_{ji} = 1; \quad j \in N; \tag{6}$$

не существует маршрутов, включающих только пункты доставки:

$$\sum_{\substack{i,\, j \in U \\ U \subset N}} x_{ij} < |U|; \tag{7}$$

маршрут ТС $(0,\ i[1],\ i[2],\ \ldots,\ i[j],\ \ldots,\ i[r],\ 0)$, $i[j] \in N$ удовлетворяет условию вместимости:

$$\sum_{j=1}^{\tau-1} x_{i[j],i[j+1]} = \tau - 1 \le S - 1 \tag{8}$$

и ограничению по времени его выполнения:

$$t_{0i[1]} + \sum_{j=1}^{r-1} t_{i[j],i[j+1]} + t_{i[\tau]0} \le T. \tag{9}$$

Целевая функция SBRP имеет вид:

$$\sum_{i=0}^{n} \sum_{j=0}^{n} d_{ij} x_{ij} \to \min. \tag{10}$$

Очевидно, в SBRP $d_i = 1,\ i = \overline{1,n},$ вместо $d_i \in Z^+$ в VRP, а количество $TC = K = \lceil n/S \rceil,\ Z^+$ – множество целых положительных чисел.

Если в SBRP стоимость d_{ij} и время t_{ij} перемещения ТС из *i*-го пункта в *j*-й линейно зависимы и $d_{ij} = 0$, когда $t_{ij} = 0,$ то (10) можно заменить на целевую функцию

$$\sum_{i=0}^{n} \sum_{j=0}^{n} t_{ij} x_{ij} \to \min, \tag{11}$$

используя исходные данные d_{ij} $i, j \in \{0\} \cup N$ как вспомогательные, для экономической оценки построенного решения. Если положить в (8) и (9) *r* = *n*, то SBRP оказывается ЗК на множестве вершин $\{0\} \cup N,\ |N| = n,$ транспортной сети, задаваемой полным графом.

Близкой по содержанию к VRP является задача *k*-VRP. В *k*-VRP не заданы количество груза d_i, доставляемое *i*-му потребителю, $i = \overline{1,n},$ и вместимость *S* каждого ТС, требуется, чтобы оно обслуживало не более *k* клиентов. Необходима минимизировать суммарную стоимость маршрутов всех ТС, количество которых равно $m \le \lceil n/k \rceil$. Поэтому *k*-VRP разрешима для *n*, $k \in Z^+$ и $n \ge k$. При $n = k$ она является ЗК, определенной на множестве обходов $(0,\ i[1],\ i[2],\ \ldots,\ i[j],\ \ldots,\ i[n],\ 0)$, при *k* = 2 полиномиально разрешима, но уже при $k \geq 3$ относится к классу NP-полных проблем.

5. Выводы

Основу задач эффективной организации транспортных работ образует классическая задача маршрутизации – VRP, связанная с NP-трудной проблемой коммивояжера и дополненная реальными условиями перевозочного процесса.

Очевидная особенность, объединяющая рассмотренный список задач маршрутизации, заключается в том, что они формулируются как обобщения или варианты NP-полной ЗК с ограничениями, которые сужают область допустимых решений. Самые сильные из ограничений становятся недостаточными условиями разрешимости, стимулируя интерес к исследованию задач комбинаторной оптимизации, связанных с ЗК.

Список литературы:

1. Бронштейн Е.М. Детерминированные оптимизационные задачи транспортной логистики / Е. М. Бронштейн, Т. А. Зайко // Автоматика и телемеханика. – 2010. – №10. – С. 133–147.

2. Емец О. А. Транспортные задачи на перестановках: свойства оценок в методе ветвей и границ / О. А. Емец, Т. А. Парфенова // Кибернетика и системный анализ. – 2010. – № 6. – С. 106–112.

3. Алгоритм для решения задачи коммивояжера / Д. Ж. Литтл, К. Мурти, Д. Суини, К. Кэрел // Экономика и математические методы. – 1965. – Т. 1, вып. 1. – С. 90–107.

4. Гэри М. Вычислительные машины и труднорешаемые задачи / М. Гэри, Д. Джонсон. – М.: Мир, 1982. – 416 с.

5. Майника Э. Алгоритмы оптимизации на сетях и графах / Э. Майника – М.: Мир, 1981. – 323 с.

6. Панишев А. В. Модели и методы оптимизации в проблеме коммивояжера / А. В. Панишев, Д. Д. Плечистый. – Житомир: ЖГТУ, 2006. – 300 с.

7. Панішев А. В. Вступ до теорії складності дискретних задач / А. В. Панішев, О. М. Данильченко, В. О. Скачков. – Житомир: ЖДТУ, 2004. – 326 с.

8. Резер С. М. Математические методы оптимального планирования в транспортных системах / С. М. Резер, С. Е. Ловецкий, И. И. Меламед. – М.: Итоги науки и техники, серия «Организация управления транспортом», 1990. – 171 с.

References:

1. Bronshtein, E.M., Zaiko, T.A. (2010), Determinirovannye optimizacionnye zadachi transportnoi logistiki. Avtomatika i telemehanika, Vol. 10, pp. 113-147.

2. Emec, O.A., Parfenova, T.A (2010), Transportnye zadachi na perestanovkah: svoistva ocenok v metode vetvei i granic. Kibernetika i sistemnyi analiz, Vol. 6, pp. 106-112.

3 Литтл, D.J., Murti, K., Suini, D., Kerel, K. (1965), Algoritm dlya resheniya zadachi kommivoyajera. Ekonomika i matematicheskie metody, Vol/ 1, no. 1, pp. 90-107.

4. Geri, M., Djonson, D. (1982), Vychislitel'nye mashiny i trudnoreshaemye zadachi. Mir, 416 p.

5. Mainika, E., Zaiko, T.A. (1981), Algoritmy optimizacii na setyah i grafah. Avtomatika i telemehanika, Mir, 323 p.

6. Panishev, A.V., Plechistyi, D.D. (2004), Modeli i metody optimizacii v probleme kommivoyajera. JGTU, 300 p.

7. Panishev, A.V., Danil'chenko, O.M., Skachkov, V.O. (2004), Vstup do teorii̇̈ skladnosti diskretnih zadach. Avtomatika i telemehanika, Vol JGTU, 326 p.

8. Rezer, S.M., Loveckii, S.E., Melamed, I.I (1990), Matematicheskie metody optimal'nogo planirovaniya v transportnyh sistemah. Itogi nauki i tehniki, 171 p.

Поступила в редакцию 30.09.2019, рассмотрена на редколлегии 12.10.2019

Огляд завдань маршрутизації, що зводяться до задачі комівояжера

Рішення задачі підвищення ефективності управління транспортним процесом залежить не тільки від рівня модернізації транспортних засобів та ступеня використання сучасних інформаційних технологій, а й від вибору маршрутів, що скорочують витрати на перевезення вантажів і пасажирів. Реальні умови роботи транспортних засобів в мережах автомобільних доріг висувають ряд завдань оптимізації замкнутих маршрутів, в основі яких лежить класична задача маршрутизації (VRP - Vehicle Routing Problem).

VRP є одним з узагальнень труднорешаемой завдання комівояжера. Завдання комівояжера є NP-повною. Вона відносяться до основних завдань комбінаторної оптимізації та, утворюючи безперервно поповнюється безліч додатків і узагальнень, залишається актуальною темою досліджень Точне рішення задачі комівояжера можна знайти тільки методами скорочення перебору типу гілок і меж, не завжди застосовні в оперативному плануванні рухом транспортних засобів. Тому розробка нових та удосконалення відомих в даний час методів рішення задач маршрутизації, зводяться до задачі комівояжера, і їх програмна реалізація є як теоретичної, так практично важливою проблемою.

У статті розглянуто клас задач маршрутизації, зводяться до задачі комівояжера. Показано, що завдання оптимізації замкнутих маршрутів (завдання маршрутизації), які є важливою частиною транспортної логістики, займають за підтримки сучасними інформаційними технологіями ключові позиції в управлінні процесами переміщення вантажів і пасажирів. Очевидна особливість, яка об'єднує розглянутий список завдань маршрутизації (симетрична задача комівояжера, задача про упаковку в контейнери, завдання про шкільному автобусі) полягає в тому, що вони формулюються як узагальнення або варіанти NP-повної задачі комівояжера з обмеженнями, які звужують область допустимих рішень. Найсильніші з обмежень стають недостатніми умовами можливості розв'язання, стимулюючи інтерес до дослідження задач комбінаторної оптимізації, пов'язаних із завданням комівояжера.

Ключові слова: комбінаторна оптимізація, транспортна логістика, задача маршрутизації, задача комівояжера, маршрути, цільова функція.

Overview of routing tasks reducible to the traveling salesman problem

The solution to the problem of improving the management of the transport process depends not only on the level of modernization of vehicles and the degree of use of modern information technologies, but also on the choice of routes that reduce the cost of transporting goods and passengers. Actual working conditions of vehicles in road networks put forward a number of tasks for optimizing closed routes, which are based on the classic routing problem (VRP - Vehicle Routing Problem).

VRP is one of the generalizations of the hard-to-solve traveling salesman problem. The traveling salesman task is NP-complete. It refers to the main tasks of combinatorial optimization and, forming a continuously replenished set of applications and generalizations, remains an urgent research topic. An exact solution to the traveling salesman problem can be found only by reducing the enumeration of the type of branches and boundaries, which are not always applicable in operational planning by vehicle traffic. Therefore, the development of new and improvement of currently known methods for solving routing problems, reducible to the traveling salesman problem, and their software implementation is both a theoretical and practically important problem.

The article considers the class of routing problems reducible to the traveling salesman problem. It is shown that optimization tasks for closed routes (routing problems), which are an important part of transport logistics, occupy key positions in the management of the processes of moving goods and passengers with the support of modern information technologies. An obvious feature that combines the considered list of routing problems (the symmetric traveling salesman problem, the problem of packing in containers, the school bus problem) is that they are formulated as generalizations or variants of the NP-complete traveling salesman problem with restrictions that narrow the scope of feasible solutions. The strongest restrictions become insufficient solvability conditions, stimulating interest in the study of combinatorial optimization problems associated with the traveling salesman problem.

Keywords: combinatorial optimization, transport logistics, routing problem, traveling salesman problem, routes, objective function.

Сведения об авторах:

Маций Ольга Борисовна – кандидат технических наук, доцент кафедры компьютерных технологий и мехатроники Харьковского национального автомобильно-дорожного университета

ул. Ярослава Мудрого, 25, Харьков, Украина, 61002

Тел: 0671039312, e-mail: olga.matsiy@gmail.com

ORCID ID: 0000-0002-1350-9418

About the Authors:

Matsiy Olha – Candidate of Engineering Sciences, Associate Professor of Computer Technologses and Mechatronics Departmen Kharkiv National Futomobile and Hiqhway University

Str.Yaroslava Mudrogo, 25, Kharkov, Ukraine, 61002

Tel: 0671039312, e-mail: olga.matsiy@gmail.com

ORCID ID: 0000-0002-1350-9418