

УДК 517.9; 539.3

doi: 10.32620/aktt.2025.5.02

Ю. О. КРАШАНИЦЯ

*Національний аерокосмічний університет**«Харківський авіаційний інститут», Харків, Україна*

КОНСЕРВАТИВНІ КРАЙОВІ ЗАДАЧІ ТЕОРІЇ ПРУЖНОСТІ ТА ІНТЕГРАЛЬНІ ПРЕДСТАВЛЕННЯ РОЗВ'ЯЗКІВ

Предметом дослідження є математична модель рівноваги твердого тіла задовільної просторової форми при зовнішньому навантаженні. Розвиток механіки твердого тіла значною мірою пов'язаний з практичними цілями — розрахунками елементів конструкцій та деталей машин на міцність, під порушенням якої зазвичай розуміють досягнення такого стану, коли змінюються конструктивні властивості виробу та стає непридатним для експлуатації. Багаторічні дослідження системи диференціальних рівнянь у частинних похідних законів рівноваги механіки, відомої як система рівнянь Нав'є-Ламе, в силу своєї складності до дійсного часу не набула того розвитку, який би гарантував можливості одержання аналітичних розв'язків. Саме з цієї нагоди викликає багато питань та непорозумінь щодо розв'язків крайових задач за допомогою широко розповсюджених пакетів прикладних програм, побудованих на базі скінченно-різницевого підходу. Метою статті є представлення результатів розробки альтернативного методу граничних інтегральних рівнянь, який в силу граничних умов деформації суцільного середовища призводить до системи лінійних граничних інтегральних рівнянь з наявною єдиністю розв'язків. Завдання: побудова інтегральних представлень розв'язків системи диференціальних рівнянь законів рівноваги твердого деформованого тіла методом узагальненої теорії потенціалу для диференціальних операторів консервативних форм відповідних рівнянь, які базуються на загальних законах збереження механіки суцільних середовищ. Наукова новизна. Розвинуто та узагальнено диференціальні операції векторно-тензорного аналізу. Доведено узагальнені інтегральні теореми для диференціальних операторів другого порядку адекватних законам рівноваги деформованого твердого тіла. Отримані результати. На основі створеного узагальненого апарату векторно-тензорного аналізу побудовано аналітичні розв'язки у вигляді інтегральних представлень основних кінематичних характеристик задачі деформування твердого тіла задовільної просторової форми. Висновки. Крайова задача рівноваги деформованого твердого тіла за наявності зовнішньої сили приведена до системи лінійних граничних інтегральних рівнянь відносно кінематичних характеристик задачі. Окрім того, вперше доведено, що всі одержані характеристики пов'язані від, вперше одержаного, векторного потенціалу імпульса, що суттєво спрощує інтегральні представлення розв'язків та числову реалізацію відповідних інтегральних рівнянь.

Ключові слова: рівновага деформованого твердого тіла; рівняння Нав'є-Ламе; узагальнений векторно-тензорний аналіз; векторний потенціал; граничні інтегральні рівняння.

Вступ

Механіка твердого тіла, що деформується, будучи однією з глав загальної механіки, вивчає рух і рівновагу твердих тіл [1, 2]. Відмінність між твердими тілами і рідинами представляється інтуїтивно ясным, проте чітку межу часто провести важко. Наприклад, при прокатці розжареного металевого листа між валками прокатного стану метал знаходиться в стані пластичного перебігу і термін «тверде тіло» по відношенню до нього має досить умовний характер. Тому дати визначення того, що називається твердим тілом, важко, так, мабуть, неможливо. Тому термін «механіка твердого тіла» належить швидше методу дослідження, ніж його об'єкту.

Однією з ідеалізацій твердого тіла є властивість ідеальної пружності [3]. Ідеальна пружність є здатність тіла, що дістало деформацію, після усунення причин, що її викликали, повністю відновити свою форму. Робота, витрачена зовнішніми силами на переміщеннях точок їх застосування, приймається тілом у оборотній формі - у формі накопичення в ньому пружної енергії, що дорівнює за величиною роботі зовнішніх сил.

Таким чином, ідеально пружне тіло виконує перший закон термодинаміки про збереження енергії в ізолюваній системі. Здатність ідеально пружного тіла не залишати на собі ніякого сліду від минулих навантажень призводить до того, що таке тіло завжди має форму, що залежить тільки від тих навантажень, які в даний момент діють на тіло, і не



[Creative Commons Attribution
NonCommercial 4.0 International](https://creativecommons.org/licenses/by-nc/4.0/)

залежить від того, як ці навантаження зростали.

Всі матеріали до певної міри мають властивість пружності, якщо зовнішні сили, що викликають деформацію елемента конструкції, не перевищують певної межі.

Отже, теорія пружності вивчає дію сил на пружні тіла і визначає напруги і деформації, що виникають при цьому, як у стані рівноваги, так і в стані руху [2, 3].

Розвиток механіки твердого тіла значною мірою пов'язаний з практичними цілями – розрахунками елементів конструкцій і деталей машин на міцність, під порушенням якої зазвичай розуміють досягнення такого стану, коли змінюються конструктивні властивості виробу, коли воно стає непридатним для експлуатації. Початкові відомості про засоби розрахунку на міцність викладаються в навчальній дисципліні «Опір матеріалів». Точніші та суворіші методи, що дозволяють проводити подібні розрахунки, вивчаються спеціальними науковими дисциплінами — теорією пружності, теорією пластичності, теорією повзучості, механікою руйнування тощо.

Оскільки властивості тіл дуже різноманітні, то механіка замінює реальні тіла деякими ідеалізованими об'єктами, механічними моделями. Механічні теорії мають, зазвичай, феноменологічний характер. Це означає, що в їх основу покладаються факти дослідного походження, причому факти, здобуті в результаті так званого макроексперименту, в ході якого вимірюються сили та переміщення. Використовуючи дослідні дані, поведінку матеріалу при деформуванні описують за допомогою рівнянь, які називаються визначальними рівняннями (співвідношеннями).

Іншу групу рівнянь представляють системи диференціальних рівнянь у часткових похідних, що описують деформування твердих тіл, побудова яких є суто геометричною проблемою і не залежить від поведінки матеріалу. Вирішення цих рівнянь пов'язане із задоволенням умов рівноваги, нерозривності переміщень та граничних умов.

Сукупність всіх зазначених рівнянь є математична модель деформованого твердого тіла [2, 3]. Взагалі кажучи, це деяка наближена теорія деформування, причому мається на увазі, що може бути кілька варіантів теорії, що мають різні рівні похибок.

Основне завдання щодо різних явищ полягає у побудові математичної моделі. Після цього властивості моделі (існування і єдиність рішення, методи вирішення, тощо) досліджуються суто математичними методами. У зв'язку з цим постає питання: як слід ставитися до математично суворих розв'язків наближених, по суті, рівнянь? Чи слід до

них прагнути, якщо їх точність перевершує точність моделі?

Відповідь на ці питання може бути лише позитивною. По-перше, отримати математично суворий розв'язок свідомо наближених рівнянь, що ґрунтуються іноді на дуже грубих фізичних припущеннях, не складніше, ніж наближене; по-друге, точні розв'язки окремих задач, відповідних певної конкретної моделі, зазвичай проливають світло на характерні особливості моделі загалом, будучи свого роду еталонами, що сприяють побудові наближених розв'язків складніших задач цього класу.

1. Основні гіпотези та принципи механіки деформованого твердого тіла

Класична теорія пружності зберігає своє почесне місце в науці про поведінку твердого тіла, що деформується. Успіхи та завоювання теорій пластичності, повзучості, пружно-в'язкого середовища, руйнування твердих тіл не заступають значення методів теорії пружності для обґрунтування прийомів розрахунку напруженого стану в будівельних спорудах та машинах, що становлять істотну частину наук про опір матеріалів та будівельної механіки.

Одним з основних принципів механіки твердого тіла, що деформується, є гіпотеза суцільності [3]. За цією гіпотезою тіло, безперервне до деформації, залишається безперервним і після деформації, безперервним залишається будь-який об'єм тіла, в тому числі і елементарний. Тобто середовище є суцільним, якщо будь-який виділений з нього обсяг має масу. У зв'язку з цим переміщення точок вважаються безперервними функціями координат.

Отже, не враховується дискретна, тобто, атомистична структура речовини. Очевидно, що це припущення суперечить дійсності, оскільки реальні матеріали завжди мають характерну структуру, а також дефекти у вигляді порожнин, тріщин тощо.

Відмова від дискретної схеми будови речовини і перехід до гіпотези про суцільне, тобто безперервне середовище (механіка континууму) обумовлені винятковими математичними труднощами, пов'язаними з дискретною схемою, а також відсутністю багатьох фізичних постійних, без яких теоретичне дослідження неможливе. Континуальний розгляд дозволяє використовувати повну потужність добре розвинутого математичного апарату безперервних функцій.

Наступним принципом механіки твердого тіла є принцип макроскопічної визначальності, за яким малої околиці точки суцільного середовища може

бути однозначно поставлене у відповідність тіло кінцевих розмірів – спеціальний зразок. Це дає можливість експериментально перевіряти результати теоретичних досліджень, а також приписувати матеріальній точці механічні та фізичні властивості цілого зразка.

Важливою гіпотезою, що служить для математичного опису дії внутрішніх сил у тілі, що деформується, є принцип напруг Ейлера і Коші: у кожному поперечному перерізі, подумки проведеному всередині тіла, має місце взаємодія сил такого ж характеру, як і характер розподілених по поверхні навантажень.

Звідси випливає, що напружений стан в точці тіла, що деформується, визначається внутрішніми силами і деформацією в цій точці і не залежить від напружено-деформованого стану в сусідніх точках. Це означає, що градієнт напруги не впливає на міцність матеріалу в цій точці (принцип автономної міцності).

Наступною гіпотезою є гіпотеза про природний ненапружений стан тіла. Відповідно до неї існуючі до додатку поверхневих навантажень початкові напруги в тілі, характер і величина яких залежать від історії виникнення тіла, вважаються рівними нулю. Звідси зумовлені напруги є фактичними напругами у тілі, а становлять лише приріст напруг у аналізованих точках.

Зазначимо, що зневага в технічних розрахунках початковими напругами, так само як і не облік відступів у структурі матеріалів від ідеальної суцільності, частково компенсується тим, що встановлення основних механічних характеристик матеріалу і пов'язане з ними визначення норми напруг, що допускаються експериментально, виконуються також без урахування початкових напруг і нерівномірності заповнення об'єму.

Велика кількість завдань вирішується з використанням принципу локальності ефекту самоурівноважених зовнішніх навантажень принципу Сен-Венана [3]. Відповідно до цього принципу, якщо в будь-якій малій частині тіла прикладена врівноважена система сил, то вона викликає в тілі напруги, що дуже швидко зменшуються в міру віддалення від цієї точки (експоненційний характер згасання напруги). Тому можлива локальна заміна однієї врівноваженої системи сил на іншу.

Принцип локальності можна висловити інакше: у точках твердого тіла, досить віддалених від місць застосування зовнішніх навантажень, напруги дуже мало залежить від детального способу здійснення цих навантажень.

Для вивчення закону розподілу в області, що лежить у безпосередній близькості до місця

застосування зосереджених або майже зосереджених навантажень, становлять особливі завдання теорії пружності контактні задачі.

Часто використовується припущення про ізотропність матеріалу, під якою розуміється, що фізико-механічні властивості однакові за всіма напрямками, проведеними з цієї точки матеріалу, і будь-яку площину, що проходить через частинку, можна розглядати як площину симетрії для неї. Іншими словами, властивості зразків, вирізаних із матеріалів, не залежать від їхньої орієнтації. Вважаючи, що властивості частинок матеріалу не залежать від їхнього розташування, отримуємо поняття однорідного ізотропного тіла.

Нарешті, у багатьох розділах механіки твердого тіла, що деформується, приймається, що переміщення точок тіла малі в порівнянні з лінійними розмірами тіла. Звідси відносні подовження і зрушення, і навіть кути повороту зневажливо малі проти одиницю. Крім того, квадрати кутів повороту зневажливо малі в порівнянні з відносними подовженнями та зсувами. Дана пропозиція означає, що розглядаються істотно тривимірні тіла, зміною граничних поверхонь яких нехтують, і існує можливість лінеаризації рівнянь, що визначають геометричні властивості тіла, що деформується.

2. Математична модель теорії пружності

Теорія пружності - розділ механіки суцільних середовищ, що вивчає деформації пружних твердих тіл, їх поведінка при статичних та динамічних навантаженнях.

Головне завдання теорії пружності - з'ясувати, які будуть деформації тіла і як вони змінюватимуться з часом при заданих зовнішніх впливах. Основною системою рівнянь для вирішення цього завдання є три рівняння рівноваги, що містять шість невідомих компонентів симетричного тензора напруги. Симетричність тензора напруг постулюється гіпотезою парності дотичних напруг. Для замикання системи використовують так звані рівняння спільності деформацій (дійсно, для тіла, що залишається в процесі деформації суцільним, є компоненти тензора деформації, які не можуть бути незалежними - ці компоненти виражаються через три функції - складові переміщення точки тіла: симетричні співвідношення Коші). Шість рівнянь спільності деформацій та рівняння узагальненого закону Гука замикають завдання теорії пружності [3].

Теорія пружності є фундаментом інженерної справи та архітектури. Крім очевидних статичних задач (стійкість будівель та інших споруд, міцність транспортних засобів), теорія пружності залучається і для вирішення динамічних задач (наприклад, стійкість конструкцій при землетрусах та під дією потужних звукових хвиль; вібростійкість різних апаратів та установок). Теорія пружності тут перетинається з матеріалознавством і є одним з опорних пунктів при пошуку нових матеріалів. Теорія пружності важлива і для сейсмозвідки.

Теоретично пружності, як і у загальній механіці суцільних середовищ, математична модель формулюється як початково-крайових чи крайових задач.

2.1. Поле швидкостей суцільного середовища навколо точки. Перша теорема Гельмгольца

Для докладного дослідження навоколишнього середовища застосовується звичайний прийом математичного аналізу - розгляд в даний момент часу поля швидкостей в околиці деякої точки $M(x, y, z)$ простору.

Розкладемо проекції швидкості V' (u' , v' , w') будь-якої частинки $M'(x', y', z')$, що рухається в околиці точки M , у статичний ряд за скільки завгодно малим збільшенням декартових координат і з точністю до нескінченно малих першого порядку отримаємо

$$\begin{aligned} u' &= u + \frac{\partial u}{\partial x}(x' - x) + \frac{\partial u}{\partial y}(y' - y) + \frac{\partial u}{\partial z}(z' - z), \\ v' &= v + \frac{\partial v}{\partial x}(x' - x) + \frac{\partial v}{\partial y}(y' - y) + \frac{\partial v}{\partial z}(z' - z), \\ w' &= w + \frac{\partial w}{\partial x}(x' - x) + \frac{\partial w}{\partial y}(y' - y) + \frac{\partial w}{\partial z}(z' - z), \end{aligned} \quad (2.1)$$

Тут всі величини без штриха являють собою задані параметри, проекції швидкості u' , v' , w' точки M , що розглядається, з точністю до нескінченно малих величин першого порядку є лінійними функціями приростів координат $x' - x$, $y' - y$, $z' - z$ у точці M' щодо точки M (рис. 2.1).

Виділимо із загального поля швидкостей (3.1) поле, що відповідає окремому випадку руху рідини – руху її як твердого тіла, або, коротше, квазітвердому її руху. З цією метою перетворимо вхідні у праві частини рівностей (2.1) похідні від проекцій швидкості за координатами наступним тогочинним чином:

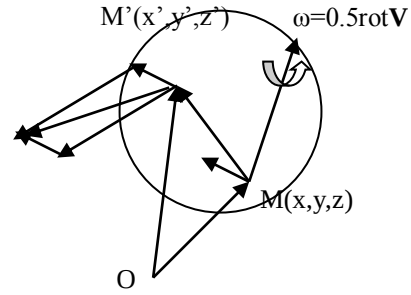


Рис. 2.1. Поле швидкостей навколо точки у суцільному середовищі

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial y} &= \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial x} \right); \\ \frac{\partial u}{\partial z} &= \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} \right) + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial x} \right); \\ \frac{\partial v}{\partial x} &= \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \right) + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} \right); \\ \frac{\partial v}{\partial z} &= \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} \right) + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial y} \right); \\ \frac{\partial w}{\partial x} &= \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z} \right) + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial z} \right); \\ \frac{\partial w}{\partial y} &= \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial z} \right) + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial z} \right). \end{aligned} \quad (2.2)$$

З метою подальшого досконалого аналізу руху суцільного середовища, уведемо на розгляд тензор другого рангу

$$\nabla V = \begin{vmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial x} & \frac{\partial w}{\partial x} \\ \frac{\partial u}{\partial y} & \frac{\partial v}{\partial y} & \frac{\partial w}{\partial y} \\ \frac{\partial u}{\partial z} & \frac{\partial v}{\partial z} & \frac{\partial w}{\partial z} \end{vmatrix} = \mathbf{i} \frac{\partial u}{\partial x} + \mathbf{j} \frac{\partial u}{\partial y} + \mathbf{k} \frac{\partial u}{\partial z}. \quad (2.3)$$

Тензору (2.3) поставимо у відповідність сполучений тензор

$$\nabla^* V = \begin{vmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial u}{\partial y} & \frac{\partial u}{\partial z} \\ \frac{\partial v}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial y} & \frac{\partial v}{\partial z} \\ \frac{\partial w}{\partial x} & \frac{\partial w}{\partial y} & \frac{\partial w}{\partial z} \end{vmatrix} = \mathbf{i} \nabla u + \mathbf{j} \nabla v + \mathbf{k} \nabla w \quad (2.4)$$

і виконаємо операцію розкладання тензора у (2.1) на симетричну та антисиметричну частини:

$$\begin{aligned} \mathbf{V}'(\mathbf{M}') &= \mathbf{V}(\mathbf{M}) + \frac{1}{2} \left((\mathbf{r}' - \mathbf{r}), (\nabla \mathbf{V} - \nabla^* \mathbf{V}) \right) + \\ &+ \frac{1}{2} \left((\mathbf{r}' - \mathbf{r}), (\nabla \mathbf{V} + \nabla^* \mathbf{V}) \right) = \\ &= \mathbf{V}(\mathbf{M}) + ((\mathbf{r}' - \mathbf{r}), \mathbf{R}) + ((\mathbf{r}' - \mathbf{r}), \mathbf{D}), \end{aligned} \quad (2.5)$$

де антисиметричний тензор

$$\begin{aligned} \mathbf{R} &= \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} \right) & \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial z} \right) \\ \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial x} \right) & 0 & \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial z} \right) \\ \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial x} \right) & \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial y} \right) & 0 \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} \omega_z & -\frac{1}{2} \omega_y \\ -\frac{1}{2} \omega_z & 0 & \frac{1}{2} \omega_x \\ \frac{1}{2} \omega_y & -\frac{1}{2} \omega_x & 0 \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (2.6)$$

відповідає обертовому руху навколо полюса, а симетричний, званий тензором швидкостей деформацій,

$$\mathbf{D} = \begin{pmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \right) & \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z} \right) \\ \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) & \frac{\partial v}{\partial y} & \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial z} \right) \\ \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} \right) & \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} \right) & \frac{\partial w}{\partial z} \end{pmatrix} \quad (2.7)$$

- деформаційному [4].

З рівняння (2.5) випливає *перша теорема Гельмгольца*: будь-який рух елементарного об'єму суцільного середовища можна в даний момент часу подати як результат складання двох рухів: квазітвердого, що складається з поступального разом з обраним полюсом і обертового навколо полюса, і деформаційного.

Позначимо:

$$\begin{aligned} \varepsilon_{xx} &= \frac{\partial u}{\partial x}; \quad \varepsilon_{xy} = \varepsilon_{yx} = \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right); \\ \varepsilon_{yy} &= \frac{\partial v}{\partial y}; \quad \varepsilon_{yz} = \varepsilon_{zy} = \left(\frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} \right); \\ \varepsilon_{zz} &= \frac{\partial w}{\partial z}; \quad \varepsilon_{zx} = \varepsilon_{xz} = \left(\frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z} \right). \end{aligned} \quad (2.8)$$

Введемо на розгляд псевдовектор – вихор швидкості

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\Omega} = [\nabla, \mathbf{V}] &= \mathbf{i} \left(\frac{\partial w}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial z} \right) + \mathbf{j} \left(\frac{\partial u}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial x} \right) + \mathbf{k} \left(\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} \right) = \\ &= \mathbf{i} \omega_x + \mathbf{j} \omega_y + \mathbf{k} \omega_z. \end{aligned} \quad (2.9)$$

З урахуванням (2.1) та (2.9), а також

$$\mathbf{r}' - \mathbf{r} = \{x' - x, y' - y, z' - z\} = \{\xi, \eta, \varsigma\}$$

переміщення $d\mathbf{p} = (\mathbf{V}' - \mathbf{V})dt$ можна записати у вигляді

$$\begin{aligned} d\xi &= \left[\varepsilon_{xx}\xi + \varepsilon_{xy}\eta + \varepsilon_{xz}\varsigma + \frac{1}{2}(\Omega_y\varsigma - \Omega_z\eta) \right] dt; \\ d\eta &= \left[\varepsilon_{yx}\xi + \varepsilon_{yy}\eta + \varepsilon_{yz}\varsigma + \frac{1}{2}(\Omega_z\xi - \Omega_x\varsigma) \right] dt; \\ d\varsigma &= \left[\varepsilon_{zx}\xi + \varepsilon_{zy}\eta + \varepsilon_{zz}\varsigma + \frac{1}{2}(\Omega_x\eta - \Omega_y\xi) \right] dt. \end{aligned} \quad (2.10)$$

Квадратичну форму

$$\Phi = \frac{1}{2} \left(\varepsilon_{xx}\xi^2 + \varepsilon_{yy}\eta^2 + \varepsilon_{zz}\varsigma^2 + 2\varepsilon_{xy}\xi\eta + 2\varepsilon_{xz}\xi\varsigma + 2\varepsilon_{yz}\eta\varsigma \right)$$

зручно переписати у пронумерованих координатах

$$\Phi = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^3 \sum_{k=1}^3 \varepsilon_{ik} \xi_i \xi_k, \quad (2.11)$$

де $\xi_1 = \xi, \xi_2 = \eta, \xi_3 = \varsigma, \varepsilon_{ik} = \varepsilon_{\xi_i \xi_k}$.

Таким чином, замість (2.10) маємо у координатній формі

$$d\xi_i = \left\{ \frac{\partial \Phi}{\partial \xi_i} + \frac{1}{2} [\boldsymbol{\Omega}, \mathbf{r}]_i \right\} dt \quad (i = 1, 2, 3), \quad (2.12)$$

або у векторній формі

$$d\mathbf{p} = \left\{ \nabla \Phi + \frac{1}{2} [\boldsymbol{\Omega}, \mathbf{r}] \right\} dt. \quad (2.13)$$

Порівнюючи вирази (2.5) та (2.13), отримуємо формулу

$$\mathbf{V}'(\mathbf{M}') = \mathbf{V}(\mathbf{M}) + \frac{1}{2} [\boldsymbol{\Omega}, \mathbf{r}] + \nabla \Phi. \quad (2.14)$$

2.2. Рівновага пружного тіла та його математична модель

Якщо фізична точка тіла P внаслідок деформації зайняла нове положення у просторі P' , то вектор переміщення позначається PP' з компонентами (u_x, u_y, u_z) , або, скорочено u_i . У теорії малих деформацій компоненти u_i і вважаються малими величинами (суворо кажучи,

нескінченно малими). Компоненти тензора, який також називається тензором деформації Коші або лінійний тензор деформації та вектора u_i , пов'язані залежностями:

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2}(u_{i,j} + u_{j,i}) = \begin{vmatrix} \varepsilon_{xx} & \varepsilon_{xy} & \varepsilon_{xz} \\ \varepsilon_{yx} & \varepsilon_{yy} & \varepsilon_{yz} \\ \varepsilon_{zx} & \varepsilon_{zy} & \varepsilon_{zz} \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}\right) & \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x}\right) \\ \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y}\right) & \frac{\partial v}{\partial y} & \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y}\right) \\ \frac{1}{2}\left(\frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z}\right) & \frac{1}{2}\left(\frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial z}\right) & \frac{\partial w}{\partial z} \end{vmatrix}. \quad (2.15)$$

З останнього запису видно, що, тому тензор деформації є симетричним за визначенням.

Якщо пружне тіло під впливом зовнішніх сил перебуває у рівновазі (тобто швидкості всіх його точок дорівнюють нулю), то рівноваги перебуває і його частина, яку подумки можна з нього виділити. З тіла виділяється нескінченно малий прямокутний тетраедр, грані якого паралельні координатним площинам декартової системи (рис. 2.2).

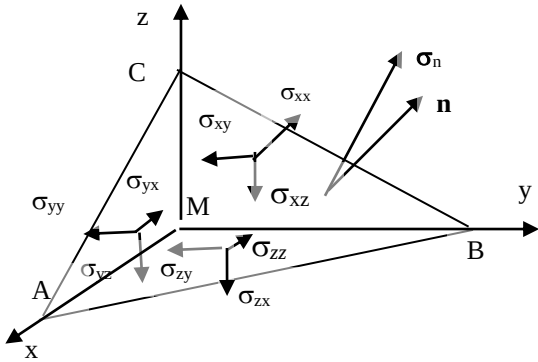


Рис. 2.2. Рівновага елементарного тетраедра у суцільному середовищі

З умови рівноваги тетраедра з розмірами ребер dx , dy , dz , розглянувши умови рівноваги сил у проєкціях, можна отримати:

$$\frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_{xz}}{\partial z} + F_x = 0;$$

$$\frac{\partial \sigma_{yx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{yy}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_{yz}}{\partial z} + F_y = 0; \quad (2.16)$$

$$\frac{\partial \sigma_{zx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{zy}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_{zz}}{\partial z} + F_z = 0.$$

Аналогічно виходять рівняння рівноваги, що виражають рівність нулю головного моменту всіх

сил, що діють на тетраедр, що наводяться до виду: $\sigma_{ij} = \sigma_{ji}$. Ця рівність означає, що тензор напруг є симетричним тензором і кількість невідомих компонентів тензора напруг зводиться до 6. Є лише три рівняння рівноваги, тобто рівнянь статки недостатньо для вирішення задачі. Вихід із цього стану полягає в тому, щоб висловити напругу через деформації за допомогою рівнянь закону Гука [1, 2]:

$$\begin{aligned} \sigma_{11} &= \lambda\theta + 2\mu\varepsilon_{11}, \\ \sigma_{22} &= \lambda\theta + 2\mu\varepsilon_{22}, \\ \sigma_{33} &= \lambda\theta + 2\mu\varepsilon_{33}, \\ \sigma_{12} &= 2\mu\varepsilon_{12}, \quad \sigma_{23} = 2\mu\varepsilon_{23}, \quad \sigma_{31} = 2\mu\varepsilon_{31}, \end{aligned} \quad (2.17)$$

а потім деформації виразити через переміщення u_i за допомогою формул Коші і результат підставити в рівняння рівноваги (2.16):

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x}(\lambda\theta + 2\mu\varepsilon_{xx}) + 2\mu \frac{\partial \varepsilon_{xy}}{\partial y} + 2\mu \frac{\partial \varepsilon_{xz}}{\partial z} + F_x &= 0; \\ 2\mu \frac{\partial \varepsilon_{yx}}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y}(\lambda\theta + 2\mu\varepsilon_{yy}) + 2\mu \frac{\partial \varepsilon_{yz}}{\partial z} + F_y &= 0; \quad (2.18) \\ 2\mu \frac{\partial \varepsilon_{zx}}{\partial x} + 2\mu \frac{\partial \varepsilon_{zy}}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial z}(\lambda\theta + 2\mu\varepsilon_{zz}) + F_z &= 0. \end{aligned}$$

При цьому виходить система трьох диференціальних рівнянь рівноваги щодо трьох невідомих функцій u , v , w , тобто число невідомих, буде відповідати числу рівнянь. Ці рівняння називаються рівняннями Нав'є-Коші:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x}\left(\lambda\theta + 2\mu \frac{\partial u}{\partial x}\right) + \mu \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}\right) + \mu \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x}\right) + F_x &= 0; \\ \mu \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(\lambda\theta + 2\mu \frac{\partial v}{\partial y}\right) + \mu \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y}\right) + F_y &= 0; \\ \mu \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x}\right) + \mu \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y}\right) + \frac{\partial}{\partial z}\left(\lambda\theta + 2\mu \frac{\partial w}{\partial z}\right) + F_z &= 0, \end{aligned}$$

які відомі також як рівняння Ламе [3, 4], допускають векторну форму запису:

$$\begin{aligned} (\lambda + \mu)\nabla(\nabla, \mathbf{u}) + \mu\Delta\mathbf{u} + \mathbf{F} &= 0 \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow \left(\nabla, \left\{(\lambda + \mu)\nabla^* \mathbf{u} + \mu\nabla\mathbf{u}\right\}\right) + \mathbf{F} &= 0, \end{aligned} \quad (2.19)$$

де λ , μ – параметри Ламе [3].

Якщо припустити існування потенціалу зовнішніх сил $\mathbf{F} = \nabla f = (\nabla, \mathbf{If})$, то тоді, виходячи з

(2.19), можливо стверджувати, що для консервативного тензора $\mathbf{T}$ існує векторний потенціал Ψ такий, що:

$$\mathbf{T} = (\lambda + \mu) \nabla^* \mathbf{u} + \mu \nabla \mathbf{u} + \mathbf{I} f = [\nabla, [\mathbf{I}, \Psi]]. \quad (2.20)$$

Існує розвинений апарат векторно-тензорного аналізу [5], що дозволяє вирішувати широкий спектр консервативних крайових задач шляхом граничних інтегральних рівнянь. Але координатні складові тензора (2.20) не є консервативними. З іншого боку, якщо систему (2.19) записати у вигляді:

$$\begin{aligned} (\lambda + \mu) \left(\nabla, \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial x} \right) + \mu (\nabla, \nabla \mathbf{u}) + (\nabla, \mathbf{I} f) &= 0; \\ (\lambda + \mu) \left(\nabla, \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial y} \right) + \mu (\nabla, \nabla \mathbf{v}) + (\nabla, \mathbf{J} f) &= 0, \end{aligned} \quad (2.21)$$

$$(\lambda + \mu) \left(\nabla, \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial z} \right) + \mu (\nabla, \nabla \mathbf{w}) + (\nabla, \mathbf{K} f) = 0,$$

то вектори

$$\begin{aligned} \mathbf{T}_x &= (\lambda + \mu) \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial x} + \mu \nabla \mathbf{u} + \mathbf{I} f = \\ &= [\nabla, [\mathbf{I}, \Psi]] = [\mathbf{j}, \nabla \Psi_z] - [\mathbf{k}, \nabla \Psi_y]; \\ \mathbf{T}_y &= (\lambda + \mu) \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial y} + \mu \nabla \mathbf{v} + \mathbf{J} f = \\ &= [\nabla, [\mathbf{J}, \Psi]] = [\mathbf{k}, \nabla \Psi_x] - [\mathbf{i}, \nabla \Psi_z]; \\ \mathbf{T}_z &= (\lambda + \mu) \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial z} + \mu \nabla \mathbf{w} + \mathbf{K} f = \\ &= [\nabla, [\mathbf{K}, \Psi]] = [\mathbf{i}, \nabla \Psi_y] - [\mathbf{j}, \nabla \Psi_x]; \end{aligned} \quad (2.22)$$

є консервативними, котрим відповідає векторний потенціал Ψ . Крім цього, вектори з (2.22) володіють наступними властивостями:

$$\begin{aligned} (\mathbf{i}, \mathbf{T}_x) + (\mathbf{j}, \mathbf{T}_y) + (\mathbf{k}, \mathbf{T}_z) &\Rightarrow \\ \Rightarrow (\lambda + 2\mu)(\nabla, \mathbf{u}) + 3f &= 2(\nabla, \Psi); \\ [\mathbf{i}, \mathbf{T}_x] + [\mathbf{j}, \mathbf{T}_y] + [\mathbf{k}, \mathbf{T}_z] &\Rightarrow \lambda [\nabla, \mathbf{u}] = -[\nabla, \Psi]. \end{aligned} \quad (2.23) \quad (2.24)$$

Таким чином, вектор переміщень $\mathbf{u}$ та векторний потенціал Ψ нерозривно пов'язані між собою і є розв'язаннями системи рівнянь:

$$\begin{cases} (\nabla, \{(\lambda + 2\mu)\mathbf{u} - 2\Psi\}) = -3f; \\ [\nabla, (\lambda \mathbf{u} + \Psi)] = 0. \end{cases} \quad (2.25)$$

Рівняння системи (2.25) ставляться до класу диференціальних рівнянь із самосполученими диференціальними операторами видів:

$\nabla(\nabla, \dots); [\nabla, [\nabla, \dots]]$, на вирішення яких може бути запропонований метод граничних інтегральних рівнянь, досить повною мірою розвинений у роботі [5].

3. Узагальнений апарат векторно-тензорного аналізу та фундаментальні розв'язки диференціальних операторів

Теоретичне вивчення фізичних процесів засновано на побудові несуперечливій фізичним законам відповідної математичної моделі. В механіці суцільних середовищ основним математичним апаратом є векторно-тензорний аналіз. Але поряд з існуючими результатами в даному випадку виникає природна потреба в значному узагальненні класичних формул та теорем.

3.1. Диференціальні операції векторно-тензорного аналізу у просторовому та плоскому випадках

На початку треба ввести в розгляд стандартну тензорну одиницю, яка у декартовому базисі має вигляд:

$$\mathbf{I} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \mathbf{i}\mathbf{i} + \mathbf{j}\mathbf{j} + \mathbf{k}\mathbf{k}. \quad (3.1)$$

Для подальшого розвитку методу граничних інтегральних рівнянь розв'язання крайових задач теорії пружності мають місце, доведені в [5], наступні узагальнені диференціальні операції векторно-тензорного аналізу у разі, коли функції $\phi(x, y, z)$ та складові векторів $\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{G}(x, y, z)$ мають необхідні диференціальні властивості у фізичному просторі:

$$(\nabla, (\mathbf{I}\phi)) = \nabla\phi; \quad (3.2_1)$$

$$\nabla, \mathbf{I}\mathbf{G} = \nabla, \mathbf{G}; \quad (3.2_2)$$

$$[\nabla, \mathbf{I}\phi] = [\mathbf{I}, \nabla\phi]; \quad (3.2_3)$$

$$[\nabla, \mathbf{I}\mathbf{G}] = \nabla^* \mathbf{G} - \mathbf{I} \nabla, \mathbf{G}; \quad (3.2_4)$$

$$[\mathbf{I}, \nabla, \mathbf{G}] = \nabla^* \mathbf{G} - \nabla \mathbf{G}; \quad (3.2_5)$$

$$\nabla \nabla, \mathbf{G} = \nabla, \nabla^* \mathbf{G}; \quad (3.2_6)$$

де $\nabla \mathbf{G}, \nabla^* \mathbf{G}$ - тензори (2.3, 2.4).

Деякі диференціальні операції з двома векторно-тензорними функціями дещо відрізняються від класичних [4, 5], завдяки можливості присутності тензора $\mathbf{B}$. Так

$$\nabla \mathbf{A}, \mathbf{B} = \nabla \mathbf{A}, \mathbf{B} + \mathbf{A}, \nabla^* \mathbf{B}; \quad (3.3)$$

$$\begin{aligned} [\nabla, \mathbf{A}, \mathbf{B}] &= \nabla^* \mathbf{A}, \mathbf{B} - \nabla, \mathbf{A} \mathbf{B} + \\ &+ \mathbf{A} \nabla, \mathbf{B} - \mathbf{A}, \nabla \mathbf{B}; \end{aligned} \quad (3.4_1)$$

$$[\nabla, (\mathbf{A}\varphi)] = [\nabla, \mathbf{A}]\varphi - [\mathbf{A}, \nabla\varphi]; \quad (3.4_2)$$

$$(\nabla, (\mathbf{A}\varphi)) = (\nabla, \mathbf{A})\varphi + (\mathbf{A}, \nabla\varphi). \quad (3.4_3)$$

До речі, тензорні оператори (3.4) володіють майже очевидною властивістю при участі векторів $\mathbf{A}$ та $\mathbf{B}$:

$$\mathbf{A}, \mathbf{B}, \nabla \mathbf{G} = \mathbf{B}, \mathbf{A}, \nabla^* \mathbf{G}. \quad (3.4_4)$$

3.2. Узагальнені інтегральні теореми векторно-тензорного аналізу

Всі відомі інтегральні представлення розв'язків класичних крайових задач математичної фізики ґрунтуються на інтегральних теоремах векторного аналізу відомих як теореми Остроградського-Гаусса та Стокса-Гріна [2, 4].

По-перше, *теорема Остроградського-Гаусса*

$$\iiint_{(E)} (\nabla, \mathbf{A}) dE = \sum_{i=1}^K \oint_{(S_i)} (\mathbf{n}_i, \mathbf{A}) dS_i, \quad (3.5_1)$$

де K – кількість замкнених поверхнею (S_i) у (E) , а $\mathbf{n}_i$ – зовнішня нормаль до (S_i) ; з використанням формул (3.2), може бути застосована у декількох видах з урахуванням алгебраїчних дій з тензорними функціями:

$$\iiint_{(E)} \nabla\varphi dE = \iiint_{(E)} (\nabla, \mathbf{I}\varphi) dE = \oint_{(S)} \mathbf{n}\varphi dS; \quad (3.5_2)$$

$$\iiint_{(E)} [\nabla, \mathbf{A}] dE = \iiint_{(E)} (\nabla, [\mathbf{I}, \mathbf{A}]) dE = \oint_{(S)} [\mathbf{n}, \mathbf{A}] dS. \quad (3.5_3)$$

Теорема Остроградського-Гаусса (3.5₁) стала основою створення спектру теорем Гріна для задовільних по крайній мірі двічі диференційованих в (E) функцій u та v [3, 4].

Нехай $\mathbf{A}$ – неперервно диференційоване векторне поле в області (E) , (S) – кусково-гладка орієнтовна одиничним вектором нормалі $\mathbf{n}$ поверхня в (E) з межею $\partial S \equiv (L)$, орієнтована у відповідності з

орієнтацією поверхні. Тобто, з кінця вектора зовнішньої нормалі обхід межі ∂S поверхні (S) здійснюється проти руху стрілки годинника. Тоді має місце *теорема Стокса*

$$\oint_{(S)} (\mathbf{n}, \text{rot} \mathbf{A}) dS \equiv \oint_{(S)} (\mathbf{n}, [\nabla, \mathbf{A}]) dS = \oint_{(L)} (\mathbf{A}, d\mathbf{r}). \quad (3.6)$$

Таким чином, циркуляція поля $\mathbf{A}$ по межі поверхні $\partial S \equiv (L)$ дорівнює потоку ротора поля $\mathbf{A}$ через поверхню (S) .

На основі тих же припущень відносно векторних полів $\mathbf{A}$ та $\mathbf{B}$ теореми про градієнт (3.5₂) та ротор (3.5₃) за допомогою диференціальних операцій (3.2) узагальнюються на додатки векторів та мають вигляд:

$$\begin{aligned} \iiint_{(E)} \nabla(\mathbf{A}, \mathbf{B}) dE = \\ = \iiint_{(E)} (\nabla, \mathbf{I}(\mathbf{A}, \mathbf{B})) dE = \oint_{(S)} \mathbf{n}(\mathbf{A}, \mathbf{B}) dS; \end{aligned} \quad (3.7_1)$$

$$\begin{aligned} \iiint_{(E)} [\nabla, [\mathbf{A}, \mathbf{B}]] dV = \oint_{(S)} (\mathbf{n}, [\mathbf{I}, [\mathbf{A}, \mathbf{B}]]) dS = \\ = \oint_{(S)} \{ \mathbf{A}(\mathbf{n}, \mathbf{B}) - (\mathbf{n}, \mathbf{A})\mathbf{B} \} dS. \end{aligned} \quad (3.7_2)$$

Інтегральні теореми Гаусса-Остроградського (3.5₁) та Стокса (3.6) доцільно застосувати до операторів другого порядку з додатками векторно-тензорних величин:

$$\begin{aligned} \iiint_{(E)} (\nabla, [\nabla, [\mathbf{A}, \mathbf{B}]]) dE = \oint_{(S)} (\mathbf{n}, [\nabla, [\mathbf{A}, \mathbf{B}]]) dS = \\ = \oint_{(S)} \{ ((\mathbf{n}, (\nabla^* \mathbf{A} - \mathbf{I}(\nabla, \mathbf{A}))), \mathbf{B}) - (\mathbf{A}, (\mathbf{n}, (\nabla^* \mathbf{B} - \\ - \mathbf{I}(\nabla, \mathbf{B})))) \} dS = \oint_{(S)} \{ ((\mathbf{n}, [\nabla, [\mathbf{I}, \mathbf{A}]]), \mathbf{B}) - \\ - (\mathbf{A}, (\mathbf{n}, [\nabla, [\mathbf{I}, \mathbf{B}]]) \} dS = 0, \end{aligned} \quad (3.8_1)$$

$$\begin{aligned} \iiint_{(E)} [\nabla, \nabla(\mathbf{A}, \mathbf{B})] dE = \oint_{(S)} [\mathbf{n}, \nabla(\mathbf{A}, \mathbf{B})] dS = \\ = \oint_{(S)} \{ ([\mathbf{n}, \nabla \mathbf{A}], \mathbf{B}) + ([\mathbf{n}, \nabla \mathbf{B}^*], \mathbf{A}) \} dS = 0, \end{aligned} \quad (3.8_2)$$

де тензор

$$\begin{aligned} \mathbf{B}^* &= \mathbf{B}_x \mathbf{i} + \mathbf{B}_y \mathbf{j} + \mathbf{B}_z \mathbf{k} = \mathbf{i}(\mathbf{ib}_{xx} + \mathbf{j}b_{yx} + \mathbf{k}b_{zx}) + \\ &+ \mathbf{j}(\mathbf{ib}_{xy} + \mathbf{j}b_{yy} + \mathbf{k}b_{zy}) + \mathbf{k}(\mathbf{ib}_{xz} + \mathbf{j}b_{yz} + \mathbf{k}b_{zz}) \end{aligned}$$

- сполучений тензору $\mathbf{B}$.

Інтегральні тотожності (3.8₁, 3.8₂) також уявляють собою узагальнені формули інтегрування по частинах.

І нарешті, маємо наступні узагальнення класичної теореми Остроградського-Гаусса, пов'язаних з самосполученими диференціальними операторами другого порядку:

$$\begin{aligned} & \iiint_{(E)} \{(\nabla(\nabla, \mathbf{A}), \mathbf{B}) - (\mathbf{A}, \nabla(\nabla, \mathbf{B}))\} dE = \\ & = \iiint_{(E)} (\nabla, \{\mathbf{B}(\nabla, \mathbf{A}) - \mathbf{A}(\nabla, \mathbf{B})\}) dE = \\ & = \oiint_{(S)} \{(\mathbf{n}, \mathbf{B})(\nabla, \mathbf{A}) - (\mathbf{n}, \mathbf{A})(\nabla, \mathbf{B})\} dS; \quad (3.9) \\ & \iiint_{(E)} \{([\nabla, [\nabla, \Psi]], \Gamma) - (\Psi, [\nabla, [\nabla, \Gamma]])\} dE = \\ & = \iiint_{(E)} (\nabla, \{[\Psi, [\nabla, \Gamma]] + [[\nabla, \Psi], \Gamma]\}) dE = \quad (3.10) \\ & = \oiint_{(S)} \{([\mathbf{n}, [\nabla, \Psi]], \Gamma) - (\Psi, [\mathbf{n}, [\nabla, \Gamma]])\} dS. \end{aligned}$$

3.3. Фундаментальні розв'язки диференціальних операторів консервативних форм законів збереження

Ключову роль у методі граничних інтегральних рівнянь грають, так звані, фундаментальні розв'язки диференціальних рівнянь другого порядку, серед яких відомі такі розв'язки для рівнянь Лапласа, теплопровідності, хвильового. У цьому випадку вектор переміщень $\mathbf{u}$ та векторний потенціал Ψ нерозривно пов'язані між собою і є розв'язками системи рівнянь (2.25):

$$\begin{cases} \nabla \nabla, \lambda + 2\mu \mathbf{u} - 2\Psi + 3\nabla f = 0; \\ [\nabla, [\nabla, \lambda \mathbf{u} + \Psi]] = 0, \end{cases} \quad (3.11)$$

із самосполученими диференціальними операторами другого порядку: $\nabla \nabla, \dots; [\nabla, \nabla, \dots]$.

Розглянемо тензор другого рангу

$$\Gamma(x, y, z) = \mathbf{I}\varphi - [\mathbf{I}, \mathbf{G}] = i\Gamma_x + j\Gamma_y + k\Gamma_z \quad (3.12)$$

$$\text{із векторними складовими: } \begin{cases} \Gamma_x = i\varphi + jG_z - kG_y; \\ \Gamma_y = -iG_z + j\varphi + kG_x; \\ \Gamma_z = iG_y - jG_x + k\varphi, \end{cases}$$

де функція φ – відомий розв'язок рівняння Лапласа $\varphi(x, y, z) = 1/4\pi r$, а вектор $\mathbf{G}$, за визначенням, задовольняє рівнянню

$$(\nabla, \Gamma) = (\nabla, \{\mathbf{I}\varphi - [\mathbf{I}, \mathbf{G}]\}) = \nabla\varphi - [\nabla, \mathbf{G}] = 0. \quad (3.13)$$

Легко довести, що у декартовій системі координат вектор

$$\mathbf{G} = \frac{z - z_0}{r} \nabla \arctg \frac{y - y_0}{x - x_0} \quad (3.14)$$

існує як консервативний - $\nabla, \mathbf{G} = 0$, а

$$r = \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2}.$$

Зауважимо, що рівняння (3.13) уявляє собою просторове узагальнення відомої системи рівнянь Коші-Рімана.

Поряд з базовою властивістю (3.13), фундаментальний тензор Γ та його векторні складові володіють наступними очевидними властивостями:

$$\begin{aligned} (\nabla, \Gamma_x) &= \frac{\partial \varphi}{\partial x} + \frac{\partial G_z}{\partial y} - \frac{\partial G_y}{\partial z} = 2 \frac{\partial \varphi}{\partial x}; \\ (\nabla, \Gamma_y) &= -\frac{\partial G_z}{\partial x} + \frac{\partial \varphi}{\partial y} + \frac{\partial G_x}{\partial z} = 2 \frac{\partial \varphi}{\partial y}; \quad (3.15) \\ (\nabla, \Gamma_z) &= \frac{\partial G_y}{\partial x} - \frac{\partial G_x}{\partial y} + \frac{\partial \varphi}{\partial z} = 2 \frac{\partial \varphi}{\partial z}; \end{aligned}$$

$[\nabla, \Gamma] = [\nabla, \{\mathbf{I}\varphi - [\mathbf{I}, \mathbf{G}]\}] = -\nabla \mathbf{G} + \mathbf{I}(\nabla, \mathbf{G})$, але у випадку вектора з (3.14)

$$[\nabla, \Gamma] = -\nabla \mathbf{G} \Rightarrow [\nabla, [\nabla, \Gamma]] = 0. \quad (3.16)$$

Обчислення ротацій векторних складових тензору Γ приводить до співвідношень:

$$\begin{aligned} [\nabla, \Gamma_x] &= \frac{\partial \mathbf{G}}{\partial x} - [\mathbf{i}, \nabla \varphi] = 2 \frac{\partial \mathbf{G}}{\partial x} - \nabla G_x; \\ [\nabla, \Gamma_y] &= \frac{\partial \mathbf{G}}{\partial y} - [\mathbf{j}, \nabla \varphi] = 2 \frac{\partial \mathbf{G}}{\partial y} - \nabla G_y; \quad (3.17) \\ [\nabla, \Gamma_z] &= \frac{\partial \mathbf{G}}{\partial z} - [\mathbf{k}, \nabla \varphi] = 2 \frac{\partial \mathbf{G}}{\partial z} - \nabla G_z. \end{aligned}$$

Вище було доведено, що як вектор переміщень $\mathbf{u}$, так й векторний потенціал Ψ є розв'язками векторних диференціальних рівнянь (3.11). Це лінійні диференціальні оператори є само сполученими, фундаментальним розв'язком яких, як розв'язком операторних рівнянь

$$\nabla \nabla, \Gamma = 0; [\nabla, \nabla, \Gamma] = 0, \quad (3.18)$$

є тензор Γ , завдяки (3.13, 3.16).

4. Інтегральні представлення розв'язків диференціального закону рівноваги пружного тіла

Виконуючи стандартне інтегрування по частинах комбінації операторів лівих частин перших рівнянь з (3.11, 3.18), в замкнутій області (E) та користуючись узагальненою формулою Остроградського — Гаусса (3.9), де $B \equiv \Gamma$, а $\mathbf{A} \equiv \lambda + 2\mu \mathbf{u} - 2\Psi$, маємо:

$$\begin{aligned} & \iiint_{(E)} \{((\nabla(\nabla, \mathbf{A})), \Gamma) + 3(\nabla f, \Gamma) - (\mathbf{A}, \nabla(\nabla, \Gamma))\} dE = \\ & = \iiint_{(E)} \{(\nabla, \{(\nabla, \mathbf{A})\Gamma - \mathbf{A}(\nabla, \Gamma)\}) + 3(\nabla, (f\Gamma))\} dE = \\ & = \oint\oint_{(S)} \{(\mathbf{n}, \{(\nabla, \mathbf{A})\Gamma - \mathbf{A}(\nabla, \Gamma)\}) + 3f(\mathbf{n}, \Gamma)\} dS = 0. \end{aligned} \quad (4.1)$$

Але тут, завдяки операціям (3.2) та теоремі (3.8₁), можливі тотожні перетворення, звідки, замість (4.1), маємо:

$$\begin{aligned} & \iiint_{(E)} \{(\nabla(\nabla, \mathbf{A})\Gamma) - (\mathbf{A}, \nabla(\nabla, \Gamma)) + 3f(\mathbf{n}, \Gamma)\} dE = \\ & = \oint\oint_{(S)} \left\{ ([\mathbf{n}, [\nabla, \mathbf{A}]], \Gamma) + \left(\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial \mathbf{n}}, \Gamma \right) - \right. \\ & \left. - (\mathbf{A}, [\mathbf{n}, [\nabla, \Gamma]]) - \left(\mathbf{A}, \frac{\partial \Gamma}{\partial \mathbf{n}} \right) + 3f(\mathbf{n}, \Gamma) \right\} dS = 0. \end{aligned} \quad (4.2)$$

Принциповим тут є наявність складової $\left(\mathbf{A}, \frac{\partial \Gamma}{\partial \mathbf{n}} \right) = \mathbf{A} \frac{\partial \varphi}{\partial \mathbf{n}} - \left[\mathbf{A}, \frac{\partial \mathbf{G}}{\partial \mathbf{n}} \right]$. Враховуючи наведене, та відомі властивості подвійного шару $\frac{\partial \varphi}{\partial \mathbf{n}}$ [1, 2, 4], після відповідного граничного переходу, маємо з (4.2) остаточне інтегральне представлення вектора $\mathbf{A}$:

$$\begin{aligned} \mathbf{A} = & \oint\oint_{(S)} \left\{ ([\mathbf{n}, [\nabla, \mathbf{A}]], \Gamma) + \left(\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial \mathbf{n}}, \Gamma \right) + 3f(\mathbf{n}, \Gamma) - \right. \\ & \left. - (\mathbf{A}, [\mathbf{n}, [\nabla, \Gamma]]) - \mathbf{A} \frac{\partial \varphi}{\partial \mathbf{n}} + \left[\mathbf{A}, \frac{\partial \mathbf{G}}{\partial \mathbf{n}} \right] \right\} dS. \end{aligned} \quad (4.3)$$

Стосовно другого рівняння системи (3.11) $[\nabla, [\nabla, (\lambda \mathbf{u} + \Psi)]] = 0$, доцільно скористатися теоремою (3.10), враховуючи, що $\nabla, \Gamma = 0$, а на цей раз $\mathbf{A} = \lambda \mathbf{u} + \Psi$:

$$\begin{aligned} & \iiint_{(E)} \{([\nabla, [\nabla, \mathbf{A}]], \Gamma) - (\mathbf{A}, [\nabla, [\nabla, \Gamma]])\} dE = \\ & = \iiint_{(E)} (\nabla, \{[\mathbf{A}, [\nabla, \Gamma]] + [[\nabla, \mathbf{A}], \Gamma]\}) dE = \\ & = \oint\oint_{(S)} \{([\mathbf{n}, [\nabla, \mathbf{A}]], \Gamma) - (\mathbf{A}, [\mathbf{n}, [\nabla, \Gamma]])\} dS = 0. \end{aligned} \quad (4.4)$$

З метою подальших тотожних перетворень скористаємося базовою формулою (3.8₁) з урахуванням того, що тензор Γ є консервативним. Тоді теорему Стокса (4.4) можливо пристосувати до побудови відповідного інтегрального представлення векторного потенціалу Ψ :

$$\begin{aligned} & \oint\oint_{(S)} \{([\mathbf{n}, [\nabla, \mathbf{A}]], \Gamma) - (\mathbf{A}, [\mathbf{n}, [\nabla, \Gamma]])\} dS = \\ & = \oint\oint_{(S)} \left\{ (\mathbf{n}, \Gamma)(\nabla, \mathbf{A}) - \left(\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial \mathbf{n}}, \Gamma \right) + \left(\mathbf{A}, \frac{\partial \Gamma}{\partial \mathbf{n}} \right) \right\} dS = 0 \end{aligned}$$

Виконання граничного переходу, аналогічного (4.3), призводить до розшукуваного інтегрального представлення вектора $\mathbf{A}$:

$$\mathbf{A} = \oint\oint_{(S)} \left\{ \left(\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial \mathbf{n}}, \Gamma \right) - (\mathbf{n}, \Gamma)(\nabla, \mathbf{A}) - \left(\mathbf{A}, \frac{\partial \Gamma}{\partial \mathbf{n}} \right) \right\} dS. \quad (4.5)$$

Важливо підкреслити, що одержані інтегральні представлення (4.3, 4.5) відповідають законам (2.25, 3.11).

Враховуючи, що у (4.3) $\mathbf{A} = (\lambda + 2\mu)\mathbf{u} - 2\Psi$, маємо

$$\begin{aligned} & (\lambda + 2\mu)\mathbf{u} - 2\Psi = (\lambda + 2\mu) \oint\oint_{(S)} \left\{ ((\mathbf{n}, \nabla^* \mathbf{u}), \Gamma) - \right. \\ & \left. - (\mathbf{u}, [\mathbf{n}, [\nabla, \Gamma]]) - \left(\mathbf{u}, \frac{\partial \Gamma}{\partial \mathbf{n}} \right) \right\} dS - 2 \oint\oint_{(S)} \left\{ ((\mathbf{n}, \nabla^* \Psi), \Gamma) - \right. \end{aligned}$$

$$-(\Psi, [\mathbf{n}, [\nabla, \Gamma]]) - \left(\Psi, \frac{\partial \Gamma}{\partial \mathbf{n}} \right) \Big\} dS + 3 \oint\limits_{(S)} f(\mathbf{n}, \Gamma) dS; \quad (4.6)$$

а у (4.5) $\mathbf{A} = \lambda \mathbf{u} + \Psi$, тобто

$$\lambda \mathbf{u} + \Psi = \lambda \oint\limits_{(S)} \left\{ \left(\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial \mathbf{n}}, \Gamma \right) - (\mathbf{n}, \Gamma)(\nabla, \mathbf{u}) - \left(\mathbf{u}, \frac{\partial \Gamma}{\partial \mathbf{n}} \right) \right\} dS + \\ + \oint\limits_{(S)} \left\{ \left(\frac{\partial \Psi}{\partial \mathbf{n}}, \Gamma \right) - (\mathbf{n}, \Gamma)(\nabla, \Psi) - \left(\Psi, \frac{\partial \Gamma}{\partial \mathbf{n}} \right) \right\} dS. \quad (4.7)$$

Тут вважається доцільним виконати перевірку відповідності представлень (5.6, 5.7) диференціальним законам збережень (2.25). Тобто, з (4.6) за використання (3.15)

$$(\nabla, \mathbf{A}) = \\ = -2 \oint\limits_{(S)} \left\{ \left((\mathbf{n}, \nabla^* \mathbf{A}), \nabla \varphi \right) - \left(\mathbf{A}, \frac{\partial \nabla \varphi}{\partial \mathbf{n}} \right) + 3f(\mathbf{n}, \nabla \varphi) \right\} dS = \\ = -2 \oint\limits_{(S)} \left\{ (\nabla, \mathbf{A}) \frac{\partial \varphi}{\partial \mathbf{n}} + 3f(\mathbf{n}, \nabla \varphi) \right\} dS = \\ = -2 \oint\limits_{(S)} \left\{ ((\nabla, \mathbf{A}) + 3f) \frac{\partial \varphi}{\partial \mathbf{n}} \right\} dS = 0,$$

завдяки тому, що

$$\oint\limits_{(S)} (\mathbf{A}, ((\mathbf{n}, \nabla) \nabla \varphi)) dS = \\ = \oint\limits_{(S)} \left\{ \left((\mathbf{n}, (\nabla^* \mathbf{A})), \nabla \varphi \right) - (\nabla, \mathbf{A}) \frac{\partial \varphi}{\partial \mathbf{n}} \right\} dS.$$

Що ж стосується представлення (4.7), то виконання ротації цього виразу, за допомогою формул (3.17),

$$[\nabla, \mathbf{A}] = \oint\limits_{(S)} \left\{ \left(\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial \mathbf{n}}, (2\nabla \mathbf{G} - \nabla^* \mathbf{G}) \right) - \left\{ 2 \frac{\partial \mathbf{G}}{\partial \mathbf{n}} - (\mathbf{n}, \nabla^* \mathbf{G}) \right\}^* \right. \\ \left. * (\nabla, \mathbf{A}) - \left(\mathbf{A}, \frac{\partial}{\partial \mathbf{n}} (2\nabla \mathbf{G} - \nabla^* \mathbf{G}) \right) \right\} dS = \oint\limits_{(S)} \left\{ [\mathbf{n}, \nabla \varphi](\nabla, \mathbf{A}) - \right. \\ \left. - \frac{\partial \mathbf{G}}{\partial \mathbf{n}}(\nabla, \mathbf{A}) + \left(\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial \mathbf{n}}, \nabla \mathbf{G} \right) - \left[\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial \mathbf{n}}, \nabla \varphi \right] - (\mathbf{A}, ((\mathbf{n}, \nabla) \nabla \mathbf{G})) + \right. \\ \left. + [\mathbf{A}, (\mathbf{n}, \nabla) \nabla \varphi] \right\} dS,$$

завдяки тому, що

$$[\mathbf{A}, ((\mathbf{n}, \nabla) \nabla \varphi)] = [[\mathbf{n}, \nabla \varphi], [\nabla, \mathbf{A}]] - \\ - [\mathbf{n}, \nabla \varphi](\nabla, \mathbf{A}) - \left[\nabla \varphi, \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial \mathbf{n}} \right] + \frac{\partial \varphi}{\partial \mathbf{n}} [\nabla, \mathbf{A}];$$

$$(\mathbf{A}, (\mathbf{n}, \nabla) \nabla \mathbf{G}) = ([\mathbf{n}, [\nabla, \mathbf{A}]], \nabla \mathbf{G}) + \left(\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial \mathbf{n}}, \nabla \mathbf{G} \right) - \frac{\partial \mathbf{G}}{\partial \mathbf{n}}(\nabla, \mathbf{A}),$$

перетворюється на однорідне інтегральне рівняння

$$[\nabla, \mathbf{A}] = \oint\limits_{(S)} \left\{ [[\mathbf{n}, \nabla \varphi], [\nabla, \mathbf{A}]] + \right. \\ \left. + \frac{\partial \varphi}{\partial \mathbf{n}} [\nabla, \mathbf{A}] - ([\mathbf{n}, [\nabla, \mathbf{A}]], \nabla \mathbf{G}) \right\} dS,$$

яке, за визначенням, має єдиний розв'язок: $[\nabla, \mathbf{A}] = 0$.

У виразі (4.6) доцільно виконати інтегрування по частинах, користуючись (3.42):

$$\oint\limits_{(S)} (\mathbf{A}, [\mathbf{n}, [\nabla, \Gamma]]) dS = \\ = - \oint\limits_{(S)} (\mathbf{A}, [\mathbf{n}, \nabla \mathbf{G}]) dS = \oint\limits_{(S)} (\mathbf{A}, [\nabla, \mathbf{u}]) \mathbf{G} dS,$$

де $\mathbf{A} = \begin{cases} \mathbf{u}, \\ \Psi. \end{cases}$

Розв'язання алгебраїчної системи рівнянь (4.6 – 4.7) призводить до взаємно пов'язаних інтегральних представлень векторів переміщень $\mathbf{u}$:

$$\mathbf{u} = \oint\limits_{(S)} \left\{ \left(\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial \mathbf{n}}, \Gamma \right) + ([\mathbf{n}, [\nabla, \mathbf{u}]], \Gamma) - (\mathbf{n}, [\nabla, \mathbf{u}]) \mathbf{G} - \right. \\ \left. - \left(\mathbf{u}, \frac{\partial \Gamma}{\partial \mathbf{n}} \right) \right\} dS - \oint\limits_{(S)} \left\{ \frac{2(\nabla, (\lambda \mathbf{u} + \Psi)) - 3f}{3\lambda + 2\mu} \right\} (\mathbf{n}, \Gamma) dS \quad (4.8)$$

та потенціалу Ψ :

$$\Psi = \oint\limits_{(S)} \left\{ \left(\frac{\partial \Psi}{\partial \mathbf{n}}, \Gamma \right) - \left(\Psi, \frac{\partial \Gamma}{\partial \mathbf{n}} \right) + ([\mathbf{n}, [\nabla, \Psi]], \Gamma) - \right. \\ \left. - (\mathbf{n}, [\nabla, \Psi]) \mathbf{G} \right\} dS - \frac{3\lambda}{3\lambda + 2\mu} \oint\limits_{(S)} f(\mathbf{n}, \Gamma) dS - \\ - \frac{\lambda + 2\mu}{3\lambda + 2\mu} \oint\limits_{(S)} (\nabla, (\lambda \mathbf{u} + \Psi)) (\mathbf{n}, \Gamma) dS. \quad (4.9)$$

У представлення (4.8, 4.9) присутня складова залежна від $(\nabla, (\lambda \mathbf{u} + \Psi))$. З (4.7), з урахуванням (3.15), впливає, що

$$(\nabla, (\lambda \mathbf{u} + \Psi)) = 2\lambda \iint_{(S)} \left\{ \left(\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial n}, \nabla \varphi \right) - \frac{\partial \varphi}{\partial n} (\nabla, \mathbf{u}) - \left(\mathbf{u}, \frac{\partial \nabla \varphi}{\partial n} \right) \right\} dS +$$

$$+ 2 \iint_{(S)} \left\{ \left(\frac{\partial \Psi}{\partial n}, \nabla \varphi \right) - \frac{\partial \varphi}{\partial n} (\nabla, \Psi) - \left(\Psi, \frac{\partial \nabla \varphi}{\partial n} \right) \right\} dS,$$

де (див. (3.8₁))

$$\iint_{(S)} (\mathbf{n}, [\nabla, [\mathbf{A}, \nabla \varphi]]) dS = \iint_{(S)} \left\{ \left(\mathbf{n}, \left(\nabla^* \mathbf{A} - \mathbf{I}(\nabla, \mathbf{A}) \right) \right), \nabla \varphi \right\} -$$

$$- \left(\mathbf{A}, \left(\mathbf{n}, \left(\nabla^* \nabla \varphi - \mathbf{I}(\nabla, \nabla \varphi) \right) \right) \right) dS = 0.$$

Тобто,

$$\iint_{(S)} \left(\mathbf{A}, \left(\mathbf{n}, \left(\nabla^* \nabla \varphi \right) \right) \right) dS = \iint_{(S)} \left(\mathbf{A}, \frac{\partial \nabla \varphi}{\partial n} \right) dS =$$

$$= \iint_{(S)} \left\{ \left(\left(\mathbf{n}, \nabla^* \mathbf{A} \right), \nabla \varphi \right) - (\nabla, \mathbf{A}) \frac{\partial \varphi}{\partial n} \right\} dS.$$

Таким чином,

$$(\nabla, (\lambda \mathbf{u} + \Psi)) = 2\lambda \iint_{(S)} \left\{ \left(\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial n}, \nabla \varphi \right) - \left(\left(\mathbf{n}, \nabla^* \mathbf{u} \right), \nabla \varphi \right) \right\} dS +$$

$$+ 2 \iint_{(S)} \left\{ \left(\frac{\partial \Psi}{\partial n}, \nabla \varphi \right) - \left(\left(\mathbf{n}, \nabla^* \Psi \right), \nabla \varphi \right) \right\} dS =$$

$$= -2\lambda \iint_{(S)} \left\{ \left(\left[\mathbf{n}, [\nabla, \mathbf{u}] \right], \nabla \varphi \right) \right\} dS - 2 \iint_{(S)} \left\{ \left(\left[\mathbf{n}, [\nabla, \Psi] \right], \nabla \varphi \right) \right\} dS =$$

$$= -2 \iint_{(S)} \left\{ \left(\left[\mathbf{n}, [\nabla, (\lambda \mathbf{u} + \Psi)] \right], \nabla \varphi \right) \right\} dS = 0.$$

Таким чином, представлення (4.8, 4.9) мають наступний остаточний вигляд:

$$\mathbf{u} = \iint_{(S)} \left\{ \left(\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial n}, \Gamma \right) + \left(\left[\mathbf{n}, [\nabla, \mathbf{u}] \right], \Gamma \right) - (\mathbf{n}, [\nabla, \mathbf{u}]) \mathbf{G} - \right.$$

$$\left. - \left(\mathbf{u}, \frac{\partial \Gamma}{\partial n} \right) \right\} dS + \frac{3}{3\lambda + 2\mu} \iint_{(S)} f(\mathbf{n}, \Gamma) dS; \quad (4.10)$$

$$\Psi = \iint_{(S)} \left\{ \left(\frac{\partial \Psi}{\partial n}, \Gamma \right) - \left(\Psi, \frac{\partial \Gamma}{\partial n} \right) + \left(\left[\mathbf{n}, [\nabla, \Psi] \right], \Gamma \right) - \right.$$

$$\left. - (\mathbf{n}, [\nabla, \Psi]) \mathbf{G} \right\} dS - \frac{3\lambda}{3\lambda + 2\mu} \iint_{(S)} f(\mathbf{n}, \Gamma) dS. \quad (4.11)$$

Граничні переходи у представленнях (4.10, 4.11) призводять до системи лінійних граничних інтегральних рівнянь, натурально пристосованих до відповідної числової реалізації. Неоднорідність цієї системи гарантує наявність єдиного розв'язку.

Побудована таким чином система граничних інтегральних рівнянь на основі представлень (4.10, 4.11) дозволяє визначити компоненти вектору переміщення $\mathbf{u}$, а потім послідовно - компоненти тензору деформацій по формулах (2.15) та, нарешті, - компоненти тензору напружень σ_{ij} по співвідношенням закону Гука (2.17).

Однак, відповідно формул (3.2) та теореми (3.8₁) тут доцільно представлення (4.10, 4.11) переписати к вигляді:

$$\mathbf{u} = \iint_{(S)} \left\{ \left(\mathbf{u}(\mathbf{n}, \nabla^* \Gamma) \right) + (\mathbf{n}, \Gamma)(\nabla, \mathbf{u}) - (\mathbf{n}, [\nabla, \mathbf{u}]) \mathbf{G} - \right.$$

$$\left. - \left(\mathbf{u}, \frac{\partial \Gamma}{\partial n} \right) \right\} dS + \frac{3}{3\lambda + 2\mu} \iint_{(S)} f(\mathbf{n}, \Gamma) dS; \quad (4.12_1)$$

$$\Psi = \iint_{(S)} \left\{ \left(\Psi(\mathbf{n}, \nabla^* \Gamma) \right) + (\mathbf{n}, \Gamma)(\nabla, \Psi) - \left(\Psi, \frac{\partial \Gamma}{\partial n} \right) - \right.$$

$$\left. - (\mathbf{n}, [\nabla, \Psi]) \mathbf{G} \right\} dS - \frac{3\lambda}{3\lambda + 2\mu} \iint_{(S)} f(\mathbf{n}, \Gamma) dS. \quad (4.12_2)$$

Тут

$$\left(\mathbf{A}, \left(\mathbf{n}, \nabla^* \Gamma \right) \right) = \mathbf{n}(\mathbf{A}, \nabla \varphi) + [\mathbf{n}, (\mathbf{A}, \nabla \mathbf{G})] =$$

$$= \mathbf{n}(\mathbf{A}, \nabla \varphi) + \tau(\mathbf{A}, \nabla \mathbf{G}_s) - \mathbf{s}(\mathbf{A}, \nabla \mathbf{G}_\tau) -$$

$$- \tau(\mathbf{G}, (\mathbf{A}, \nabla \mathbf{s})) + \mathbf{s}(\mathbf{G}, (\mathbf{A}, \nabla \tau)) = [\mathbf{A}, [\mathbf{n}, \nabla \varphi]] +$$

$$+ [\mathbf{A}, [\tau, \nabla \mathbf{G}_s]] - [\mathbf{A}, [\mathbf{s}, \nabla \mathbf{G}_\tau]] + \nabla \varphi(\mathbf{n}, \mathbf{A}) +$$

$$+ \nabla \mathbf{G}_s(\tau, \mathbf{A}) - \nabla \mathbf{G}_\tau(\mathbf{s}, \mathbf{A}),$$

де $(\mathbf{s}, \tau, \mathbf{n})$ - поверхнева криволінійна ортогональна система координат (рис. 4.1), а складові - $[\mathbf{A}, [\mathbf{n}, \nabla \varphi]]$, $[\mathbf{A}, [\tau, \nabla \mathbf{G}_s]]$, $[\mathbf{A}, [\mathbf{s}, \nabla \mathbf{G}_\tau]]$ є неперервні.

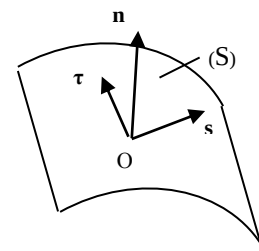


Рис. 4.1. Поверхневий координатний базис

Таким чином, визначення векторів $\mathbf{u}$ та Ψ залежить також від їх розбіжностей $(\nabla, \mathbf{u})$, (∇, Ψ) та завихорностей $[\nabla, \mathbf{u}]$, $[\nabla, \Psi]$.

Дивергенція тензора з (2.22) володіє властивістю:

$$\begin{aligned} & (\nabla, \{\mathbf{iT}_x + \mathbf{jT}_y + \mathbf{kT}_z\}) = \\ & = (\lambda + 2\mu)\Delta\mathbf{u} + \mu[\nabla, [\nabla, \mathbf{u}]] + \nabla f = [\nabla, [\nabla, \Psi]]. \end{aligned}$$

Тобто, з відси маємо

$$\Delta\{(\lambda + 2\mu)(\nabla, \mathbf{u}) + f\} = 0. \quad (4.14)$$

Створення вектора з дивергенцій векторів (2.22):

$$\begin{aligned} (\nabla, \mathbf{T}_i) &= (\lambda + \mu) \frac{\partial(\nabla, \mathbf{u})}{\partial x_i} + \mu \Delta u_i + \frac{\partial f}{\partial x_i} = 0, \\ & (x_i = x, y, z) \end{aligned}$$

призводить до висновку, що

$$\left(\nabla, \sum_{i=1}^3 \mathbf{i}(\nabla, \mathbf{T}_{x_i}) \right) = \Delta[\nabla, \mathbf{u}] = 0. \quad (4.15)$$

Таким чином доведено, що функція $(\lambda + 2\mu)(\nabla, \mathbf{u}) + f$, яка пов'язана з дивергенцією вектора переміщень, та вектор $[\nabla, \mathbf{u}]$ є гармонічними характеристиками пружного тіла.

Добре відомо [4], що гармонічні функції уявляють собою класичні розв'язки рівняння Лапласа (4.14). Тобто, якщо $\Delta h = 0$, то

$$h = \oint\oint_{(S)} \left\{ \varphi \frac{\partial h}{\partial n} - h \frac{\partial \varphi}{\partial n} \right\} dS. \quad (4.16)$$

Тут $\varphi = (4\pi r(|\mathbf{x} - \mathbf{y}|))^{-1}$ — фундаментальний розв'язок рівняння Лапласа, а $h = (\lambda + 2\mu)(\nabla, \mathbf{u}) + f$.

У даному випадку розв'язок рівняння (4.14) будується на основі (4.16) у вигляді:

$$\begin{aligned} (\nabla, \mathbf{u}) &= (\lambda + 2\mu) \oint\oint_{(S)} \left\{ \varphi(\mathbf{n}, \Delta\mathbf{u}) - ([\nabla, \mathbf{u}], [\mathbf{n}, \nabla\varphi]) - \right. \\ & \left. - (\nabla, \mathbf{u}) \frac{\partial \varphi}{\partial n} \right\} dS + \oint\oint_{(S)} \left\{ \varphi(\mathbf{n}, \mathbf{F}) + (\mathbf{G}, [\mathbf{n}, \mathbf{F}]) \right\} dS. \end{aligned} \quad (4.17)$$

У випадку рівняння Лапласа щодо вектора завихорності $[\nabla, \mathbf{u}]$ доцільно скористуватися фундаментальним розв'язком Γ (3.12), з урахуванням властивостей (3.13, 3.16), саме тому, що $\Delta\Gamma = \nabla(\nabla, \Gamma) - [\nabla, [\nabla, \Gamma]] = 0$.

Класична формула Грина [2, 4] для (3.12)

$$\begin{aligned} \oint\oint\oint_{(E)} \{(\Delta\mathbf{A}, \Gamma) - (\mathbf{A}, \Delta\Gamma)\} dE &= \oint\oint\oint_{(E)} \{(\nabla, \{(\nabla\mathbf{A}, \Gamma) - \\ & - (\mathbf{A}, \nabla^*\Gamma)\})\} dE = \oint\oint_{(S)} \left\{ \mathbf{n}, \{(\nabla\mathbf{A}, \Gamma) - (\mathbf{A}, \nabla^*\Gamma)\} \right\} dS = \\ &= \oint\oint_{(S)} \left\{ \left(\frac{\partial\mathbf{A}}{\partial n}, \Gamma \right) - \left(\mathbf{A}, \frac{\partial\Gamma}{\partial n} \right) \right\} dS \end{aligned}$$

набуває остаточного вигляду:

$$\begin{aligned} [\nabla, \mathbf{u}] &= \oint\oint_{(S)} \left\{ ([\nabla, \mathbf{u}], (\mathbf{n}, \nabla^*\Gamma)) - (\Delta\mathbf{u}, [\mathbf{n}, \Gamma]) - \right. \\ & \left. - (\nabla, \mathbf{u}) \frac{\partial\mathbf{G}}{\partial n} - ([\nabla, \mathbf{u}], \frac{\partial\Gamma}{\partial n}) \right\} dS. \end{aligned} \quad (4.18)$$

У представленнях (4.17, 4.18) розходимість $(\nabla, \mathbf{u})$ та завихорність $[\nabla, \mathbf{u}]$ вектора переміщень пов'язані головною формулою векторного аналізу: $\nabla(\nabla, \mathbf{u}) - [\nabla, [\nabla, \mathbf{u}]] = \Delta\mathbf{u}$.

Таким чином, одержано вагоме та суттєве збагачення математичної теорії пружності завдяки залученню вперше одержаних кінематичних характеристик, які супроводжують деформаційні процеси у пружному тілі.

Звичайно, слід зазначити, що векторний потенціал Ψ виконує допоміжну, але визначальну роль у цьому процесі знаходження вектора переміщень, про що свідчать одержані рівняння (2.25). Більш того. Встановлений зв'язок між вектором переміщень $\mathbf{u}$ та векторним потенціалом Ψ дозволяє стверджувати існування замкненості побудованої системи диференціальних (2.25) та інтегральних рівнянь (4.10, 4.11) щодо одержання

однозначного поля переміщень під впливом зовнішньої потенціальної сили F .

Висновки

Докладно показана альтернативна модель розв'язання крайових задач для натуральної системи рівнянь Нав'є-Ламе на основі розвинутого та найсучаснішого методу граничних інтегральних рівнянь. Саме тому, що метод граничних інтегральних рівнянь базується на інтегральних представленнях розв'язків загальних систем механіки суцільних середовищ без усяляких передумовленостей та припущень, він призводить до адекватної системи лінійних інтегральних рівнянь, які мають однозначні розв'язки. Більш того, інтегральні представлення розв'язків утворюються з аналітичними розв'язками, що має неперебільшене науково-методичне значення з точки зору на критичне оцінювання наближених результатів отриманих іншими засобами.

Що ж стосується наближених методів як моделювання, так й обчислення, то треба зауважити, що, нажаль, широко поширені сьогодні пакети прикладних програм (RANS, DNS, LES та ін.), як правило, ґрунтуються на алгоритмічних базах заснованих на скінченно-різницевих підходах з не доведеними як існуванням, так й єдиністю розв'язків, а з'ясувати який саме алгоритм застосовано, практично, неможливо. На відміну від цих підходів, метод граничних інтегральних рівнянь допускає коректну алгоритмізацію обчислювального процесу, побудованого за допомогою квадратурно-інтерполяційного методу на триангульованих межах досліджуваного об'єкта будь-якої складної просторової форми, властивої транспортним засобам всіх типів.

Тут вважається малоімовірним, щоб у рамках класичної механіки та термодинаміки можна було побудувати розрахункову модель, однаково придатну для опису як турбулентних течій в'язких рідин, що стискаються, так і течій в'язко-пружних і пластичних твердих тіл. Розробка таких моделей повинна, мабуть, ґрунтуватися на статистичній механіці, в якій механічні характеристики розглядаються як імовірнісні, а їх значення видаються як математичні очікування [4].

Очевидний теоретичний розвиток методології поширюється на нестационарні, тобто чотиривимірні завдання механіки суцільних середовищ із залученням апарату диференціальних форм – узагальненням векторно-тензорного аналізу на простори будь-якої розмірності.

Конфлікт інтересів

Автор декларує, що не має конфлікту інтересів стосовно даного дослідження, в тому числі фінансового, особистісного характеру, авторства чи іншого характеру, що міг би вплинути на дослідження та його результати, представлені в даній статті.

Фінансування

Дослідження проводилися без фінансової підтримки.

Доступність даних

Рукопис не має пов'язаних даних.

Використання засобів штучного інтелекту

Автор підтверджує, що не використовував технології штучного інтелекту при створенні представленої роботи.

Автор прочитав та погодився з опублікованою версією рукопису.

Література

1. Купрадзе, В. Д. Методы потенциала в теории упругости [Текст] / В.Д. Купрадзе. – М. : Физматгиз, 1963. – 472 с.
2. Победря, Б. Е. Численные методы в теории упругости и пластичности [Текст] / Б. Е. Победря. – 2-е изд. – М. : Изд-во МГУ, 1995. – 366 с.
3. Nowacki, W. Teoria sprężystości [Text] / W. Nowacki. – Warszawa : PWN, 1970. – 769 p.
4. Sokolnikoff, I. S. Tensor analysis. Theory and applications to the geometry and mechanics of continua [Text] / I. S. Sokolnikoff. – New York : John Wiley&Sons Inc, 1964. – 361 p.
5. Крашеница, Ю. А. Векторно-тензорный анализ, теория потенциала и метод граничных интегральных уравнений в начально-краевых задачах аэрогидродинамики [Текст] / Ю. А. Крашеница. – К. : Наук. думка, 2016. – 274 с.

References

1. Kupradze, V. D. Metody potentsiala v teorii uprugosti [Potential methods in the theory of elasticity]. Moscow, Publ. Fy`zmatgy`z, 1963. 472 p. (In Russian).
2. Pobedrya, B. E. Chislennyye metody v teorii uprugosti i plastichnosti [Numerical methods in the theory of elasticity and plasticity]. – 2nd ed. Moscow, Publ. Y`zd-vo MGU, 1995. 366 p. (In Russian).
3. Nowacki, W. Teoria sprężystości. Warszawa, Publ. PWN, 1970. 769 p.

4. Sokolnikoff, I. S. *Tensor analysis. Theory and applications to the geometry and mechanics of continua*. New York, Publ. John Wiley&Sons Inc, 1964. 361 p.

5. Krashanitsa, Yu. A. *Vektorno-tenzorny analimz, teoriya potentsiala i metod granichnykh integral'nykh uravneneiy v nachal'no-krayevykh*

zadachakh aerogidrodinamik [Vector-tensor analysis, potential theory and the method of boundary integral equations in initial-boundary value problems of aerohydrodynamics]. Kyiv, Publ. Nauk. dumka, 2016. 273 p. (In Russian).

Надійшла до редакції 15.08.2025, розглянута на редколегії 22.09.2025

CONSERVATIVE BOUNDARY-VALUE PROBLEMS OF THE THEORY OF ELASTICITY AND INTEGRAL REPRESENTATIONS OF SOLUTIONS

Yurii Krashanytsya

The subject of the research is a mathematical model of the equilibrium of a solid body of satisfactory spatial shape under external load. The development of solid mechanics is largely related to practical goals — calculations of the strength of structural elements and machine parts, the violation of which is usually understood as reaching a state where the structural properties of the product change, rendering it unsuitable for use. Many years of research into the system of differential equations in partial derivatives of the laws of equilibrium in mechanics, known as the Navier-Lame system of equations, has not yet, due to its complexity, achieved the level of development that would guarantee the possibility of obtaining analytical solutions. This raises many questions and misunderstandings regarding the solutions of boundary value problems using widely available application packages based on finite difference approaches. **The purpose of this article** is to present the results of the development of an alternative method of boundary integral equations, which, due to the boundary conditions of deformation of a continuous medium, leads to a system of linear boundary integral equations with the existing set of solutions. **Task:** to construct integral representations of solutions to the system of differential equations of equilibrium laws of a solid deformable body using the generalized potential theory method for differential operator forms of the corresponding equations. **Scientific novelty.** The differential operations of vector-tensor analysis are developed and generalized. The generalized integral theorems for differential operators of the second order adequate to the equilibrium laws of a deformable solid are proved. **The results obtained.** On the basis of the created generalized apparatus of vector-tensor analysis, analytical solutions in the form of integral representations of the main kinematic characteristics of the problem of deformation of a solid of satisfactory spatial form are constructed. **Conclusions.** The boundary value problem of the equilibrium of a deformed solid in the presence of an external force is reduced to a system of linear boundary integral equations with respect to the kinematic characteristics of the problem. In addition, it is proved for the first time that all the obtained characteristics are related to the vector momentum potential, which greatly simplifies the integral representation of solutions and numerical implementation of solutions of the corresponding integral equations.

Keywords: equilibrium of a deformable solid; Navier-Lamé equation; generalized vector-tensor analysis; vector potential; boundary integral equations.

Крашаниця Юрій Олександрович – д-р техн. наук, проф., проф. кафедри аерогідродинаміки, Національний аерокосмічний університет «Харківський авіаційний інститут», Харків, Україна.

Yurii Krashanytsya – Dr. Tech. Sc., Professor, Professor at the Department of Aerohydrodynamics, National Aerospace University "Kharkiv Aviation Institute", Kharkiv, Ukraine,
e-mail: u.krashanitsa@khai.edu, ORCID: 0009-0006-5088-044X.