

УДК 621.452.322:621.45.051:004.942(043)

doi: 10.32620/aktt.2025.2.03

С. В. ЄПІФАНОВ, О. В. БОНДАРЕНКО

Національний аерокосмічний університет ім. М. Є. Жуковського
«Харківський авіаційний інститут», Харків, Україна

МЕТОД ВИЗНАЧЕННЯ НЕВИМІРЮВАНИХ ПАРАМЕТРІВ ГАЗОТУРБІННИХ ДВИГУНІВ З УРАХУВАННЯМ ЗМІНИ ТЕХНІЧНОГО СТАНУ

Предметом дослідження є процес оцінювання невимірюваних параметрів робочого процесу газотурбінного двигуна за результатами вимірювання обмеженої кількості вимірюваних параметрів. Актуальність дослідження обумовлена неможливістю вимірювання в умовах експлуатації ряду головних параметрів двигуна, необхідних для розв'язання задач керування та діагностування – тяги, температури газу перед турбіною та інших. Значення цих параметрів необхідно безперервно оцінювати за обмеженою наявною інформацією. При цьому слід використовувати математичну модель робочого процесу, враховувати похибки вимірювання, обмеженість складу вимірюваних параметрів та вплив зміни технічного стану двигуна. У роботі розглядається підхід, що не вимагає оцінювання повного вектора внутрішніх параметрів технічного стану, а фокусується на прямому визначенні невимірюваних параметрів, що дозволяє знизити обчислювальну складність та уникнути накопичування похибок обчислень. Метою роботи є розробка методу, який забезпечує мінімізацію похибки оцінки цільового невимірюваного параметра за умови обмеженої кількості вимірювань, наявності мультиколінеарності математичної моделі та різної точності вимірювання параметрів робочого процесу. Для досягнення мети використовуються методи матричної алгебри: псевдообернення матриць, сингулярне розкладання (SVD), зважений метод найменших квадратів (МНК). Отримано такі результати: сформульовано задачу оптимального оцінювання параметрів двигуна на ustalених режимах роботи; отримано розв'язок та представлено шукану матрицю у вигляді добутку матриць, які окремо враховують зв'язок вимірюваних параметрів із невимірюваними та корекцію за впливом похибок вимірювань; показано на прикладі, що запропонований метод забезпечує високу обчислювальну стійкість. Наукова новизна полягає в формулюванні задачі у вигляді, який не передбачає оцінювання повного вектора стану та в застосуванні процедури мінімізації числа обумовленості добутку матриць шляхом відкидання малих сингулярних чисел. Практична цінність полягає в можливості застосування запропонованого методу в алгоритмах прямого керування двигуном за невимірюваними параметрами, а також для побудови бортових алгоритмів оцінювання та діагностування, які ефективно працюють в умовах обмеженої кількості вимірюваних параметрів та жорстких вимог до обчислювальних ресурсів.

Ключові слова: турбореактивний двоконтурний двигун; тяга; температура газу; математична модель; невимірювані параметри; параметри технічного стану; оцінювання.

Вступ

Авіаційний газотурбінний двигун (ГТД) є складним технічним об'єктом, до якого висуваються високі вимоги щодо характеристик та надійності. Для ефективного керування та контролю технічного стану двигуна він оснащений вимірювальною системою. До основних вимірюваних параметрів належать частоти обертання роторів, температура газу в перерізах проточної частини, тиск на виході з компресора високого тиску, а в турбореактивних двоконтурних двигунах (ТРДД) – також тиск на виході з вентилятора в зовнішньому контурі.

Проте набір доступних для вимірювання параметрів обмежений через низку факторів:

- складність організації вимірювань деяких критично важливих параметрів;
- обмежений ресурс датчиків;

- висока вартість елементів вимірювальної системи;

- вплив датчиків на газодинамічні характеристики проточної частини двигуна, що може негативно позначатися на тязі, питомій витраті палива, вазі, вартості та загальній ефективності.

Основним параметром турбореактивного двигуна є тяга, однак її безпосереднє вимірювання є складним завданням. Тяга визначає здатність двигуна забезпечувати необхідні льотно-технічні характеристики, такі як гарантований зліт при заданій довжині злітної смуги або перехоплення повітряних цілей. Відповідно, однією з головних задач керування є підтримка заданого значення тяги відповідно до положення ручки керування двигуном (РКД) з корекцією параметрів згідно з експлуатаційними умовами.



Окрім тяги, критично важливими є параметри, які необхідно обмежувати на всіх режимах роботи двигуна: температура газу перед турбіною, тиск на виході з компресора, температура на виході з форсажної камери в двигунах із форсажем (ТРДФ, ТРДДФ), запас стійкості компресора та коефіцієнт надлишку повітря в камері згоряння. Ці параметри слід точно визначати та обмежувати не лише на ustalених, а й на перехідних режимах, оскільки саме в таких умовах можливі значні відхилення від номінальних значень і порушення обмежень, що визначають умови нормальної роботи.

Забезпечення коректних значень цих параметрів впливає як на безпеку експлуатації, так і на довговічність двигуна. Наприклад, перевищення температури газу перед турбіною може призвести до втрати міцності лопаток і їх прогару. Зниження коефіцієнта запасу стійкості компресора загрожує виникненням помпажу.

Водночас, керування ГТД ускладнюється неможливістю безпосереднього вимірювання деяких параметрів. Наприклад, температура за камерою згоряння може виходити за межі робочого діапазону штатних термпар, а вимірювання тяги можливе лише за стендових умов. Запаси стійкості компресора визначаються не напряму, а на основі значень тиску та витрати повітря, яка не вимірюється.

Таким чином, визначення невимірюваних параметрів в експлуатаційних умовах, які характеризуються обмеженою інформацією, значним рівнем похибок вимірювання та зміною технічного стану двигуна, є актуальною задачею керування двигуном.

Формулювання задачі

Відомо [1], що результати моделювання ГТД не збігаються з результатами вимірювання параметрів під час експлуатації та стендових випробувань на статичних і динамічних режимах. Наявні статичні та динамічні похибки пов'язані з індивідуальними відмінностями конкретного зразка двигуна від моделі, яка налаштована для середнього представника серії двигунів.

Причинами відхилень параметрів конкретного двигуна від середнього можуть бути деградація характеристик двигуна під час експлуатації або індивідуальні відмінності характеристик нового двигуна. Хоча природа цих відхилень різна (в одному випадку вони спричинені накопиченням зносом та пошкодженнями, в іншому – сукупністю відхилень численних технологічних та збиральних операцій елементів двигуна), але зрештою в обох випадках причиною є відхилення геометричних розмірів

(площ прохідних перерізів, кутів установки лопаток, характерних розмірів мікрорельєфу поверхонь та ін.).

Однак зазвичай розглядають модель, до складу параметрів якої входять не геометричні параметри, а параметри вузлів, що визначають їх характеристики. Це зумовлено рівнем моделі проточної частини, в якій не враховується детальна внутрішня структура вузлів. Тому поставлене завдання в рамках даної моделі можна вирішити, імітуючи зміни геометричних параметрів відповідним деформуванням характеристик вузлів: вертикальним, горизонтальним зсувом та обертанням.

Контроль зміни геометрії лопаткових машин є складнішим і більш трудомістким порівняно з контролем зміни інших елементів проточної частини двигуна. Також чутливість параметрів робочого процесу до відхилень геометричних розмірів елементів лопаткових машин є вищою, ніж до відхилень геометричних розмірів сопел та вхідних пристроїв.

Тому для моделювання дефектів проточної частини ТРДД було обрано обмежений перелік несправностей вузла – зміна ККД вузла та зміна пропускної здатності. Розглянуто чотири вузли: каскади високого та низького тиску компресора та турбіни. Такий перелік дефектів, які відносяться до саме лопаткових машин, вважається найпоширенішим для ТРДД і розглядається багатьма дослідниками [2–5].

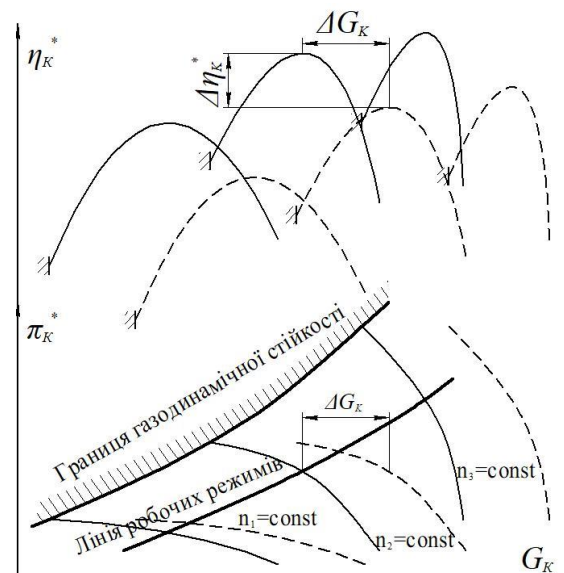


Рис. 1. Приклади зсуву характеристики компресора за значеннями витрати та ККД

Залежність параметрів газу в проточній частині від параметрів технічного стану нелінійна через нелінійність законів термодинаміки, газової

динаміки та залежностей властивостей газу від температури. Але нами розглядається задача оцінювання параметрів у справному стані, тобто в такому технічному стані, коли відхилення параметрів є помірними та не виходять за межі, визначені нормативно-технічною документацією або експлуатаційними стандартами.

Оскільки справний стан передбачає незначні відхилення, модель відхилень параметрів проточної частини може бути замінена лінійним наближенням з достатньою точністю:

$$\delta Y = H_Y \cdot \delta \theta; \quad (1)$$

$$\delta Z = H_Z \cdot \delta \theta, \quad (2)$$

$$\text{де } \delta Y = \frac{Y(\delta \theta) - Y_0}{Y_0} = \frac{Y(\delta \theta)}{Y_0} - 1; \delta \theta = \frac{\Delta \theta}{\theta_0};$$

$$\delta Z = \frac{Z(\delta \theta) - Z_0}{Z_0} = \frac{Z(\delta \theta)}{Z_0} - 1;$$

$\delta Y = (\delta P_K^* \quad \delta T_T^* \quad \delta n_{HT} \quad \delta G_{II})^T$ – вектор відносних відхилень вимірюваних параметрів (тиску за компресором, температури за турбіною, частоти обертання ротора низького тиску, витрати палива);

$\delta Z = (\delta R \quad \delta T_T^* \quad \delta K_{KHT} \quad \delta K_{KBT})^T$ – вектор відносних відхилень невимірюваних параметрів (тяги, температури за камерою згоряння, коефіцієнтів запасу стійкості компресорів високого на низького тиску);

$\delta \theta = [\delta G_{KHT} \quad \delta \eta_{KHT} \quad \delta G_{KBT} \quad \delta \eta_{KBT} \quad \delta A_{TBT} \quad \delta \eta_{TBT} \quad \delta A_{THT} \quad \delta \eta_{THT}]^T$ – вектор відносних відхилень параметрів технічного стану (ККД та витрати робочого тіла через каскади компресора та турбіни);

H_Y – матриця коефіцієнтів впливу параметрів технічного стану на вимірювані параметри;

H_Z – матриця коефіцієнтів впливу параметрів технічного стану на невимірювані параметри.

У випадку, коли кількість вимірюваних параметрів дорівнює кількості параметрів технічного стану, задача перетворюється на розв'язання матричного рівняння та підстановку розв'язку в формулу (2):

$$\delta Y = H_Y \cdot \delta \theta; \delta \theta = H_Y^{-1} \delta Y; \delta Z = H_Z H_Y^{-1} \delta Y. \quad (3)$$

Обмеженість складу вимірюваних параметрів унеможливає обернення матриці H_Y . Тому оцінку вектора параметрів технічного стану можливо визначити через розрахунок псевдообернених матриць:

– лівої	псевдооберненої	матриці
$\delta \theta = (H_Y^T \cdot H_Y)^{-1} \cdot H_Y^T \cdot \delta Y;$		
– правої	псевдооберненої	матриці
$\delta \theta = H_Y^T \cdot (H_Y \cdot H_Y^T)^{-1} \cdot \delta Y.$		

Визначник $\det(H_Y^T \cdot H_Y) \approx 0$, тому використання лівої псевдооберненої матриці буде мати неприйнятно велику похибку розрахунку через велике число обумовленості матриці $H_Y^T H_Y$ [6].

Використання правої псевдооберненої матриці дає меншу похибку, оскільки матриця $H_Y H_Y^T$ краще обумовлена.

Огляд та порівняння методів оцінювання невимірюваних параметрів

Оцінювання невимірюваних параметрів у технічних системах є складною задачею, що потребує врахування числової стабільності, обчислювальної ефективності та точності оцінок. Важливими критеріями порівняння методів є обчислювальна стійкість, складність, здатність враховувати шум вимірювань та усунення поганої обумовленості.

Розглянемо деякі найбільш відомі методи.

1. Розрахунок лівої псевдооберненої матриці [6]

Використання лівої псевдооберненої матриці дозволяє знайти оцінку параметрів шляхом мінімізації похибки у векторі вимірюваних параметрів. Однак цей метод має суттєві недоліки: він не враховує шум вимірювань та є нестійким при погано обумовлених матрицях, що може призводити до значних похибок. Обчислювальна складність цього методу є відносно невеликою.

2. Метод Мура-Пенроуза (розрахунок правої псевдооберненої матриці) [6]

Використання правої псевдооберненої матриці дозволяє зменшити проблеми числової нестійкості порівняно з лівою псевдооберненою, проте все ще залишається висока чутливість до поганої обумовленості. Цей метод мінімізує норму вектора параметрів технічного стану, але не враховує шум вимірювань.

3. Зважений метод найменших квадратів (WLS) [7]

WLS є класичним підходом, що мінімізує зважену суму квадратів похибок вимірюваних параметрів із урахуванням їхньої коваріаційної матриці. Основним недоліком цього методу є низька обчислювальна стійкість, оскільки погана обумовленість матриці не усувається. Як наслідок,

результати можуть бути нестабільними, особливо при високій корельованості вхідних даних.

4. **Регуляризація Тихонова** (гребенева регресія) [8]

Регуляризація Тихонова є вдосконаленням WLS, яке додає спеціальний регуляризаційний член для зменшення чутливості до малих сингулярних значень. Це суттєво покращує обчислювальну стійкість, але водночас викривлює спектр сингулярних значень, що може призводити до втрати точності. Основним викликом у використанні цього методу є правильний вибір коефіцієнта регуляризації, оскільки його надмірне значення може суттєво спотворити результати.

5. **Метод головних компонент** (PCA) [9]

Метод головних компонент використовується для зменшення розмірності вектору параметрів технічного стану. Він ґрунтується на заміні початкових параметрів на нові псевдопараметри, які є лінійними комбінаціями вихідних величин. Це означає, що під час вибору проєкції даних обираються такі напрями, вздовж яких варіативність даних, а відповідно й інформативність, найбільша. Основною перевагою цього методу є покращена числова стійкість завдяки відкиданню малозначущих компонент. Однак у задачах оцінки параметрів важливо мінімізувати дисперсію похибки оцінки, а не просто зберігати якомога більше вихідної варіативності. PCA не враховує шум вимірювань і може орієнтуватися на напрями, що містять значний шум, а це робить оцінку неточною.

6. **Метод найкращої лінійної незміщеної оцінки** (BLUE – Best Linear Unbiased Estimator) [10]

Метод BLUE забезпечує отримання незміщеної оцінки параметрів із мінімальною дисперсією, враховуючи шум вимірювань. Проте, подібно до WLS, він не вирішує проблему погані обумовленості матриць, що може призводити до нестійких розрахунків. Обчислювальна складність цього методу є високою, що обмежує його застосування для великих систем.

7. **Фільтр Калмана та його варіації** [11]

Фільтр Калмана є рекурсивним алгоритмом, що забезпечує оптимальну оцінку параметрів у динамічних системах шляхом комбінування прогнозних і вимірних значень. Цей метод має вбудовану регуляризацію, що допомагає боротися з погано обумовленими матрицями. Проте, він потребує значних обчислювальних ресурсів та для чисто статичних задач зводиться до WLS [12]. Тому його застосування у даному випадку є надлишковим.

8. **Басівське оцінювання** [13]

Басівські методи використовують апріорну інформацію про розподіл параметрів для отримання максимально правдоподібної оцінки. Вони мають

високу стійкість до числових похибок, але водночас є обчислювально складними. У статичних задачах їх використання є надмірним через високу складність обчислень.

Кожен з цих методів має недоліки, тому пропонується метод, який враховує:

- статичний характер задачі;
- неповний ранг матриць коефіцієнтів впливу;
- похибки вимірювання;
- необхідність мінімізації похибок оцінок невимірюваних параметрів.

Формування методу оцінювання невимірюваних параметрів

Використовуючи адитивну модель вимірювань

$$\delta Y_{\text{вим}} = \delta Y + \varepsilon_Y, \quad (4)$$

де ε_Y – похибка вимірювань,

Відхилення параметрів технічного стану та похибки вимірюваних параметрів підкорюються нормальному закону розподілу з нульовим математичним сподіванням:

$$\delta \theta \sim N(0, \sigma_\theta^2); \varepsilon_Y \sim N(0, \sigma_{\varepsilon_Y}^2).$$

Припускаючи, що $\delta Z = F \delta Y_{\text{вим}}$, за допомогою формул (1) і (2) отримаємо:

$$H_Z \cdot \delta \theta = F(H_Y \cdot \delta \theta + \varepsilon_Y). \quad (5)$$

Тепер задача оптимального оцінювання невимірюваних параметрів зводиться до визначення матриці F , яка мінімізує похибку оцінки. За умови припущення про те, що відхилення параметрів технічного стану та похибки вимірювань є некорельованими, $\text{cov}(\theta, \varepsilon_Y) = 0$, розв'язком рівняння (5) є

$$F = H_Z \text{cov}(\delta \theta) \cdot H_Y^T (H_Y \text{cov}(\delta \theta) H_Y^T + \text{cov} \varepsilon_Y)^{-1}. \quad (6)$$

Для обернення суми матриць використаємо формулу Шермана-Моррісона-Вудбері [6]

$$(A + B)^{-1} = A^{-1} - A^{-1} B A^{-1} = A^{-1} (I - B A^{-1}).$$

Припустимо, що відхилення параметрів технічного стану мають рівні між собою дисперсії та некорельовані між собою. Тоді

$$\text{cov } \delta\theta = \text{diag} \left\{ \sigma_{\delta G_{\text{KHT}}}^2, \sigma_{\delta \eta_{\text{KHT}}}^2, \sigma_{\delta G_{\text{KBT}}}^2, \sigma_{\delta \eta_{\text{KBT}}}^2, \sigma_{\delta A_{\text{TBT}}}^2, \sigma_{\delta \eta_{\text{TBT}}}^2, \sigma_{\delta A_{\text{THT}}}^2, \sigma_{\delta \eta_{\text{THT}}}^2 \right\} = \sigma_{\delta\theta}^2 \mathbf{I}; \quad (6)$$

$$\text{cov } \varepsilon_Y = \text{diag} \left(\sigma_{\text{PK}}^2, \sigma_{\text{TT}}^2, \sigma_{\text{HT}}^2, \sigma_{\text{GP}}^2 \right); \quad (7)$$

$$\begin{aligned} F &= H_Z \text{cov}(\delta\theta) H_Y^T \left(H_Y \text{cov}(\delta\theta) H_Y^T + \text{cov } \varepsilon_Y \right)^{-1} = \\ &= H_Z \sigma_{\delta\theta}^2 \mathbf{I} H_Y^T \left(H_Y \cdot \sigma_{\delta\theta}^2 \mathbf{I} \cdot H_Y^T + \text{cov } \varepsilon_Y \right)^{-1} = \\ &= H_Z \sigma_{\delta\theta}^2 \mathbf{I} H_Y^T \left(\sigma_{\delta\theta}^2 \right)^{-1} \left(H_Y H_Y^T + \frac{\text{cov } \varepsilon_Y}{\sigma_{\delta\theta}^2} \right)^{-1} = \\ &= H_Z H_Y^T \left(H_Y H_Y^T + \frac{\text{cov } \varepsilon_Y}{\sigma_{\delta\theta}^2} \right)^{-1} = H_Z H_Y^T \cdot \\ &\cdot \left(H_Y H_Y^T \right)^{-1} \left(\mathbf{I} - \frac{\text{cov } \varepsilon_Y}{\sigma_{\delta\theta}^2} \left(H_Y H_Y^T \right)^{-1} \right) = F_0 (\mathbf{I} - \Delta F), \end{aligned} \quad (8)$$

де $F_0 = H_Z H_Y^T \left(H_Y H_Y^T \right)^{-1}$ – матриця перетворення, яка не враховує шум вимірювань; вона відповідає результату розрахунку через праву псевдообернену матрицю.

$$\Delta F = \frac{\text{cov } \varepsilon_Y}{\sigma_{\delta\theta}^2} \left(H_Y H_Y^T \right)^{-1} - \text{матриця-поправка, яка}$$

враховує співвідношення дисперсій вимірювання та відхилень параметрів технічного стану. При відсутніх шумах вимірювання ця поправка дорівнює нулю.

Розрахунок правої псевдооберненої матриці дає меншу похибку, оскільки $H_Y H_Y^T$ краще обумовлена.

Обчислювальна стійкість розрахунків визначатиметься числами обумовленості матриць

$$\left(H_Y H_Y^T \right) \text{ і } \left(H_Y H_Y^T + \frac{\text{cov } \varepsilon_Y}{\sigma_{\delta\theta}^2} \right).$$

Загальноприйнятого порогу для значення числа обумовленості не існує, оскільки це залежить від конкретної задачі та вимог до точності. Однак, як правило, значення порядку 10^3 або менше вважається прийнятним. При значеннях числа обумовленості порядку 10^6 і вище матриця вважається погано обумовленою, і обернення такої матриці може привносити велику похибку [14].

До складу вимірюваних можуть входити параметри, які реагують майже однаково на зміну стану (повний тиск і температура у відповідних перерізах або вздовж енергоізольованих каналів), цей випадок зустрічається рідко, його просто виключити шляхом аналізу складу параметрів. Однак не виключено, що коефіцієнти впливу неоднорідних параметрів не будуть корельовані на певних режимах. Мультиколінеарність рядків матриці коефіцієнтів впливу призводить до збільшення числа

обумовленості. Тому у випадку неприйнятно великих чисел обумовленості пропонуємо матрицю $H_Y H_Y^T$ замінити її сингулярним розкладенням з подальшим видаленням малих сингулярних значень.

Найбільш розрахунково стійким методом обернення матриці є її попереднє сингулярне розкладення (SVD – singular value decomposition) [15], яке полягає в представленні початкової (пхп)-матриці $H_Y H_Y^T$ у вигляді добутку трьох матриць:

$$H_Y H_Y^T = \mathbf{U} \mathbf{S} \mathbf{V}^T,$$

де $\mathbf{U} (n \times n)$, $\mathbf{V} (n \times n)$ – ортогональні матриці;

$\mathbf{S} (n \times n)$ – матриця сингулярних чисел.

Далі відкидаємо стовпці та рядки матриці $\mathbf{S}$, які містять малі сингулярні числа, таким чином отримавши усічену матрицю $\mathbf{S}' (r \times r)$.

У матриці $\mathbf{V}$ слід залишити тільки перші r стовпців, таким чином отримаємо $\mathbf{V}' (n \times r)$.

Використане сингулярне розкладення зменшує число обумовленості матриці яка обертається:

$$H_Y H_Y^T \approx \mathbf{U} \mathbf{S}' \mathbf{V}'^T; \left(H_Y H_Y^T \right)^{-1} \approx \mathbf{V}' (\mathbf{S}')^{-1} \mathbf{U}^T;$$

$$F = H_Z H_Y^T \left(H_Y H_Y^T + \frac{\text{cov } \varepsilon_Y}{\sigma_{\delta\theta}^2} \right)^{-1} = H_Z H_Y^T \left(\mathbf{U} \mathbf{S}' \mathbf{V}'^T + \frac{\text{cov } \varepsilon_Y}{\sigma_{\delta\theta}^2} \right)^{-1};$$

$$\begin{aligned} F &= H_Z H_Y^T \left(H_Y H_Y^T \right)^{-1} \left(\mathbf{I} - \frac{\text{cov } \varepsilon_Y}{\sigma_{\delta\theta}^2} \left(H_Y H_Y^T \right)^{-1} \right) = \\ &= H_Z H_Y^T \mathbf{V}' (\mathbf{S}')^{-1} \mathbf{U}^T \left(\mathbf{I} - \frac{\text{cov } \varepsilon_Y}{\sigma_{\delta\theta}^2} \mathbf{V}' (\mathbf{S}')^{-1} \mathbf{U}^T \right). \end{aligned}$$

Таким чином, отримали матрицю F , яка пов'язує вимірювані параметри з невимірюваними.

Зауважимо: матриця F знайдена саме таким чином, що виконується умова

$$\sum (\delta \hat{Z} - \delta Z)^2 \rightarrow \min,$$

тобто коефіцієнти матриці знайдені з умови мінімізації суми квадратів відхилень оцінок невимірюваних параметрів від їх справжніх значень.

Ключові особливості та переваги методу

Особливості формулювання задачі: на відміну від класичних методів, які орієнтовані на точне відновлення внутрішніх параметрів і лише опосередковано впливають на точність оцінки невимірюваного параметра, запропонований підхід безпосередньо мінімізує похибку визначення саме невимірюваного параметра. Метод не передбачає оцінювання вектору параметрів технічного стану,

оскільки це не є метою задачі. Крім того, визначення великої кількості параметрів є неможливим через обмежену кількість вимірювань (як правило, 3–5 параметрів). Отже, відновлення всього вектору параметрів технічного стану в класичному розумінні не є можливим.

Обчислювальна стійкість: завдяки використанню правого псевдообернення та сингулярного розкладання (SVD) метод усуває проблеми, пов'язані з поганою обумовленістю матриць, що є суттєвою перевагою порівняно з класичними методами, такими як WLS або BLUE.

Обчислювальна складність: метод є обчислювально ефективнішим за BLUE або WLS, оскільки оцінювання невимірюваного параметра відбувається напряму, без проміжного розрахунку внутрішніх параметрів. Це дозволяє знизити складність розрахунків та уникнути накопичення числових похибок.

Аналітична зручність представлення: знайдена матриця перетворення представлена у вигляді добутку двох компонентів: основної частини, яка визначає залежність між вимірюваними та невимірюваним параметрами за відсутності шуму, та коригувального множника, який залежить від шуму вимірювань.

Така форма дає додаткові переваги в аналізі, зокрема:

– дозволяє окремо досліджувати вплив шуму вимірювань на кінцевий результат;

– можна аналізувати, як саме множник біля шуму змінює поправку та на які параметри найбільше впливає.

Врахування шуму вимірювань: метод забезпечує корекцію оцінки залежно від рівня шуму вимірювань, що суттєво підвищує точність визначення невимірюваного параметра.

Запропонований метод є альтернативою класичним підходам, що дозволяє ефективно оцінювати невимірювані параметри в умовах погано обумовлених задач із шумовими спотвореннями. Основна ідея полягає в безпосередньому обчисленні матриці перетворення між вимірюваними параметрами та невимірюваним параметром, уникаючи проміжного оцінювання внутрішніх параметрів технічного стану. Його ключові переваги — числова стійкість, мінімізація похибки саме невимірюваного параметра та зручне аналітичне представлення, яке спрощує аналіз впливу шуму.

Похибки оцінювання

Визначимо похибки запропонованого методу оцінювання невимірюваних параметрів на основі

вимірюваних. Похибка визначення невимірюваного параметра ε_{z_i} :

$$\varepsilon_{z_i} = \frac{\hat{z}_i - z_i}{z_i} = \frac{z_0(1 + \delta\hat{z}_i) - z_0(1 + \delta z_i)}{z_0(1 + \delta z_i)} = \frac{\delta\hat{z}_i - \delta z_i}{(1 + \delta z_i)}. \quad (9)$$

Припустимо, що δz_i приймає малі значення, тоді дисперсія похибки визначатиметься як

$$\begin{aligned} \sigma^2(\varepsilon_{z_i}) &= \sigma^2(\delta\hat{z}_i - \delta z_i) \cdot (1 + \sigma^2(\delta z_i)) = \\ &= \sigma^2(\delta\hat{z}_i - \delta z_i) + \sigma^2(\delta\hat{z}_i - \delta z_i) \cdot \sigma^2(\delta z_i). \end{aligned} \quad (10)$$

Доданок $\sigma^2(\delta\hat{z}_i - \delta z_i) \cdot \sigma^2(\delta z_i)$ має менший порядок, тому можемо ним знехтувати. Таким чином похибка визначатиметься лише чисельником. Можемо записати вираз для розрахунку похибки усього вектора невимірюваних параметрів:

$$\begin{aligned} \varepsilon_Z &= \delta\hat{Z} - \delta Z = F\delta Y_{\text{вим}} - H_Z\delta\theta = F(\delta Y + \varepsilon_Y) - \\ &- H_Z\delta\theta = (FH_Y - H_Z)\delta\theta + F\varepsilon_Y = \varepsilon_Z^M + \varepsilon_Z^I. \end{aligned} \quad (11)$$

де $\varepsilon_Z^M = (FH_Y - H_Z)\delta\theta$ – методична похибка, зумовлена відкиданням нульових і малих сингулярних чисел у матриці S ;

$\varepsilon_Z^I = F\varepsilon_Y$ – інструментальна похибка, зумовлена похибками вимірювань.

Представимо перший доданок у вигляді

$$\begin{aligned} \varepsilon_Z^M &= (FH_Y - H_Z)\delta\theta = \left(H_Z H_Y^T (H_Y H_Y^T)^{-1} H_Y - H_Z \right) \delta\theta = \\ &= H_Z \left(H_Y^T (H_Y H_Y^T)^{-1} H_Y - I \right) \delta\theta. \end{aligned}$$

Видно, що методична похибка залежить від відхилень параметрів технічного стану та множника $\left(H_Y^T (H_Y H_Y^T)^{-1} H_Y - I \right)$. Вона обумовлена виключно методикою, що ґрунтується на заміні більшої кількості параметрів технічного стану обмеженою кількістю вимірюваних параметрів.

$\Pi_{H_Y} = H_Y^T (H_Y H_Y^T)^{-1} H_Y$ – матриця ортогональної проєкції на чотиривимірний підпростір у восьмивимірному просторі, породжений матрицею H_Y . $\Pi_{H_Y} \neq I$, бо не зберігає всю інформацію через неповний ранг матриці H_Y . Таким чином, $(\Pi_{H_Y} - I)$ відображає ступінь втрати інформації під час реконструкції.

При заміні матриці $H_Y H_Y^T$ на її сингулярне розкладення $U S^T V^T$ методична похибка буде додатково збільшена через відкидання малих сингулярних чисел:

$$\varepsilon_Z^M = (F H_Y - H_Z) \delta \theta = H_Z \left(H_Y^T V^T (S^T)^{-1} U^T H_Y - I \right) \delta \theta. \quad (12)$$

Коваріаційні матриці складових похибок:

$$\begin{aligned} \text{cov}(\varepsilon_Z^M) &= (F H_Y - H_Z) \text{cov}(\delta \theta) (F H_Y - H_Z)^T; \\ \text{cov}(\varepsilon_Z^i) &= F \text{cov}(\varepsilon_Y) F^T. \end{aligned} \quad (13)$$

Урахувавши (6) отримаємо:

$$\text{cov}(\varepsilon_Z^M) = (F H_Y - H_Z) (F H_Y - H_Z)^T \sigma_{\delta \theta}^2. \quad (14)$$

Коваріаційна матриця загальної похибки вектору невимірюваних параметрів:

$$\text{cov}(\varepsilon_Z) = \text{cov}(\varepsilon_Z^M) + \text{cov}(\varepsilon_Z^i). \quad (15)$$

$$H_Y = \begin{pmatrix} 0,0827 & 0,3425 & 1,364 & -0,7231 & -0,5767 & -0,7528 & -0,5365 & 0,0519 \\ -0,0385 & -0,0929 & 0,3673 & -1,231 & 0,4788 & -1,496 & -0,6069 & -0,1798 \\ -0,379 & 0,5192 & 0,9496 & -0,6013 & 0,2807 & -0,7389 & -0,9557 & 0,3356 \\ 0,0319 & 0,2734 & 1,867 & -2,33 & 0,9712 & -2,845 & -1,5815 & -0,068 \end{pmatrix};$$

$$H_Z = (0,1989 \quad 0,9836 \quad 2,2308 \quad -1,6173 \quad 0,7379 \quad -1,988 \quad -2,0132 \quad 0,5387).$$

У таблиці 1 наведено СКВ похибок вимірювань, значення яких обґрунтовано в роботі [16].

Таблиця 1

СКВ похибок вимірювань, %

P_H^*	0,03
T_H^*	0,2
n_{BT}	0,05
G_{II}	0,5
P_K^*	0,2
T_K^*	0,2
P_{TBT}^*	0,3
T_{TBT}^*	0,25
T_{THT}^*	0,2

Відповідно, $\text{cov} \varepsilon_Y = \text{diag}(0,2^2; 0,2^2; 0,05^2; 0,5^2)$.

Прийнявши, що $\sigma_{\delta \theta} = 1\%$, отримаємо:

Приклад

Розглянемо використання запропонованої методики на прикладі ТРДД. До складу вимірюваних параметрів належать: тиск за компресором, температура за турбіною, частота обертання ротора низького тиску, витрата палива. Частота обертання ротора високого тиску використовується як параметр, що визначає режим роботи двигуна. Невимірюваним параметром є тяга, тому H_Z являє собою матрицю-рядок.

Матриці коефіцієнтів впливу розраховані за допомогою базової нелінійної моделі, що ґрунтується на розв'язанні рівнянь робочого процесу з використанням характеристик вузлів, налаштованих на параметри «середнього» двигуна. Для розрахунку кожен параметр технічного стану було по чергово відхилено на 3 %.

Розрахунки виконано в усьому робочому діапазоні двигуна. Детальні дані представлено нижче для режиму 85% максимальної частоти обертання ротора ВТ.

Матриці коефіцієнтів впливу

$$\frac{\text{cov} \varepsilon_Y}{\sigma_{\delta \theta}^2} = \begin{pmatrix} 0,2^2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0,2^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0,05^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0,5^2 \end{pmatrix}.$$

Розрахунок чисел обумовленості:

$$\kappa(H_Y H_Y^T) = 403,4; \kappa\left(H_Y H_Y^T + \frac{\text{cov} \varepsilon_Y}{\sigma_{\delta \theta}^2}\right) = 179,3.$$

У нашому випадку число обумовленості має прийнятні значення, тому сингулярне розкладення та відкидання малих сингулярних значень є недоцільним.

Розрахуємо матриці F_0 і F для порівняння їх значень:

$$F = \begin{pmatrix} f_{PK}^* & f_{TT}^* & f_{nHT} & f_{GII} \end{pmatrix} = (0,1548 \quad -0,4702 \quad 1,106 \quad 0,63);$$

$$F_0 = (-0,0936 \quad -1,458 \quad 0,6932 \quad 1,307).$$

Розрахунок похибок:

$$\text{cov}(\varepsilon_Z) = \text{cov}(\varepsilon_Z^M) + \text{cov}(\varepsilon_Z^i);$$

$$FH_Y - H_Z = \begin{pmatrix} -0,567 & -0,14 & 0,0338 & -0,0484 \\ -0,13 & -0,0343 & 0,1621 & -0,1178 \end{pmatrix};$$

$$\sigma^2(\varepsilon_Z^M) = 0,4025; \sigma(\varepsilon_Z^M) = 0,6344\%.$$

$$\text{cov}(\varepsilon_Z^i) = F \text{cov}(\varepsilon_Y) F^T;$$

$$\begin{aligned} \sigma^2(\varepsilon_Z^i) &= \left(f_{PK}^* \sigma_{PK}^*\right)^2 + \left(f_{TT}^* \sigma_{TT}^*\right)^2 + \\ &+ \left(f_{nHT} \sigma_{nHT}\right)^2 + \left(f_{G\Pi} \sigma_{G\Pi}\right)^2 = \\ &= (0,1548 \cdot 0,2)^2 + (-0,4702 \cdot 0,2)^2 + \\ &+ (1,106 \cdot 0,05)^2 + (0,63 \cdot 0,5)^2 = 0,1121. \end{aligned}$$

$$\sigma(\varepsilon_Z^i) = 0,3348\%;$$

$$\sigma^2(\varepsilon_Z) = \sigma^2(\varepsilon_Z^M) + \sigma^2(\varepsilon_Z^i) = 0,5146;$$

$$\sigma(\varepsilon_Z) = 0,7173\%.$$

Важливим етапом аналізу є визначення внеску окремих складових у загальну похибку оцінки – як методичної, так і інструментальної. Джерелом методичної похибки є неповний ранг матриці коефіцієнтів впливу через обмежену кількість вимірюваних параметрів, які лише частково відтворюють параметри технічного стану. Фактично це означає вибір лише найбільш інформативних напрямків простору – головних компонент. У даному випадку збережено чотири напрямки, які несуть найбільшу частку інформації про дефекти. Це означає, що деякі компоненти вектора параметрів технічного стану реконструюються менш точно через втрату проєкцій у напрямках зі слабкою інформативністю. Аналіз окремих складових дисперсії методичної похибки дозволяє кількісно оцінити, які параметри технічного стану найгірше піддаються оцінюванню за наявної структури вимірюваних параметрів та їх точності. Аналіз окремих складових дисперсії інструментальної похибки дозволяє кількісно оцінити внесок похибок вимірювання кожного вимірюваного параметра у загальну інструментальну похибку. Такий підхід може лежати в основі обґрунтованого вибору складу вимірюваних параметрів та точності датчиків для збільшення точності оцінювання невимірюваних параметрів.

Для оцінки впливу окремих параметрів на методичну та інструментальну похибку оцінки невимірюваного параметра розраховуються відносні дисперсії:

$$\bar{\sigma}_i^2 = \frac{\sigma_i^2}{\sigma_\Sigma^2}, \quad (16)$$

де $\sigma_\Sigma^2 = \sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \dots + \sigma_k^2$ – сумарна дисперсія;

$\sigma_1^2, \sigma_2^2, \dots, \sigma_k^2$ – складові сумарної дисперсії.

Відносні складові дисперсії методичної похибки:

$$\bar{\sigma}_{\delta G_{KHT}}^2 = \frac{(-0,567)^2}{0,4025} = 0,798;$$

$$\bar{\sigma}_{\delta \eta_{KHT}}^2 = 0,049;$$

$$\bar{\sigma}_{\delta G_{KBT}}^2 = 0,003;$$

$$\bar{\sigma}_{\delta \eta_{KBT}}^2 = 0,006;$$

$$\bar{\sigma}_{\delta A_{TBT}}^2 = 0,042;$$

$$\bar{\sigma}_{\delta \eta_{TBT}}^2 = 0,003;$$

$$\bar{\sigma}_{\delta A_{THT}}^2 = 0,065;$$

$$\bar{\sigma}_{\delta \eta_{THT}}^2 = 0,034.$$

Відносні складові дисперсії інструментальної похибки:

$$\bar{\sigma}_{PK}^{*2} = \frac{\left(f_{PK}^* \sigma_{PK}^*\right)^2}{\sigma^2(\varepsilon_Z^i)} = 0,086; \quad \bar{\sigma}_{TT}^{*2} = \frac{\left(f_{TT}^* \sigma_{TT}^*\right)^2}{\sigma^2(\varepsilon_Z^i)} = 0,079;$$

$$\bar{\sigma}_{nHT}^2 = \frac{\left(f_{nHT} \sigma_{nHT}\right)^2}{\sigma^2(\varepsilon_Z^i)} = 0,027; \quad \bar{\sigma}_{G\Pi}^2 = \frac{\left(f_{G\Pi} \sigma_{G\Pi}\right)^2}{\sigma^2(\varepsilon_Z^i)} = 0,885.$$

Аналогічним чином виконано розрахунки на інших режимах. Результати для всього діапазону режимів роботи ТРДД представлені на рис. 2–5.

Класичним підходом до оцінювання тяги в бортових системах є використання емпірично підбраного вимірюваного параметра, який корелює з тягою, та подальше масштабування його залежності відповідно до режиму роботи двигуна. У таких алгоритмах, як правило, застосовується лише один параметр-представник тяги, частота обертання ротора НТ (вентилятора) чи повний тиск за компресором. Такий метод відрізняється простотою реалізації, високою обчислювальною ефективністю, але має обмежену точність та гнучкість, особливо за умов зміни технічного стану двигуна.

Покажемо на розглянутому прикладі для режиму 85% максимальної частоти обертання ротора ВТ, що використання лише одного вимірюваного параметра дає більшу похибку оцінювання, ніж у разі використання запропонованої методики.

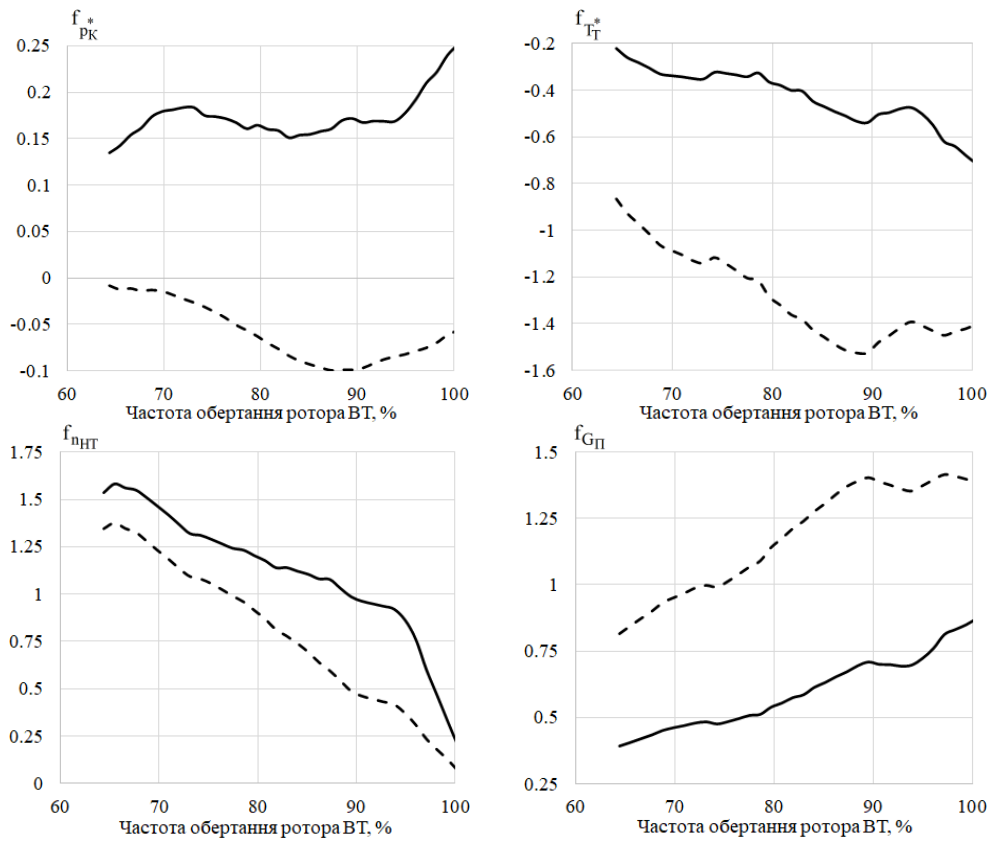
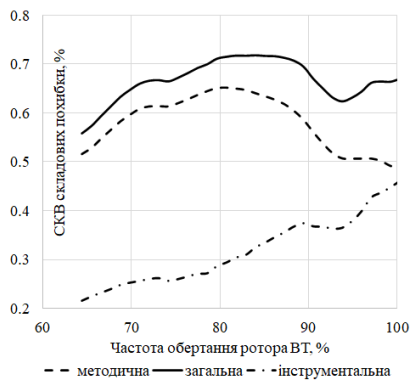
Рис. 2. Значення коефіцієнтів матриць F_0 (штрихова лінія) та F (суцільна лінія)

Рис. 3. Складові похибки оцінки тяги (загальна, методична, інструментальна)

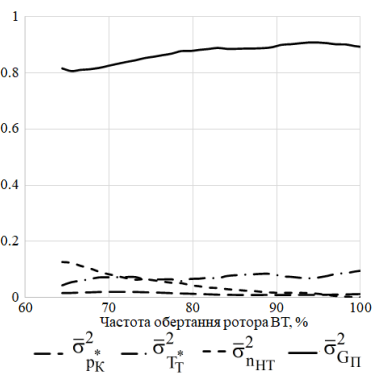


Рис. 4. Відносні дисперсії складових інструментальної похибки оцінки тяги

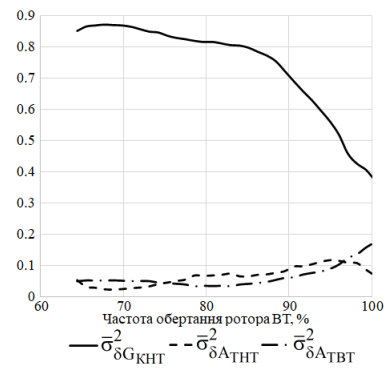


Рис. 5. Відносні дисперсії складових методичної похибки оцінки тяги

Оцінювання за відхиленнями тиску за компресором

$$F = 1,805;$$

$$FH_Y - H_Z = \begin{pmatrix} -0,05 & -0,365 & 0,23 & 0,312 \\ -1,779 & 0,629 & 1,045 & -0,445 \end{pmatrix};$$

$$\sigma^2(\varepsilon_Z^M) = 5,136; \quad \sigma(\varepsilon_Z^M) = 2,266\%;$$

$$\sigma^2(\varepsilon_Z^i) = \left(f_{PK}^* \cdot \sigma_{PK}^* \right)^2 = (1,805 \cdot 0,2)^2 = 0,1303.$$

$$\sigma(\varepsilon_Z^i) = 0,361\%;$$

$$\sigma^2(\varepsilon_Z) = \sigma^2(\varepsilon_Z^M) + \sigma^2(\varepsilon_Z^i) = 5,267;$$

$$\sigma(\varepsilon_Z) = 2,295\%.$$

Основним чинником методичної похибки при використанні тиску за компресором є відхилення пропускної здатності турбін

$$\sigma_{\delta A_{\text{ТВТ}}}^2 = 3,165; \sigma_{\delta A_{\text{ТНТ}}}^2 = 1,092.$$

Оцінювання за відхиленнями частоти обертання ротора НТ

$$F = 2,195;$$

$$F\mathbf{H}_Y - \mathbf{H}_Z = \begin{pmatrix} -1,03 & 0,156 & -0,147 & 0,298 \\ -0,122 & 0,366 & -0,084 & 0,198 \end{pmatrix};$$

$$\sigma^2(\varepsilon_Z^M) = 1,39; \sigma(\varepsilon_Z^M) = 1,179\%.$$

$$\sigma^2(\varepsilon_Z^i) = (f_{\text{НТ}} \sigma_{\text{НТ}})^2 = (2,195 \cdot 0,05)^2 = 0,012;$$

$$\sigma(\varepsilon_Z^i) = 0,11\%;$$

$$\sigma^2(\varepsilon_Z) = \sigma^2(\varepsilon_Z^M) + \sigma^2(\varepsilon_Z^i) = 1,402;$$

$$\sigma(\varepsilon_Z) = 1,184\%.$$

Основним чинником методичної похибки при використанні частоти обертання ротора НТ є відхилення витрати повітря в КНТ $\sigma_{\delta G_{\text{КНТ}}}^2 = 1,061$

Обидва скорочених склади вимірюваних параметрів порівняно з розширеним дають більшу похибку оцінювання через необхідність обрання лише одного головного напрямку замість чотирьох. Більшу точність оцінювання тяги забезпечує використання вимірювання частоти обертання ротора НТ. Так само як і для розширеного складу вимірюваних параметрів, найбільший внесок у методичну похибку спричиняє відхилення витрати повітря КНТ.

Аналіз розрахунків:

1. Запропонований метод на розглянутому прикладі забезпечує прийнятні значення числа обумовленості матриць.

2. Суттєва відмінність між значеннями матриць F_0 та F вказує на необхідність урахування похибок вимірювання. З рис. 2 видно, що врахування похибок вимірювання призвело до коригування коефіцієнтів матриці F . Абсолютні значення коефіцієнтів при відхиленнях тиску за компресором, температури за турбіною та витрати палива були зменшені, а коефіцієнти при відхиленні частоти обертання ротора НТ збільшено. Це пояснюється перерозподілом ваг на користь тих параметрів, які вимірюються більш точно.

3. На рис. 3 наведена залежність СКВ похибок від режимного параметра. В усьому діапазоні робочих режимів значну частину загальної похибки складає методична.

4. На рис. 5 зображена залежність відносної дисперсії складових методичної похибки від

режимного параметра. Показано лише три складові, оскільки порядок величин інших п'яти співставний з $\sigma_{\delta A_{\text{ТВТ}}}^2, \sigma_{\delta A_{\text{ТНТ}}}^2$. Основним чинником методичної

похибки є відхилення $\delta G_{\text{КНТ}}$. Це пояснюється такими причинами: серед складу вимірюваних параметрів немає параметрів, які добре відтворюють цей дефект, а відхилення витрати повітря через вентилятор має прямий вплив на тягу.

5. На рис. 4 зображена залежність відносної дисперсії складових інструментальної похибки. Похибка вимірювання витрати палива домінує у формуванні інструментальної похибки. Це обумовлено не лише тим, що СКВ похибки вимірювання витрати палива є найбільшою серед вимірюваних параметрів. Застосований метод мінімізує загальну похибку, враховуючи похибки вимірювання, надаючи більшу вагу параметрам із вищою точністю. Однак береться до уваги й ступінь інформативності кожного вимірюваного параметра. Таким чином витрата палива є прикладом параметра, який є одночасно інформативним і недостатньо точно вимірюваним.

Висновки

1. Для ефективного вирішення задач керування та моніторингу двигуна необхідно знати ряд параметрів робочого процесу, які безпосередньо не вимірюються. Серед причин – складність організації вимірювань, обмежений ресурс датчиків, висока вартість елементів вимірювальної системи, захарашення проточної частини датчиками.

2. Параметри робочого процесу двигуна залежать від умов роботи, а також від індивідуальних особливостей (які пов'язані з похибками виготовлення та збирання деталей та вузлів), а також від зміни технічного стану вузлів у процесі експлуатації.

3. Відомі методи непрямих вимірювань, призначені для визначення невимірюваних параметрів систем за результатами вимірювання інших параметрів, проте аналіз показує, що багато з них не можуть бути використані для розв'язання задачі, що розглядається, оскільки вимагають визначення відхилень параметрів технічного стану вузлів двигуна від нормальних значень.

4. Запропонований підхід можна інтерпретувати як статичну адаптацію оцінки Калмана–Бюсі, в якій динамічний компонент свідомо вилучено як надлишковий з огляду на статичний характер задачі. Метод орієнтований на безпосереднє оцінювання невимірюваного параметра з урахуванням шумів вимірювання та обмеженість

кількості вимірюваних параметрів, і є прикладною реалізацією регуляризованої форми зваженого методу найменших квадратів.

5. За запропонованим методом виконано розрахунки та проаналізовано похибки та чинники, які мають найбільший вплив.

Внесок авторів: формулювання проблеми – **С. В. Єпіфанов, О. В. Бондаренко**; огляд та аналіз інформаційних джерел – **С. В. Єпіфанов**; виконання розрахунків – **О. В. Бондаренко**; аналіз отриманих результатів і формулювання висновків – **С. В. Єпіфанов, О. В. Бондаренко**.

Конфлікт інтересів

Автори повідомляють, що вони не мають конфлікту інтересів щодо цієї публікації, включаючи фінансові, особисті, авторські та інші інтереси, що можуть вплинути на дослідження та його результати, представлені в цій статті.

Фінансова підтримка

Дослідження виконано без фінансової підтримки.

Доступність даних

Рукопис не має пов'язаних даних.

Використання штучного інтелекту

Автори підтверджують, що при підготовці цієї публікації вони не використовували методи штучного інтелекту.

Усі автори прочитали та погодилися з опублікованою версією рукопису.

Література

1. Єпіфанов, С. В. Формування динамічних моделей газотурбінних двигунів для використання в системах автоматичного керування та контролю [Текст] / С. В. Єпіфанов, & О. В. Бондаренко / *Авіаційно-космічна техніка і технологія*. – 2023. – №4 – С. 50-61. DOI: 10.32620/aktt.2023.4.06.

2. Status of Gas Turbine Performance Degradation [Text] / R. Kurz, K. Brun, M. Pinelli, & A. Suman // *Proc. of ASME Turbo Expo 2024 Turbomachinery Technical Conference and Exposition*. GT2024-122216. – 2024. – 16 p. DOI: 10.1115/GT2024-122216.

3. Signatures of Compressor and Turbine Faults in Gas Turbine Performance Diagnostics. A Review [Text] / K. Mathioudakis, A. Alexiou, N. Aretakis, & C. Romesis // *Energies*. – 2024. – Vol. 3409, No. 17. – 22 p. DOI: 10.3390/en17143409.

4. Simultaneous Fault Diagnostics for Three-shaft Industrial Gas Turbine [Text] / W. Salilew, S. Gilani, T. Lemma, A. Fentaye, & et al. // *Machines*. – 2023. – Vol. 832, No. 11. – 42 p. DOI: 10.3390/machines11080832.

5. Linear Model of a Turboshift Aero-engine Including Components Degradation for Control-oriented Applications [Text] / T. Castiglione, D. Perrone, L. Strafella, A. Fiscarella, & et al. // *Energies*. – 2023. – Vol. 2634, No. 16. – 18 p. DOI: 10.3390/en16062634.

6. Ben-Israel, A. Generalized Inverses: Theory and Applications [Text] / A. Ben-Israel, & T. N. E. Greville. – New York : Springer. – 2003. – 420 p. DOI: 10.1007/b97366.

7. Canty, A. J. Weighted Least Squares [Text] / A. J. Canty. – McMaster University. – 2015. – 25 p.

8. Hastie, T. The Elements of Statistical Learning: Data Mining, Inference, and Prediction [Text] / T. Hastie, R. Tibshirani, & J. Friedman. – 2nd ed. – New York: Springer. – 2009. – 745 p. DOI: 10.1007/978-0-387-84858-7.

9. Jolliffe, I. T. Principal Component Analysis [Text] / I. T. Jolliffe. – 2nd ed. – New York : Springer. – 2002. – 487 p. DOI: 10.1007/b98835.

10. Hoff, P. Best Linear Unbiased Estimation [Text] / P. Hoff. – Duke University. – 2022. – 30 p.

11. Grewal, M. S. Kalman Filtering: Theory and Practice Using MATLAB [Text] / M. S. Grewal, & A. P. Andrews. – 4th ed. – Hoboken: Wiley. – 2014. – 584 p. DOI: 10.1002/9781118984987.

12. Simon, D. Optimal State Estimation: Kalman, H Infinity, and Nonlinear Approaches [Text] / D. Simon. – Wiley-Interscience. – 2006. – 552 p. DOI: 10.1002/0470045345.

13. Bayesian Data Analysis [Text] / A. Gelman, J. B. Carlin, H. S. Stern, & et al. – 3rd ed. – Boca Raton: Chapman & Hall/CRC. – 2013. – 675 p. DOI: 10.1201/b16018.

14. Higham, N. J. Accuracy and Stability of Numerical Algorithms [Text] / N. J. Higham. – 2nd ed. – Philadelphia: SIAM. – 2002. – 680 p. DOI: 10.1137/1.9780898718027.

15. Golub, G. H. Matrix Computations [Text] / G. H. Golub, & C. F. Van Loan. – 4th ed. – Baltimore: Johns Hopkins University Press. – 2013. – 756 p. DOI: 10.56021/9781421407944.

16. Estimation of Gas Turbine Unmeasured Variables for an Online Monitoring System [Text] / I. Loboda, L. A. Miró Zárate, & S. Yepifanov, & et al. // *International Journal of Turbo and Jet Engines*. – 2018. – P. 413–428. DOI: 10.1515/tjj-2017-0065.

Reference

1. Yepifanov, S., & Bondarenko, O. Formuvannya dynamichnykh modeley hazoturbinnnykh dvyhuniv dlya

vykorystannya v systemakh avtomatychnoho keruvannya ta kontrolyu [Formation of dynamic models of gas turbine engines for use in automatic control and diagnostic systems]. *Aviacijno-kosmicna tehnika i tehnologia – Aerospace technic and technology*, 2023, no. 4, pp. 50-61. DOI: 10.32620/aktt.2023.4.06. (in Ukrainian).

2. Kurz, R., Brun, K., Pinelli, M., & Suman, A. Status of Gas Turbine Performance Degradation. *Proc. of ASME Turbo Expo 2024 Turbomachinery Technical Conference and Exposition. GT2024-122216*, 2024. 16 p. DOI: 10.1115/GT2024-122216.

3. Mathioudakis, K., Alexiou, A., Aretakis, N., & Romesis, C. Signatures of Compressor and Turbine Faults in Gas Turbine Performance Diagnostics. A Review. *Energies*, 2024, vol. 3409, no. 17. 22 p. DOI: 10.3390/en17143409.

4. Salilew, W. M., Gilani, S. I., Lemma, T. A., Fentaye, A. D., & Kyprianidis, K. G. Simultaneous Fault Diagnostics for Three-shaft Industrial Gas Turbine. *Machines*, 2023, vol. 832, no. 11. 42 p. DOI: 10.3390/machines11080832.

5. Castiglione, T., Perrone, D., Strafella, L., Ficarella, A., & Bova, S. Linear Model of a Turboshaft Aero-engine Including Components Degradation for Control-oriented Applications. *Energies*, 2023, vol. 2634, no. 16. 18 p. DOI: 10.3390/en16062634.

6. Ben-Israel, A., & Greville, T. N. E. *Generalized Inverses: Theory and Applications*. New York, Springer, 2003. 420 p. DOI: 10.1007/b97366.

7. Canty, A. J. *Weighted Least Squares*. McMaster University, 2015. 25 p.

8. Hastie, T., Tibshirani, R., & Friedman, J. *The Elements of Statistical Learning: Data Mining, Inference, and Prediction*. New York, Springer, 2009. 745 p. DOI: 10.1007/978-0-387-84858-7.

9. Jolliffe, I. T. *Principal Component Analysis*. New York, Springer, 2002. 487 p. DOI: 10.1007/b98835.

10. Hoff, P. *Best Linear Unbiased Estimation*. Duke University, 2022. 30 p.

11. Grewal, M. S., & Andrews, A. P. *Kalman Filtering: Theory and Practice Using MATLAB*. Hoboken: Wiley, 2014. 584 p. DOI: 10.1002/9781118984987.

12. Simon, D. *Optimal State Estimation: Kalman, H Infinity, and Nonlinear Approaches*. Wiley-Interscience, 2006. 552 p. DOI: 10.1002/0470045345.

13. Gelman, A., Carlin, J. B., Stern, H. S., Dunson, D. B., Vehtari, A., & Rubin, D. B. *Bayesian Data Analysis*. Boca Raton, Chapman & Hall/CRC, 2013. 675 p. DOI: 10.1201/b16018.

14. Higham, N. J. *Accuracy and Stability of Numerical Algorithms*. Philadelphia: SIAM, 2002. 680 p. DOI: 10.1137/1.9780898718027.

15. Golub, G. H., & Van Loan, C. F. *Matrix Computations*. Baltimore, Johns Hopkins University Press, 2013. 756 p. DOI: 10.56021/9781421407944.

16. Loboda, I., Miró Zárate, L. A., Yepifanov, S., Herrera, C. M., & Pérez Ruiz J. L. Estimation of Gas Turbine Unmeasured Variables for an Online Monitoring System. *International Journal of Turbo and Jet Engines*, 2018, vol. 37, iss. 4, pp. 413-428. DOI: 10.1515/tjj-2017-0065.

Надійшла до редакції 08.12.2024, розглянута на редколегії 17.03.2025

METHOD FOR ESTIMATING NON-MEASURABLE PARAMETERS OF GAS TURBINE ENGINES CONSIDERING VARIATIONS IN TECHNICAL CONDITION

Sergiy Yepifanov, Oleksii Bondarenko

The subject of this study is the estimation of non-measurable parameters of a gas turbine engine's operating process based on a limited set of measured parameters. The relevance of this research arises from the practical impossibility of measuring several critical engine parameters under operating conditions, such as thrust, turbine inlet gas temperature, among others, which are essential for control and diagnostics tasks. These parameters must be continuously estimated using only limited available data. This requires the use of a mathematical model of the engine's operating process, with consideration of measurement noise, the restricted set of measured parameters, and the influence of the engine's technical condition. The proposed approach does not require the estimation of the full vector of internal health parameters. Instead, it focuses on the direct estimation of non-measurable quantities, which reduces computational complexity and prevents error accumulation during calculation. The objective of the study is to develop a method that minimizes the estimation error of the target non-measurable parameter under the conditions of limited measurements, multicollinearity in the mathematical model, and varying measurement accuracy. To achieve this, matrix algebra methods are employed, including pseudoinverse matrices, singular value decomposition (SVD), and weighted least squares (WLS). The following results have been obtained: a formulation of the optimal estimation problem for engine parameters at steady-state modes; an analytical solution representing the target transformation

matrix as a product of matrices, where each factor separately accounts for the relation between measured and non-measurable parameters and the influence of measurement noise; and a demonstration that the proposed method provides high numerical stability. The scientific novelty lies in formulating the problem in a way that avoids estimating the full state vector and in applying a condition number minimization procedure by discarding small singular values. The practical value of the method lies in its applicability to both direct control algorithms based on non-measurable parameters, and onboard estimation and diagnostic algorithms that operate effectively with limited measurement data and under constrained computational resources.

Keywords: turbofan engine; thrust; gas temperature; mathematical model; non-measurable parameters; health parameters; estimation.

Спіфанов Сергій Валерійович – д-р техн. наук., проф., зав. каф. конструкції авіаційних двигунів, Національний аерокосмічний університет ім. М. Є. Жуковського «Харківський авіаційний університет», Харків, Україна.

Бондаренко Олексій Васильович – асп. каф. конструкції авіаційних двигунів, Національний аерокосмічний університет ім. М. Є. Жуковського «Харківський авіаційний університет», Харків, Україна.

Sergiy Yepifanov – Doctor of Sciences (Engineering), Professor, Head of the Aircraft Engine Design Department, National Aerospace University “Kharkiv Aviation Institute”, Kharkiv, Ukraine, e-mail: s.yepifanov@khai.edu, ORCID: 0000-0003-0533-9524, Scopus Author ID: 6506749318.

Oleksii Bondarenko – PhD Student of the Aircraft Engine Design Department, National Aerospace University “Kharkiv Aviation Institute”, Kharkiv, Ukraine, e-mail: o.v.bondarenko@khai.edu, ORCID: 0000-0001-7943-8555.