

О. В. БОНДАРЕНКО

Національний аерокосмічний університет ім. М. Є. Жуковського
«Харківський авіаційний інститут», Харків, Україна

ІДЕНТИФІКАЦІЯ ДИНАМІЧНИХ ХАРАКТЕРИСТИК ДВОВАЛОВОГО ТУРБОРЕАКТИВНОГО ДВОКОНТУРНОГО ДВИГУНА

Математичні моделі є важливим інструментом проектування двигунів та їх систем автоматичного керування. Моделі використовуються в імітаційному моделюванні об'єкта керування, при аналізі, синтезі та напівнатурному моделюванні, а також при синтезі алгоритмів керування двигунами. Важливою є точність використовуваної моделі, яку неможливо забезпечити без індивідуального налаштування під певний двигун. Перспективним є напрямок розвитку, пов'язаний із впровадженням адаптивних систем автоматичного керування (САК). Ключовою особливістю цих систем є алгоритми узгодження, самоналаштування математичної моделі під реальні характеристики двигуна. В роботі розглянуто формування моделей із використанням методу найменших квадратів (МНК) на основі вимірюваних параметрів робочого процесу двигуна. Актуальною проблемою є забезпечення достатності використаної інформації для досягнення заданого рівня точності. Цю перевірку необхідно виконувати апріорно (для прогнозування складу режимів роботи двигуна та об'єму реєстрованої інформації), а також апостеріорно. Складність оцінювання динамічних характеристик двовального двигуна полягає в більшій їх кількості порівняно з газогенератором. Формування моделі параметрів двовального двигуна можна виконати багатьма способами. У цій роботі використано таку модель двовального двигуна, параметри якої відображають власні динамічні властивості двигуна і динаміку по впливах та окремо характеризують коливальність. **Предметом** дослідження є процес формування динамічної математичної моделі (ММ) двовального газотурбінного двигуна із використанням реальних даних для наступного застосування цієї моделі для розв'язання задач керування та діагностування бортовими системами. **Метою** є визначення залежності похибок оцінювання динамічних параметрів математичних моделей від впливових факторів в умовах реальної зміни цих факторів за часом. **Задачі**, що розглянуто в роботі: формування динамічної моделі двовального двигуна та скорочення кількості незалежних динамічних характеристик, формування МНК-функціоналу для задачі оцінювання, визначення похибок оцінювання динамічних коефіцієнтів; аналіз факторів, що впливають, а також визначення залежностей між факторами та похибками. Для цього використовуються **методи** теорії лінійних динамічних систем та методи статистичного оцінювання. Отримано наступні **результати**: визначено співвідношення для розрахунку похибки оцінювання динамічних характеристик двовального двигуна, коли витрата палива змінюється стрибкоподібно. Досліджено на прикладі реального двигуна та виявлено закономірності між динамічними характеристиками, що спрощують оцінювання параметрів. **Наукова й практична новизна**: вперше отримано співвідношення, що визначають похибки оцінювання сталих часу за заданими значеннями похибок вимірювання, амплітудою витрати палива, частотою та тривалістю спостереження, а також динамічних характеристик системи. Ці співвідношення надано в безрозмірних координатах і можуть застосовуватися до будь-якого двовального турбореактивного двигуна під час планування експериментів і налагодження бортових алгоритмів самоналаштування моделей.

Ключові слова: двовальний газотурбінний двигун; автоматичне керування; динамічна модель; адаптивна модель, самоналаштування, ідентифікація.

Вступ

Математичні моделі є важливим інструментом проектування двигунів та їх систем, насамперед – системи автоматичного керування (САК) та діагностування. Традиційною сферою використання моделей є імітаційне моделювання об'єкта керування при аналізі, синтезі та напівнатурному моделюванні САК [1]. Нині розвинено напрямок, пов'язаний із

використанням математичних моделей в алгоритмах керування двигунами (Model-based Control) [2]. Успішне застосування моделей в алгоритмах керування можливе при забезпеченні точності використовуваної моделі. Невідповідність моделі характеристикам реального двигуна, що зумовлена індивідуальними особливостями двигуна та його безперервною деградацією, необхідно усувати за допомогою корекції характеристик моделі.

У 1989 р. Luppold та ін. [3] запропонували концепцію STORM (Self-Tuned On-board Real-time engine Model). Вони використовували LKF (лінійний фільтр Калмана) для оцінювання параметрів, що характеризують деградацію двигуна, та корекції бортової моделі. З цього часу бортова модель отримала широке застосування.

До складу вимірюваних параметрів зазвичай входять частоти обертання, температура та тиск робочого тіла в проточній частині. Вхідні параметри включають незалежні параметри двигуна та зовнішніх умов. Це зазвичай витрата палива, положення КПП і РНА, висота та число Маха польоту та ін. Модель двигуна виконує розрахунок параметрів, які представляють базову характеристику та порівнюються з вимірними значеннями для отримання вектора відхилень.

Вектор відхилень містить інформацію про вплив погіршення стану, шум вимірювань, зміщення показань датчиків та похибки моделювання. Вектор складається з набору параметрів технічного стану, таких як адіабатні ККД каскадів компресора та турбіни, витрата повітря та площі сопел. Цей вектор іноді розглядається як набір параметрів, який використовується для налаштування моделі, щоб наблизити значення параметрів, що моделюються, до вимірюваних. При роботі системи в замкненому контурі ці параметри забезпечують середні значення похибок рівними нулю. В результаті формується набір віртуальних датчиків, які зазвичай реалізуються в системі FADEC і можуть бути використані для виявлення та пошуку несправностей.

Зазвичай застосовувані моделі [4] містять статичну та динамічну складові (підмоделі). Статична підмодель представляє залежності параметрів двигуна від режиму роботи та польотних умов.

Динамічна модель представляє систему диференціальних та алгебраїчних рівнянь у відхиленнях, які зазвичай описують динаміку об'єкта в просторі станів:

$$\dot{\vec{X}} = A \cdot \vec{X} + B \cdot \Delta \vec{U}; \quad (1)$$

$$\Delta \vec{Y} = C \cdot \vec{X} + D \cdot \Delta \vec{U}, \quad (2)$$

де \vec{X} – вектор стану (зазвичай до нього входять частоти обертання роторів);

\vec{Y} – вектор інших параметрів двигуна (температура, тиск, тяга та ін.);

\vec{U} – вектор керуючих впливів (у найпростішому випадку – витрата палива);

Δ – відхилення від значення, що відповідає статичній моделі.

Газотурбінний двигун є нелінійним об'єктом, головним чином унаслідок нелінійності рівнянь термодинаміки та нелінійності характеристик вузлів. Тому ця динамічна модель має лінійну структуру, а нелінійність об'єкта враховується тим, що її коефіцієнти (елементи матриць A, B, C і D) залежать від режиму роботи двигуна. Саме ці залежності містять у собі інформацію про нелінійність.

У попередній роботі [6] авторами цієї статті розглянуто задачу визначення залежності оцінювання похибок коефіцієнтів динамічної моделі одновального двигуна від основних впливових факторів:

- інтенсивності зміни вхідної керуючої дії;
- амплітуди зміни вхідної дії;
- частоти реєстрації;
- похибок вимірювань;
- похибок використовуваної апріорної

інформації про модель.

Отримано узагальнені характеристики, які дозволяють визначати похибки оцінювання сталої часу одновального двигуна в заданих умовах його роботи у випадку використання стрибкоподібної зміни витрати палива.

Проте переважна більшість двигунів, що знаходяться нині в експлуатації, є двоваловими, тому в цій роботі розглянуто похибки оцінювання динамічних характеристик двовального ГТД при використанні вимірювань частот обертання роторів. Додатково виконано аналіз максимальних значень похибок оцінювання при необмеженому часі спостереження, коли інформативність наближається до нуля.

1. Формування динамічних параметрів двигуна

Запишемо систему рівнянь (1) для двовального двигуна у вигляді

$$\begin{cases} T_1 \dot{n}_1 + \Delta n_1 = K_{n12} \Delta n_2 + K_{G1} \Delta G; \\ T_2 \dot{n}_2 + \Delta n_2 = K_{n21} \Delta n_1 + K_{G2} \Delta G, \end{cases} \quad (3)$$

де T_1 і T_2 – сталі часу роторів низького та високого тиску відповідно;

K_G – коефіцієнти підсилення витрати палива і-го ротора (1 – низького тиску, 2 – високого тиску);

ΔG – зміна витрати палива в основній камері згоряння,

Δn_i – зміна частоти обертання і-го ротора;

K_{nij} – коефіцієнти впливу j-го ротора на i-й ротор.

Виконавши перетворення рівнянь (3), отримаємо диференціальні рівняння для кожного ротора:

$$\left\{ \begin{aligned} & \frac{T_1 T_2}{1 - K_{n12} K_{n21}} \ddot{n}_1 + \frac{T_1 + T_2}{1 - K_{n12} K_{n21}} \dot{n}_1 + \Delta n_1 = \\ & = \frac{K_{G1} + K_{G2} K_{n12}}{1 - K_{n12} K_{n21}} \left[\frac{T_2 K_{G1}}{K_{G1} + K_{G2} K_{n12}} \dot{G} + \Delta G \right]; \\ & \frac{T_1 T_2}{1 - K_{n12} K_{n21}} \ddot{n}_2 + \frac{T_1 + T_2}{1 - K_{n12} K_{n21}} \dot{n}_2 + \Delta n_2 = \\ & = \frac{K_{G2} + K_{G1} K_{n21}}{1 - K_{n12} K_{n21}} \left[\frac{T_1 K_{G2}}{K_{G2} + K_{G1} K_{n21}} \dot{G} + \Delta G \right]. \end{aligned} \right. \quad (4)$$

Введемо позначення:

$$\begin{aligned} \tau^2 &= \frac{T_1 T_2}{1 - K_{n12} K_{n21}}; 2\tau\xi = \frac{T_1 + T_2}{1 - K_{n12} K_{n21}}; \\ K_G^{n1} &= \frac{K_{G1} + K_{G2} K_{n12}}{1 - K_{n12} K_{n21}}; K_G^{n2} = \frac{K_{G2} + K_{G1} K_{n21}}{1 - K_{n12} K_{n21}}; \\ \tau_{G1}^{n1} &= \frac{T_2 K_{G1}}{K_{G1} + K_{G2} K_{n12}}; \tau_{G1}^{n2} = \frac{T_1 K_{G2}}{K_{G2} + K_{G1} K_{n21}}. \end{aligned}$$

Тоді модель (4) можемо записати як

$$\left\{ \begin{aligned} & \tau^2 \ddot{n}_1 + 2\tau\xi \dot{n}_1 + \Delta n_1 = K_G^{n1} \left(\tau_{G1}^{n1} \dot{G} + \Delta G \right); \\ & \tau^2 \ddot{n}_2 + 2\tau\xi \dot{n}_2 + \Delta n_2 = K_G^{n2} \left(\tau_{G1}^{n2} \dot{G} + \Delta G \right). \end{aligned} \right. \quad (5)$$

Аналізуючи систему (5), можна виділити такі комплекси параметрів динамічної моделі:

$\left\{ \begin{matrix} \tau \\ \xi \end{matrix} \right\}$ – значення, що відображають власні динамічні властивості двигуна;

K_G^{n1}, K_G^{n2} – значення, що відображають статичні властивості двигуна (вони можуть бути визначені зі статичних характеристик двигуна);

$\left\{ \begin{matrix} \tau_{G1}^{n1} \\ \tau_{G1}^{n2} \end{matrix} \right\}$ – значення, що відображають динаміку

за впливами.

Форма запису (5) має ряд переваг:

1) У такій формі запису розділені статичні та динамічні властивості двигуна.

2) Динамічні властивості поділено на параметри, що відображають незалежно тривалість та коливальність процесу. Тривалість процесу відображає еквівалентна стала часу τ , що має розмірність часу. Коливальність процесу відображає безрозмірний відносний коефіцієнт загасання ξ . Якщо $\xi=0$ – процес не згасає, $0 < \xi < 1$ – коливальний, $\xi \geq 1$ – аперіодичний.

Ліві частини рівнянь для частот обертання є однаковими, а це означає, що власні властивості будь-якої з частот обертання є ідентичними, а

відмінність поведінки визначають коефіцієнти правої частини рівняння. Таким чином, як універсальне для будь-якого параметра використаємо диференціальне рівняння виду

$$\tau^2 \ddot{n} + 2\tau\xi \dot{n} + \Delta n = K_G \left(\tau_{G1} \dot{G} + \Delta G \right). \quad (6)$$

2. Отримання розв'язку рівняння та скорочення кількості незалежних динамічних характеристик

Розв'яжемо рівняння (6) при ступінчастій зміні витрати палива:

$$\Delta G = \begin{cases} 0, & t=0; \\ G_0, & t>0, \end{cases} \quad (7)$$

$$n(0) = 0; \dot{n}(0) = K_G \frac{\tau_{G1}}{\tau^2}. \quad (8)$$

- для $\xi < 1$:

$$n(t) = K_G G_0 \left(\begin{aligned} & 1 - e^{-\frac{\xi t}{\tau}} \left[\cos \left(\sqrt{1 - \xi^2} \cdot \frac{t}{\tau} \right) + \right. \\ & \left. \frac{\xi - \frac{\tau_{G1}}{\tau}}{\sqrt{1 - \xi^2}} \sin \left(\sqrt{1 - \xi^2} \cdot \frac{t}{\tau} \right) \right] \right) = \end{aligned}$$

$$= K_G G_0 \left(1 - e^{-\frac{\xi t}{\tau}} \left[\begin{aligned} & \left[\cos \left(\sqrt{1 - \xi^2} \cdot \bar{t} \right) + \right. \right. \\ & \left. \left. \frac{\xi - \frac{\tau_{G1}}{\tau}}{\sqrt{1 - \xi^2}} \sin \left(\sqrt{1 - \xi^2} \cdot \bar{t} \right) \right] \right] \right); \end{aligned}$$

- для $\xi = 1$:

$$n(t) = K_G G_0 \left\{ 1 - e^{-\frac{t}{\tau}} \left(1 + \left(1 - \frac{\tau_{G1}}{\tau} \right) \frac{t}{\tau} \right) \right\} = \quad (9)$$

$$= K_G G_0 \left\{ 1 - e^{-\bar{t}} \left(1 + \left(1 - \frac{\tau_{G1}}{\tau} \right) \bar{t} \right) \right\};$$

- для $\xi > 1$:

$$n(t) = K_G G_0 \left\{ 1 - \frac{1}{2\sqrt{\xi^2 - 1}} \left(\left[\frac{\tau_{G1}}{\tau} - \left(\xi - \sqrt{\xi^2 - 1} \right) \right] \cdot e^{-\frac{t}{\tau} \left(\xi + \sqrt{\xi^2 - 1} \right)} + \left[-\frac{\tau_{G1}}{\tau} + \left(\xi + \sqrt{\xi^2 - 1} \right) \right] \cdot e^{-\frac{t}{\tau} \left(\xi - \sqrt{\xi^2 - 1} \right)} \right) \right\} =$$

$$= K_G G_0 \left\{ 1 - \frac{1}{2\sqrt{\xi^2 - 1}} \cdot \left(\left[\frac{\tau_{G1}}{\tau} - \left(\xi - \sqrt{\xi^2 - 1} \right) \right] \cdot e^{-\bar{t} \left(\xi + \sqrt{\xi^2 - 1} \right)} + \left[-\frac{\tau_{G1}}{\tau} + \left(\xi + \sqrt{\xi^2 - 1} \right) \right] \cdot e^{-\bar{t} \left(\xi - \sqrt{\xi^2 - 1} \right)} \right) \right\}$$

Для розглянутого прикладу залежності динамічних коефіцієнтів від режиму роботи двигуна мають вигляд, показаний на рис. 1-3. Кожна з показаних на цих рисунках точок отримана окремо для кожного режиму за допомогою вихідної нелінійної повузлової статичної моделі двигуна розрахунковими методами, описаними в роботі [4].

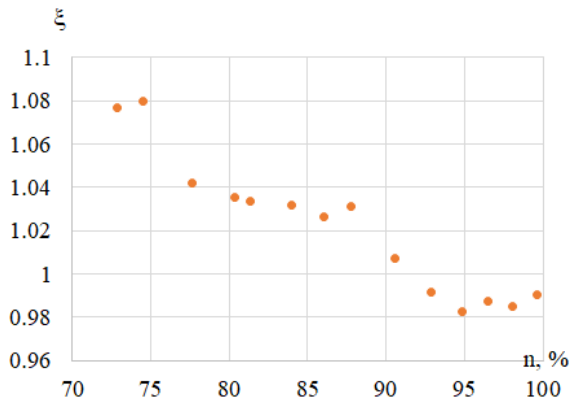


Рис. 1. Коефіцієнт ξ за режимами

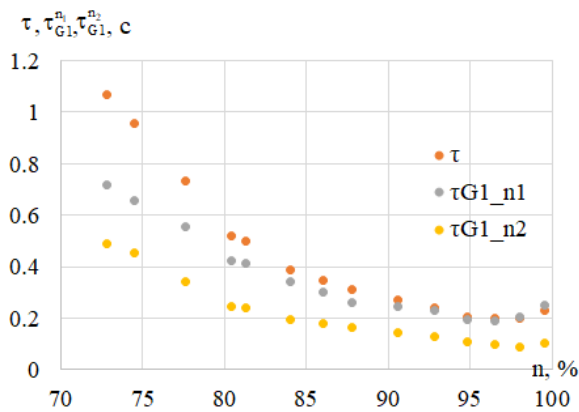


Рис. 2. Сталі часу $\tau, \tau_{G1}^{n1}, \tau_{G1}^{n2}$ за режимами

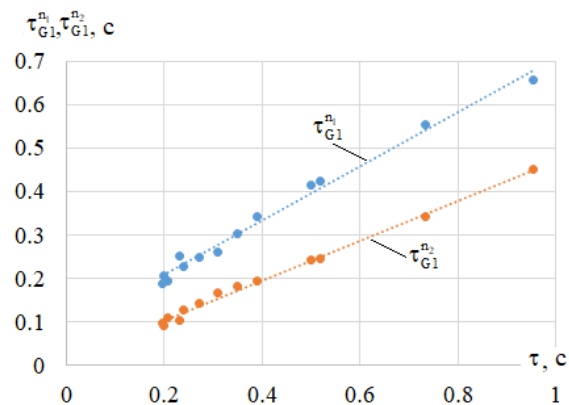


Рис. 3. Залежність $\tau_{G1}^{n1}, \tau_{G1}^{n2}$ від τ

Аналіз коефіцієнтів, поданих на рис. 1-3, показує:

– відносний коефіцієнт згасання ξ в усьому діапазоні робочих режимів є близьким до 1;

– спостерігається наявність залежності $\tau_{G1}^{n1}, \tau_{G1}^{n2}$ від τ .

Це дозволяє зробити декілька кроків до спрощення:

1) використати розв’язок при $\xi=1$, і тим самим виключити один з динамічних параметрів із переліку незалежних;

2) вид наведених вище розв’язків надає можливість використовувати як аргументи відносні параметри $\bar{t} = \frac{t}{\tau}, \bar{\tau}_{G1} = \frac{\tau_{G1}}{\tau}$;

3) сталість $\bar{\tau}_{G1}$ дозволяє виключити з переліку незалежних ще одну змінну.

Коефіцієнти підсилення подачі палива можна визначити за статичними характеристиками двигуна – залежностями частот обертання роторів від витрати палива.

3. Аналіз задачі оцінювання динамічних характеристик двовального двигуна при ступінчастій зміні витрати палива

Розглянемо завдання оцінювання динамічних коефіцієнтів моделі одного ротора за його перехідною характеристикою.

Застосуємо для визначення значень постійних часу метод найменших квадратів (МНК). Тоді оцінка $\hat{\theta} = [\tau \ \tau_{G1}]^T$ визначається результатом мінімізації

$$\text{МНК-функціоналу } \Phi(\bar{\theta}) = \sum_{j=1}^N [n_j - n(\bar{\theta}, t_j)]^2.$$

Унаслідок нелінійного характеру математичної моделі ця задача мінімізації є нелінійною. Для її чисельного розв’язання необхідно використовувати ітераційний метод, відповідно до якого на кожному етапі математична модель лінеаризується за шуканими параметрами і виконується корекція оцінки:

$$\hat{\theta}^i = \hat{\theta}^{i-1} + \delta \hat{\theta}^i,$$

де $\delta \hat{\theta}^i = \left(H^{(i-1)} T H^{(i-1)} \right)^{-1} H^{(i-1)} T \delta \bar{n}^i$ - лінійна МНК-оцінка коригуючої поправки;

H^{i-1} - $(nx2)$ - матриця чутливості, що відповідає поточній оцінці $\hat{\theta}^{i-1}$;

$\delta \bar{n}^i$ - $(nx1)$ - вектор відхилень вимірюного значення від значень, розрахованих з використанням математичної моделі;

Похибки оцінок визначаються коваріаційною матрицею

$$P(\bar{\theta}) = \begin{bmatrix} \sigma_{\tau}^2 & \text{cov}(\tau, \tau_{G1}) \\ \text{cov}(\tau_{G1}, \tau) & \sigma_{\tau_{G1}}^2 \end{bmatrix} = \sigma_n^2 (H^T H)^{-1} = \sigma_n^2 \begin{bmatrix} \sum_{j=1}^N \left(\frac{\partial n}{\partial \tau}\right)_j^2 & \sum_{j=1}^N \left(\frac{\partial n}{\partial \tau}\right)_j \left(\frac{\partial n}{\partial \tau_{G1}}\right)_j \\ \sum_{j=1}^N \left(\frac{\partial n}{\partial \tau_{G1}}\right)_j \left(\frac{\partial n}{\partial \tau}\right)_j & \sum_{j=1}^N \left(\frac{\partial n}{\partial \tau_{G1}}\right)_j^2 \end{bmatrix}^{-1}.$$

Для визначення сталої часу будемо використовувати значення частоти обертання n_j , зареєстровані в моменти часу $t_j, j=1, \dots, N$ з постійним інтервалом спостереження Δt .

Оцінка, отримана методом найменших квадратів (МНК), мінімізує функціонал

$$\Phi(\Delta\tau) = \sum_{j=1}^N [n_j - n_{\text{mod}}(\bar{\theta}, t_j)]^2.$$

Приймаючи, що структурні похибки моделі є відсутніми, підставимо в МНК-функціонал (6) значення

$$n_{\text{mod}}(\bar{\theta}, t_j) = n_{\text{mod}}(\bar{\theta}^0, t_j) - \left(\frac{\partial n}{\partial \tau}\right)_j \Delta\tau - \left(\frac{\partial n}{\partial \tau_{G1}}\right)_j \Delta\tau_{G1} - \left(\frac{\partial n}{\partial G_0}\right)_j \Delta G - \left(\frac{\partial n}{\partial K_G}\right)_j \Delta K_G,$$

де індекс «0» відповідає істинному значенню параметрів, а Δ – відхилення (похибки) параметрів моделі (з яких τ, τ_{G1} є шуканими параметрами, K_G задається, G_0 визначається з експерименту).

З умови мінімуму цього функціоналу отримаємо вираз для похибки оцінки сталої часу:

$$\frac{\partial \Phi(\Delta\tau)}{\partial \Delta\tau} = -2 \sum_{j=1}^N \left[\Delta n_j - \left(\frac{\partial n}{\partial \tau}\right)_j \Delta\tau - \left(\frac{\partial n}{\partial \tau_{G1}}\right)_j \Delta\tau_{G1} - \left(\frac{\partial n}{\partial G_0}\right)_j \Delta G - \left(\frac{\partial n}{\partial K_G}\right)_j \Delta K_G \right] \left(\frac{\partial n}{\partial \tau}\right)_j = 0$$

$$\frac{\partial \Phi(\Delta\tau_{G1})}{\partial \Delta\tau_{G1}} = -2 \sum_{j=1}^N \left[\Delta n_j - \left(\frac{\partial n}{\partial \tau}\right)_j \Delta\tau - \left(\frac{\partial n}{\partial \tau_{G1}}\right)_j \Delta\tau_{G1} - \left(\frac{\partial n}{\partial G_0}\right)_j \Delta G - \left(\frac{\partial n}{\partial K_G}\right)_j \Delta K_G \right] \left(\frac{\partial n}{\partial \tau_{G1}}\right)_j = 0$$

Виконавши перетворення, знайдемо значення оцінок шуканих параметрів:

$$\Delta \hat{\tau} = \frac{\sum_{j=1}^N \left(\frac{\partial n}{\partial \tau}\right)_j \Delta Y_j - \sum_{j=1}^N \left(\frac{\partial n}{\partial \tau}\right)_j \left(\frac{\partial n}{\partial \tau_{G1}}\right)_j \Delta\tau_{G1} - \sum_{j=1}^N \left(\frac{\partial n}{\partial \tau}\right)_j \left(\frac{\partial n}{\partial K_G}\right)_j \Delta K_G - \sum_{j=1}^N \left(\frac{\partial n}{\partial \tau}\right)_j \left(\frac{\partial n}{\partial G_0}\right)_j \Delta G_0}{\sum_{j=1}^N \left(\frac{\partial n}{\partial \tau}\right)_j^2};$$

$$\Delta \hat{\tau}_{G1} = \frac{\sum_{j=1}^N \left(\frac{\partial n}{\partial \tau_{G1}}\right)_j \Delta Y_j - \sum_{j=1}^N \left(\frac{\partial n}{\partial \tau}\right)_j \left(\frac{\partial n}{\partial \tau_{G1}}\right)_j \Delta\tau - \sum_{j=1}^N \left(\frac{\partial n}{\partial \tau_{G1}}\right)_j \left(\frac{\partial n}{\partial K_G}\right)_j \Delta K_G - \sum_{j=1}^N \left(\frac{\partial n}{\partial \tau_{G1}}\right)_j \left(\frac{\partial n}{\partial G_0}\right)_j \Delta G_0}{\sum_{j=1}^N \left(\frac{\partial n}{\partial \tau_{G1}}\right)_j^2}.$$

Запишемо вирази похідних для розв'язку (9) за кожним параметром у безрозмірній формі:

$$\frac{\partial n}{\partial \tau} = -\frac{K_G G_0}{\tau} e^{-\frac{t}{\tau}} \frac{t}{\tau} \left[\left(1 - \frac{\tau_{G1}}{\tau}\right) \cdot \frac{t}{\tau} + 2 \frac{\tau_{G1}}{\tau} \right] =$$

$$= -\frac{K_G G_0}{\tau} e^{-\bar{t}} \bar{t} \left[(1 - \overline{\tau_{G1}}) \cdot \bar{t} + 2 \overline{\tau_{G1}} \right];$$

$$\frac{\partial n}{\partial \tau_{G1}} = \frac{K_G G_0}{\tau} \frac{t}{\tau} e^{-\frac{t}{\tau}} = \frac{K_G G_0}{\tau} \bar{t} \cdot e^{-\bar{t}};$$

$$\frac{\partial n}{\partial K_G} = G_0 \left\{ 1 - e^{-\bar{t}} \left(1 + (1 - \overline{\tau_{G1}}) \bar{t} \right) \right\};$$

$$\frac{\partial n}{\partial G_0} = K_G \left\{ 1 - e^{-\bar{t}} \left(1 + (1 - \overline{\tau_{G1}}) \bar{t} \right) \right\};$$

$$\Delta\tau = (\Delta\tau)_n + (\Delta\tau)_{\tau_{G1}} + (\Delta\tau)_G + (\Delta\tau)_K;$$

$$\Delta\tau_{G1} = (\Delta\tau)_n + (\Delta\tau)_{\tau} + (\Delta\tau)_G + (\Delta\tau)_K.$$

Вважаючи похибки незалежними випадковими величинами, отримаємо дисперсію сумарної похибки:

$$\sigma_{\tau \Sigma}^2 = \sigma_{\tau n}^2 + \sigma_{\tau \tau_{G1}}^2 + \sigma_{\tau G}^2 + \sigma_{\tau K}^2. \quad (10)$$

$$\sigma_{\tau_{G1} \Sigma}^2 = \sigma_{\tau_{G1} n}^2 + \sigma_{\tau_{G1} \tau}^2 + \sigma_{\tau_{G1} G}^2 + \sigma_{\tau_{G1} K}^2. \quad (11)$$

Дисперсії інструментальних похибок сталих часу, зумовлених похибками вимірювання частоти обертання:

$$\sigma_{\tau n}^2 = \frac{\sigma_n^2 \cdot \Delta t}{\sum_{j=1}^N \left(\frac{\partial n}{\partial \tau} \right)_j^2 \Delta t} \approx \frac{\sigma_n^2 \cdot \Delta t}{\int_0^{t_N} \left(\frac{\partial n}{\partial \tau} \right)^2 dt}$$

$$\sigma_{\tau_{G1} n}^2 = \frac{\sigma_n^2 \cdot \Delta t}{\sum_{j=1}^N \left(\frac{\partial n}{\partial \tau_{G1}} \right)_j^2 \Delta t} \approx \frac{\sigma_n^2 \cdot \Delta t}{\int_0^{t_N} \left(\frac{\partial n}{\partial \tau_{G1}} \right)^2 dt}$$

Для отримання універсальної характеристики введемо безрозмірні змінні $\bar{n} = \frac{n}{K_G G_0}$; $\bar{t} = \frac{t}{\tau}$;

$\bar{\tau}_{G1} = \frac{\tau_{G1}}{\tau}$; $\Delta \bar{t} = \frac{\Delta t}{\tau}$, де τ – істинне значення сталої часу двигуна; K_G – істинне значення коефіцієнта підсилення.

Розраховуємо компоненти відносних дисперсій оцінки сталої часу τ :

$$\bar{\sigma}_{\tau n}^2 = \frac{\sigma_{\tau n}^2}{\tau^2} = \frac{\sigma_n^2 \cdot \Delta t}{\tau^2 \int_0^{t_N} \left(\frac{\partial n}{\partial \tau} \right)^2 dt} = \frac{\sigma_n^2 \cdot \Delta t}{\tau^2 \frac{(K_G G_0)^2}{\tau} \varphi_1(\bar{t}_N, \bar{\tau}_{G1})} = \frac{\bar{\sigma}_n^2 \cdot \Delta \bar{t}}{\varphi_1(\bar{t}_N, \bar{\tau}_{G1})} = \bar{\sigma}_n^2 \cdot \Delta \bar{t} \cdot f_{\tau n}(\bar{t}_N, \bar{\tau}_{G1}),$$

$$\bar{\sigma}_{\tau \tau_{G1}}^2 = \frac{\sigma_{\tau \tau_{G1}}^2}{\tau^2} = \frac{\sigma_{\tau_{G1}}^2 \cdot \Delta t \cdot \int_0^{t_N} \left(\frac{\partial n}{\partial \tau} \right)^2 \left(\frac{\partial n}{\partial \tau_{G1}} \right)^2 dt}{\tau^2 \left(\int_0^{t_N} \left(\frac{\partial n}{\partial \tau} \right)^2 dt \right)^2} = \frac{\sigma_{\tau_{G1}}^2 \cdot \Delta t \cdot \frac{(K_G G_0)^4}{\tau^3} \varphi_3(\bar{t}_N, \bar{\tau}_{G1})}{\tau^2 \frac{(K_G G_0)^4}{\tau^2} \varphi_1^2(\bar{t}_N, \bar{\tau}_{G1})} = \bar{\sigma}_{\tau_{G1}}^2 \cdot \Delta \bar{t} \cdot f_{\tau \tau_{G1}}(\bar{t}_N, \bar{\tau}_{G1});$$

$$\bar{\sigma}_{\tau K_G}^2 = \frac{\sigma_{\tau K_G}^2}{\tau^2} = \frac{\sigma_{K_G}^2 \cdot \Delta t \cdot \int_0^{t_N} \left(\frac{\partial n}{\partial \tau} \right)^2 \left(\frac{\partial n}{\partial K_G} \right)^2 dt}{\tau^2 \left(\int_0^{t_N} \left(\frac{\partial n}{\partial \tau} \right)^2 dt \right)^2} = \frac{\sigma_{K_G}^2 \cdot \Delta t \cdot \frac{K_G^2 G_0^4}{\tau} \varphi_4(\bar{t}_N, \bar{\tau}_{G1})}{\tau^2 \frac{(K_G G_0)^4}{\tau^2} \varphi_1^2(\bar{t}_N, \bar{\tau}_{G1})} = \bar{\sigma}_{K_G}^2 \cdot \Delta \bar{t} \cdot f_{\tau K_G}(\bar{t}_N, \bar{\tau}_{G1});$$

$$\bar{\sigma}_{\tau G_0}^2 = \frac{\sigma_{\tau G_0}^2}{\tau^2} = \frac{\sigma_{G_0}^2 \cdot \Delta t \cdot \int_0^{t_N} \left(\frac{\partial n}{\partial \tau} \right)^2 \left(\frac{\partial n}{\partial G_0} \right)^2 dt}{\tau^2 \left(\int_0^{t_N} \left(\frac{\partial n}{\partial \tau} \right)^2 dt \right)^2} = \frac{\sigma_{G_0}^2 \cdot \Delta t \cdot \frac{K_G^4 G_0^2}{\tau} \varphi_4(\bar{t}_N, \bar{\tau}_{G1})}{\tau^2 \frac{(K_G G_0)^4}{\tau^2} \varphi_1^2(\bar{t}_N, \bar{\tau}_{G1})} = \bar{\sigma}_{G_0}^2 \cdot \Delta \bar{t} \cdot f_{\tau G_0}(\bar{t}_N, \bar{\tau}_{G1}).$$

За аналогією розраховуємо компоненти відносних дисперсій оцінок для τ_{G1} :

$$\bar{\sigma}_{\tau_{G1} n}^2 = \frac{\sigma_{\tau_{G1} n}^2}{\tau_{G1}^2} = \frac{\sigma_n^2 \cdot \Delta t}{\tau_{G1}^2 \int_0^{t_N} \left(\frac{\partial n}{\partial \tau_{G1}} \right)^2 dt} = \frac{\sigma_n^2 \cdot \Delta t}{\tau_{G1}^2 \frac{(K_G G_0)^2}{\tau} \varphi_2(\bar{t}_N)} = \frac{\bar{\sigma}_n^2 \cdot \Delta \bar{t}}{\bar{\tau}_{G1}^2 \cdot \varphi_2(\bar{t}_N)} = \bar{\sigma}_n^2 \cdot \Delta \bar{t} \cdot f_{\tau_{G1} n}(\bar{t}_N, \bar{\tau}_{G1});$$

$$\bar{\sigma}_{\tau_{G1} \tau}^2 = \frac{\sigma_{\tau_{G1} \tau}^2}{\tau_{G1}^2} = \frac{\sigma_{\tau}^2 \cdot \Delta t \cdot \int_0^{t_N} \left(\frac{\partial n}{\partial \tau} \right)^2 \left(\frac{\partial n}{\partial \tau_{G1}} \right)^2 dt}{\tau_{G1}^2 \left(\int_0^{t_N} \left(\frac{\partial n}{\partial \tau_{G1}} \right)^2 dt \right)^2} = \frac{\sigma_{\tau}^2 \cdot \Delta t \cdot \frac{(K_G G_0)^4}{\tau^3} \varphi_3(\bar{t}_N, \bar{\tau}_{G1})}{\tau_{G1}^2 \frac{(K_G G_0)^4}{\tau^2} \varphi_2^2(\bar{t}_N)} = \bar{\sigma}_{\tau}^2 \cdot \Delta \bar{t} \cdot f_{\tau_{G1} \tau}(\bar{t}_N, \bar{\tau}_{G1});$$

$$\bar{\sigma}_{\tau_{G1} K_G}^2 = \frac{\sigma_{\tau_{G1} K_G}^2}{\tau_{G1}^2} = \frac{\sigma_{K_G}^2 \cdot \Delta t \cdot \int_0^{t_N} \left(\frac{\partial n}{\partial \tau_{G1}} \right)^2 \left(\frac{\partial n}{\partial K_G} \right)^2 dt}{\tau_{G1}^2 \left(\int_0^{t_N} \left(\frac{\partial n}{\partial \tau_{G1}} \right)^2 dt \right)^2} = \frac{\sigma_{K_G}^2 \cdot \Delta t \cdot \frac{K_G^2 G_0^4}{\tau} \varphi_5(\bar{t}_N, \bar{\tau}_{G1})}{\tau_{G1}^2 \frac{(K_G G_0)^4}{\tau^2} \varphi_2^2(\bar{t}_N)} =$$

$$= \bar{\sigma}_{K_G}^2 \cdot \Delta \bar{t} \cdot f_{\tau_{G1} K_G}(\bar{t}_N, \bar{\tau}_{G1});$$

$$\begin{aligned} \bar{\sigma}_{\tau_{G1} G_0}^2 &= \frac{\sigma_{\tau_{G1} G_0}^2}{\tau_{G1}^2} = \frac{\sigma_{G_0}^2 \cdot \Delta t \cdot \int_0^{t_N} \left(\frac{\partial n}{\partial \tau_{G1}} \right)^2 \left(\frac{\partial n}{\partial G_0} \right)^2 dt}{\tau_{G1}^2 \left(\int_0^{t_N} \left(\frac{\partial n}{\partial \tau_{G1}} \right)^2 dt \right)^2} = \frac{\sigma_{G_0}^2 \cdot \Delta t \cdot \frac{K_G^4 G_0^2}{\tau} \varphi_5(\bar{t}_N, \overline{\tau_{G1}})}{\tau_{G1}^2 \frac{(K_G G_0)^4}{\tau^2} \varphi_2^2(\bar{t}_N)} = \\ &= \bar{\sigma}_{G_0}^2 \cdot \Delta \bar{t} \cdot f_{\tau_{G1} G_0}(\bar{t}_N, \overline{\tau_{G1}}). \end{aligned}$$

Виконавши перехід від сум до інтегралів, отримаємо:

$$\begin{aligned} \int_0^{t_N} \left(\frac{\partial n}{\partial \tau} \right)^2 dt &= \frac{(K_G G_0)^2}{\tau^2} \int_0^{t_N} e^{-2\frac{t}{\tau}} \left[\left(1 - \frac{\tau_{G1}}{\tau} \right) \cdot \left(\frac{t}{\tau} \right)^2 + 2 \frac{\tau_{G1}}{\tau} \cdot \frac{t}{\tau} \right]^2 dt = \\ &= \frac{(K_G G_0)^2}{\tau} \int_0^{t_N} \bar{t}^2 e^{-2\bar{t}} \left[\left(1 - \overline{\tau_{G1}} \right) \cdot \bar{t} + 2 \overline{\tau_{G1}} \right]^2 d\bar{t} = \frac{(K_G G_0)^2}{\tau} \varphi_1(\bar{t}_N, \overline{\tau_{G1}}); \\ \int_0^{t_N} \left(\frac{\partial n}{\partial \tau_{G1}} \right)^2 dt &= \frac{(K_G G_0)^2}{\tau^2} \int_0^{t_N} \left(\frac{t}{\tau} \right)^2 e^{-2\frac{t}{\tau}} dt = \frac{(K_G G_0)^2}{\tau} \int_0^{t_N} \bar{t}^2 \cdot e^{-2\bar{t}} d\bar{t} = \frac{(K_G G_0)^2}{\tau} \varphi_2(\bar{t}_N); \\ \int_0^{t_N} \left(\frac{\partial n}{\partial \tau} \right)^2 \left(\frac{\partial n}{\partial \tau_{G1}} \right)^2 dt &= \frac{(K_G G_0)^4}{\tau^3} \int_0^{t_N} \bar{t}^4 \cdot e^{-4\bar{t}} \left[\left(1 - \overline{\tau_{G1}} \right) \cdot \bar{t} + 2 \overline{\tau_{G1}} \right]^2 d\bar{t} = \frac{(K_G G_0)^4}{\tau^3} \varphi_3(\bar{t}_N, \overline{\tau_{G1}}); \\ \int_0^{t_N} \left(\frac{\partial n}{\partial \tau} \right)^2 \left(\frac{\partial n}{\partial K_G} \right)^2 dt &= \frac{K_G^2 G_0^4}{\tau} \int_0^{t_N} \bar{t}^2 e^{-2\bar{t}} \left[\left(1 - \overline{\tau_{G1}} \right) \cdot \bar{t} + 2 \overline{\tau_{G1}} \right]^2 \cdot \left[1 - e^{-\bar{t}} \left(1 + \left(1 - \overline{\tau_{G1}} \right) \bar{t} \right) \right]^2 d\bar{t} = \\ &= \frac{K_G^2 G_0^4}{\tau} \varphi_4(\bar{t}_N, \overline{\tau_{G1}}); \\ \int_0^{t_N} \left(\frac{\partial n}{\partial \tau} \right)^2 \left(\frac{\partial n}{\partial G_0} \right)^2 dt &= \frac{K_G^4 G_0^2}{\tau} \int_0^{t_N} \bar{t}^2 e^{-2\bar{t}} \left[\left(1 - \overline{\tau_{G1}} \right) \cdot \bar{t} + 2 \overline{\tau_{G1}} \right]^2 \cdot \left[1 - e^{-\bar{t}} \left(1 + \left(1 - \overline{\tau_{G1}} \right) \bar{t} \right) \right]^2 d\bar{t} = \\ &= \frac{K_G^4 G_0^2}{\tau} \varphi_4(\bar{t}_N, \overline{\tau_{G1}}); \\ \int_0^{t_N} \left(\frac{\partial n}{\partial \tau_{G1}} \right)^2 \left(\frac{\partial n}{\partial K_G} \right)^2 dt &= \frac{K_G^2 G_0^4}{\tau} \int_0^{t_N} \bar{t}^2 e^{-2\bar{t}} \cdot \left[1 - e^{-\bar{t}} \left(1 + \left(1 - \overline{\tau_{G1}} \right) \bar{t} \right) \right]^2 d\bar{t} = \\ &= \frac{K_G^2 G_0^4}{\tau} \varphi_5(\bar{t}_N, \overline{\tau_{G1}}); \\ \int_0^{t_N} \left(\frac{\partial n}{\partial \tau_{G1}} \right)^2 \left(\frac{\partial n}{\partial G_0} \right)^2 dt &= \frac{K_G^4 G_0^2}{\tau} \int_0^{t_N} \bar{t}^2 e^{-2\bar{t}} \cdot \left[1 - e^{-\bar{t}} \left(1 + \left(1 - \overline{\tau_{G1}} \right) \bar{t} \right) \right]^2 d\bar{t} = \frac{K_G^4 G_0^2}{\tau} \varphi_5(\bar{t}_N, \overline{\tau_{G1}}). \end{aligned}$$

Задля універсальності формул розрахунку похибки вводимо функції, які залежать виключно від відносних параметрів. Зазначимо, зі збільшенням часу спостереження функції стабілізуються, а це означає, що інформативність вимірювань зменшується та прямує до нуля після стабілізації параметрів двигуна.

4. Аналіз похибок на необмеженому інтервалі спостереження

Для розрахунку дисперсій оцінок розрахуємо значення функцій, що пов'язують відносні дисперсії впливових факторів та оцінок динамічних характеристик, при необмеженому часі спостереження.

$$f_{\tau_N}(\bar{t}_N \rightarrow \infty, \overline{\tau_{G1}}) = \frac{1}{\varphi_1(\bar{t}_N \rightarrow \infty, \overline{\tau_{G1}})} = \frac{1}{\int_0^{\infty} \bar{t}^2 e^{-2\bar{t}} \left[\left(1 - \overline{\tau_{G1}} \right) \cdot \bar{t} + 2 \overline{\tau_{G1}} \right]^2 d\bar{t}} = \frac{4}{\overline{\tau_{G1}}^2 + 3};$$

$$f_{\tau_{G1n}}(\bar{t}_N \rightarrow \infty, \bar{\tau}_{G1}) = \frac{1}{\bar{\tau}_{G1}^2 \cdot \varphi_2(\bar{t}_N \rightarrow \infty)} = \frac{1}{\bar{\tau}_{G1}^2 \cdot \int_0^{\infty} \bar{t}^{-2} \cdot e^{-2\bar{t}} d\bar{t}} = \frac{4}{\bar{\tau}_{G1}^2};$$

$$f_{\tau_{\tau_{G1}}}(\bar{t}_N \rightarrow \infty, \bar{\tau}_{G1}) = \bar{\tau}_{G1}^2 \frac{\varphi_3(\bar{t}_N \rightarrow \infty, \bar{\tau}_{G1})}{\varphi_1^2(\bar{t}_N \rightarrow \infty, \bar{\tau}_{G1})} = \frac{\frac{1}{4^5} (21\bar{\tau}_{G1}^2 + 30\bar{\tau}_{G1} + 45) \bar{\tau}_{G1}^2}{\frac{1}{4^2} (\bar{\tau}_{G1}^{-2} + 3)^2} = \frac{\bar{\tau}_{G1}^2}{4^3} \cdot \frac{21\bar{\tau}_{G1}^2 + 30\bar{\tau}_{G1} + 45}{(\bar{\tau}_{G1}^{-2} + 3)^2};$$

$$f_{\tau_{G1\tau}}(\bar{t}_N \rightarrow \infty, \bar{\tau}_{G1}) = \frac{\varphi_3(\bar{t}_N \rightarrow \infty, \bar{\tau}_{G1})}{\bar{\tau}_{G1}^2 \cdot \varphi_2^2(\bar{t}_N \rightarrow \infty)} = \frac{\frac{1}{4^5} (21\bar{\tau}_{G1}^2 + 30\bar{\tau}_{G1} + 45)}{\bar{\tau}_{G1}^2 \cdot \frac{1}{4^2}} = \frac{1}{4^3} \cdot \frac{21\bar{\tau}_{G1}^2 + 30\bar{\tau}_{G1} + 45}{\bar{\tau}_{G1}^2};$$

$$f_{\tau_{KG}}(\bar{t}_N \rightarrow \infty, \bar{\tau}_{G1}) = \frac{\varphi_4(\bar{t}_N \rightarrow \infty, \bar{\tau}_{G1})}{\varphi_1^2(\bar{t}_N \rightarrow \infty, \bar{\tau}_{G1})} = \frac{10^{-2} (2.051\bar{\tau}_{G1}^{-4} + 6.137\bar{\tau}_{G1}^{-3} + 10.13\bar{\tau}_{G1}^{-2} + 34.9)}{\frac{1}{4^2} (\bar{\tau}_{G1}^{-2} + 3)^2};$$

$$f_{\tau_{G0}}(\bar{t}_N \rightarrow \infty, \bar{\tau}_{G1}) = f_{\tau_{KG}}(\bar{t}_N \rightarrow \infty, \bar{\tau}_{G1});$$

$$f_{\tau_{G1KG}}(\bar{t}_N \rightarrow \infty, \bar{\tau}_{G1}) = \frac{\varphi_5(\bar{t}_N \rightarrow \infty, \bar{\tau}_{G1})}{\bar{\tau}_{G1}^2 \cdot \varphi_2^2(\bar{t}_N \rightarrow \infty)} = \frac{10^{-2} (2,343\bar{\tau}_{G1}^2 + 5,438\bar{\tau}_{G1} + 5,529)}{\bar{\tau}_{G1}^2 \cdot \frac{1}{4^2}};$$

$$f_{\tau_{G1G0}}(\bar{t}_N \rightarrow \infty, \bar{\tau}_{G1}) = f_{\tau_{G1KG}}(\bar{t}_N \rightarrow \infty, \bar{\tau}_{G1}).$$

На рис. 4-9 подані функції впливів інструментальних похибок та параметричних похибок моделі на похибки оцінок динамічних характеристик двигуна.

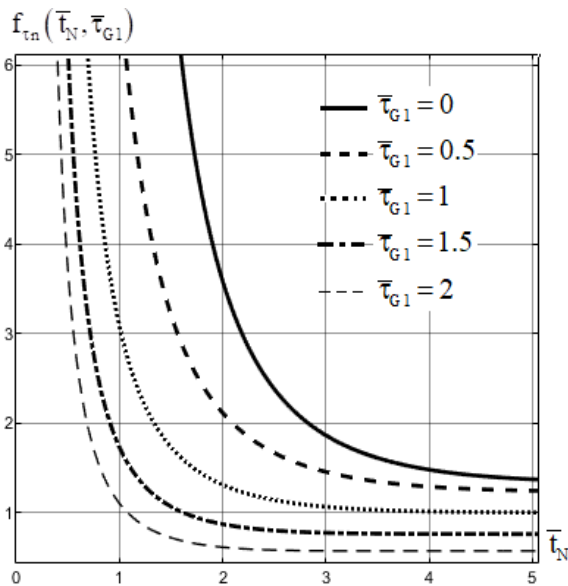


Рис. 4. Функція похибки $f_{\tau_n}(\bar{t}_N, \bar{\tau}_{G1})$

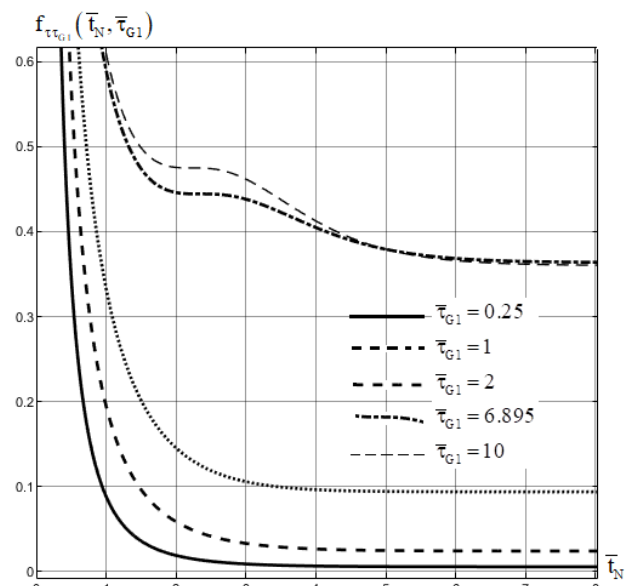


Рис. 5. Функція похибки $f_{\tau_{\tau_{G1}}}(\bar{t}_N, \bar{\tau}_{G1})$

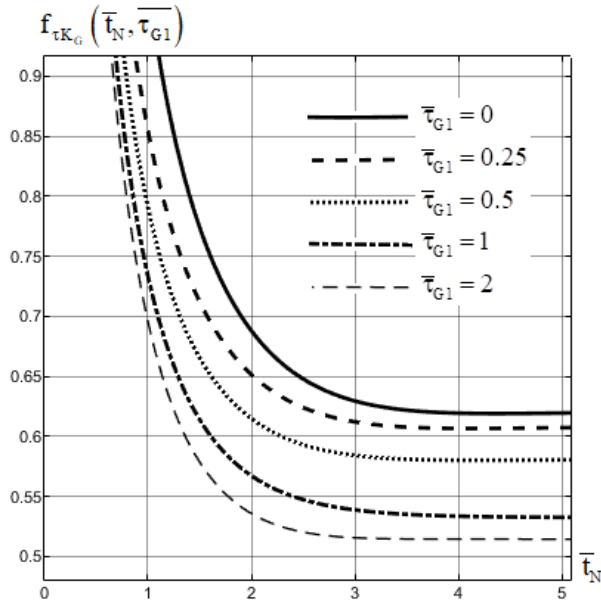


Рис. 6. Функція похибки $f_{\tau K_G}(\bar{t}_N, \bar{\tau}_{G1})$

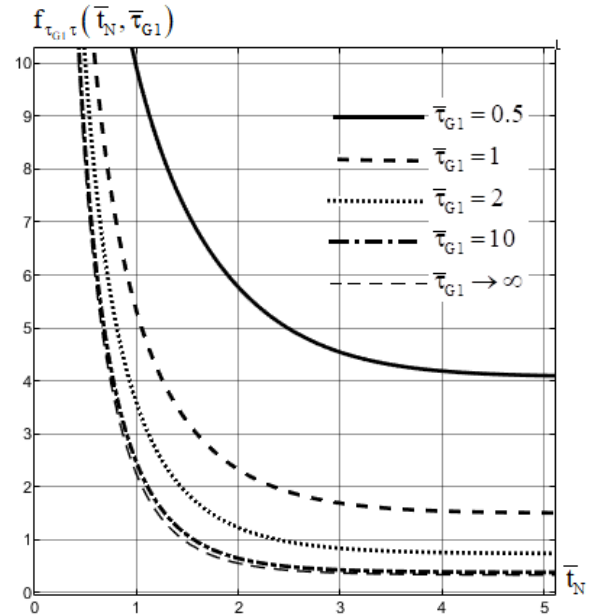


Рис. 8. Функція похибки $f_{\tau_{G1} \tau}(\bar{t}_N, \bar{\tau}_{G1})$

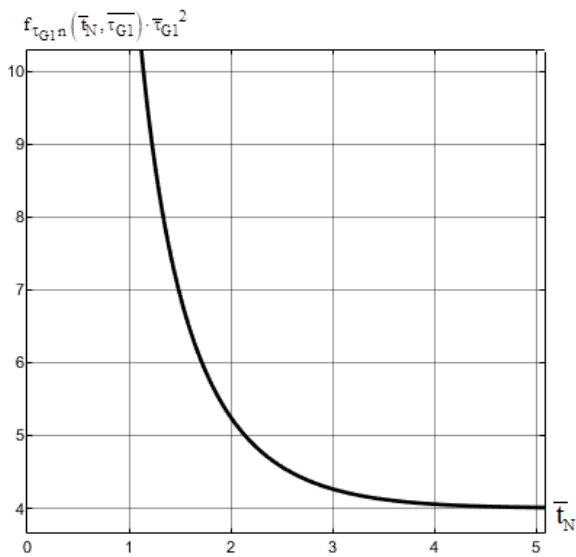


Рис. 7. Функція похибки $f_{\tau_{G1} n}(\bar{t}_N, \bar{\tau}_{G1}) \cdot \bar{\tau}_{G1}^2$

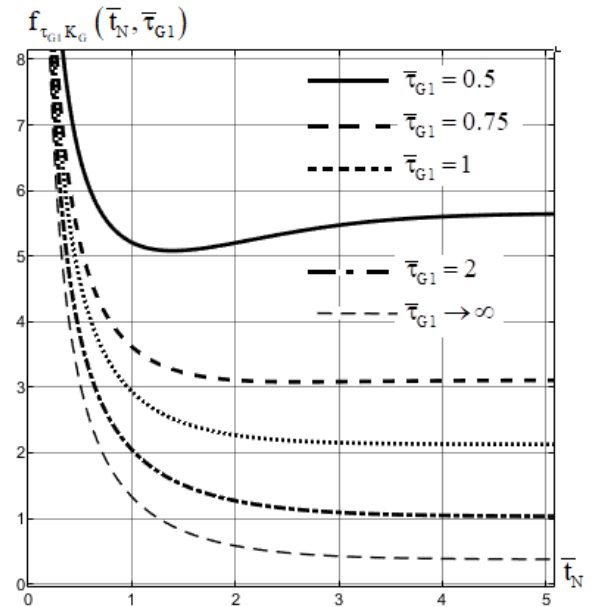


Рис. 9. Функція похибки $f_{\tau_{G1} K_G}(\bar{t}_N, \bar{\tau}_{G1})$

Проаналізуємо характерні значення функцій похибок:

$$\begin{aligned}
 f_{\tau n}(\bar{t}_N \rightarrow \infty, \bar{\tau}_{G1} = 0) &= \frac{4}{3}; \\
 f_{\tau \tau_{G1}}(\bar{t}_N \rightarrow \infty, \bar{\tau}_{G1} \approx 6.895) &\approx 0,3636; \\
 f_{\tau K_G}(\bar{t}_N \rightarrow \infty, \bar{\tau}_{G1} = 0) &= 0,6204; \\
 f_{\tau_{G1} n}(\bar{t}_N \rightarrow \infty, \bar{\tau}_{G1} \rightarrow 0) &\rightarrow \infty; \\
 f_{\tau_{G1} \tau}(\bar{t}_N \rightarrow \infty, \bar{\tau}_{G1} = 0) &\rightarrow \infty; \\
 f_{\tau_{G1} \tau}(\bar{t}_N \rightarrow \infty, \bar{\tau}_{G1} \rightarrow \infty) &\rightarrow 0,328; \\
 f_{\tau_{G1} K_G}(\bar{t}_N \rightarrow \infty, \bar{\tau}_{G1} = 0) &\rightarrow \infty.
 \end{aligned}$$

Отримані залежності функцій компонентів похибок при необмеженому часі спостереження дають можливість проаналізувати загальну похибку. Вплив похибок частоти обертання на сталу часу τ : відповідна функція має максимум при $\bar{\tau}_{G1} = 0$; це можна пояснити тим, що саме при такому значенні перехідний процес є менш інтенсивним.

Вплив похибок частоти обертання на сталу часу $\bar{\tau}_{G1}$: значення відносної дисперсії зворотно пропорційне квадрату $\bar{\tau}_{G1}$, а значення абсолютної дисперсії є постійним для будь якого значення $\bar{\tau}_{G1}$ та дорівнює 4.

Вплив похибок $\bar{\tau}_{G1}$ на сталу часу τ : функція похибок $f_{\tau\tau_{G1}}$ має максимум при $\bar{\tau}_{G1} \approx 6,895$.

Вплив похибок τ на сталу часу $\bar{\tau}_{G1}$: функція похибки має нижню межу 0,328 при $\bar{\tau}_{G1} \rightarrow \pm\infty$, верхньої межі функція не має та коли $\bar{\tau}_{G1} \rightarrow 0$, відносна похибка необмежено зростає.

Вплив похибок визначення коефіцієнта підсилення та похибок вимірювання на сталу часу τ : функція $f_{\tau K_G} = 0,6204$ при $\bar{\tau}_{G1} = 0$, що відповідає максимуму цієї функції.

Вплив похибок визначення коефіцієнта підсилення та похибок вимірювання на сталу часу $\bar{\tau}_{G1}$: функція похибки має нижню межу 0,375 при $\bar{\tau}_{G1} \rightarrow \pm\infty$; верхньої межі функція не має та коли $\bar{\tau}_{G1} \rightarrow 0$, відносна похибка необмежено зростає.

Особливістю функції $f_{\tau_{G1} K_G}(\bar{t}_N, \bar{\tau}_{G1})$ при малих значеннях $\bar{\tau}_{G1}$ є її немонотонність. Функція при певному \bar{t}_N^{\min} має мінімум, і це означає, що подальші вимірювання збільшують похибку оцінки.

Аналіз максимальних значень функцій похибок показує, що в загальну дисперсію оцінки τ найбільший внесок роблять похибки вимірювань частоти обертання та витрати палива.

Висновки

Нині стрімко розвивається концепція бортової самоналаштувальної моделі, яка забезпечує визначення динамічних характеристик в реальному часі, використовуючи вимірювані параметри.

Наявні дослідження з ідентифікації характеристик двигунів, пов'язані з динамічними характеристиками, складають незначну кількість. У них переважно розглянуто визначення коефіцієнтів однорежимної динамічної моделі методом найменших квадратів. Проте проблему аналізу точності оцінювання параметрів динамічних моделей по реальним даним досліджено явно недостатньо, внаслідок чого відсутні рекомендації щодо формування керуючих впливів на двигун, періодичності та тривалості реєстрації параметрів, а також визначення достатності зібраної інформації для отримання динамічної моделі із заданою точністю.

У попередніх роботах авторів запропоновано узагальнений підхід до аналізу похибок оцінювання параметрів динамічної моделі одновального ТРД, яка ґрунтується на лінійній апроксимації зазначеної моделі в околі точки, аналізі впливу всіх похибок вимірювання та параметричних похибок моделі,

форми та параметрів керуючої дії, а також інтервалу вимірювання.

Тому в цій роботі зазначений підхід розповсюджено на двоваловий двигун, кількість динамічних характеристик якого більша та параметричні похибки моделі також впливають на оцінки динамічних характеристик. Для двовалового двигуна отримано універсальне рівняння, яке визначає похибку оцінки коефіцієнтів лінійної динамічної моделі як функцію всіх основних впливових факторів: похибок вимірювання та частоти реєстрації, інтенсивності тестового впливу та номінальних значень коефіцієнтів моделі. Отримано такі основні результати:

1. Аналіз динамічних коефіцієнтів на наявність взаємної залежності для досліджуваного двигуна дозволяє скоротити кількість незалежних параметрів, а також отримати розв'язки рівнянь у питомих параметрах, а отже і залежності для похибок оцінювання в універсальному вигляді.

2. Інструментальні похибки оцінок сталих часу двигуна мають нижню межу; це зумовлено скінченною тривалістю перехідних процесів, наприкінці яких вихідні параметри стабілізуються та стають нечутливими до динамічних параметрів двигуна. Ці похибки відповідають тривалому періоду реєстрації, коли нові дані не дають корисної інформації про сталу часу внаслідок того, що перехідний процес вже завершився.

3. Складові відносної дисперсії оцінки сталої часу τ при необмеженому часі спостереження для двовалового двигуна залежать від $\bar{\tau}_{G1}$ та мають максимуми.

4. Суттєвий внесок у загальну дисперсію оцінок роблять похибки вимірювання частоти обертання та витрати палива.

Конфлікт інтересів

Автор повідомляє, що він не має конфлікту інтересів щодо цієї публікації, включаючи фінансові, особисті, авторські та інші інтереси, що можуть вплинути на дослідження та його результати, представлені в цій статті.

Фінансова підтримка

Дослідження виконано без фінансової підтримки.

Доступність даних

Рукопис не має пов'язаних даних.

Використання штучного інтелекту

Автор підтверджує, що при підготовці цієї публікації він не використовував методи штучного інтелекту.

Подяка

Автор висловлює подяку професору Єпіфанову Сергію Валерійовичу за консультативну допомогу.

Література

1. Jaw, L. *Aircraft Engine Controls: Design, System Analysis, and Health Monitoring [Text]* / L. Jaw, J. Mattingly. - Reston, USA : American Institute of Aeronautics and Astronautics, Inc. – 2009. – 378 p.
2. Richter, H. *Advanced controls of turbofan engines [Text]* / H. Richter. – Springer. – 2011. – 281 p.
3. *Estimating in-flight engine performance variations using Kalman filter concepts [Text]* / R. Luppold, J. Roman, G. Gallops, et al. // 25th joint propulsion conference; 1989 Jul 12-16; Monterey, CA. Reston: AIAA. – 1989. – 10 p.
4. Синтез систем управления и диагностирования газотурбинных двигателей [Текст] / С. В. Епифанов, Б. И. Кузнецов и др. – К. : Техника. – 1998. – 312 с.
5. Куликов, Г. Г. Метод определения динамических параметров в САПР-Д [Текст] / Г. Г. Куликов, И. М. Горюнов, & М. А. Романов. – Уфа : УАИ. – 1986. – № 14. – С. 39-46.
6. Єпіфанов, С. В. Аналіз точності самоналаштування динамічної моделі газотурбінного двигуна [Текст] / С. В. Єпіфанов, & О. В. Бондаренко // *Авіаційно-космічна техніка і технологія*. – 2024. – № 2(194). – С. 38-48. DOI: 10.32620/akt.2024.2.04.
7. Kulikov, G. *Dynamic modelling of gas turbines. Identification, simulation, condition monitoring and*

optimal control [Text] / G. Kulikov, & H. Thompson. - Springer-Verlag. London, 2004. – 309 p.

References

1. Jaw, L. C., & Mattingly, J. D. *Aircraft engine controls: design, system analysis, and health monitoring*. American institute of Aeronautics and Astronautics, Inc., Reston, Virginia, USA, 2009. 378 p.
2. Richter, H. *Advanced controls of turbofan engines*. Springer, 2011. 281 p.
3. Luppold, R, Roman, J, Gallops, G, Kerr, L. at al. Estimating in-flight engine performance variations using Kalman filter concepts. *25th joint propulsion conference*; 1989 Jul 12-16; Monterey, CA. Reston: AIAA, 1989. 10 p.
4. Yepifanov, S. V., Kuznetsov, B. I., et al. *Sintez sistem upravleniya i diagnostirovaniya gazoturbinykh dvigateley* [Synthesis of turbine engine automatic control and diagnostic systems]. Kiev, Tekhnika Publ, 1998. 312 p. (In Russian).
5. Kulikov, G. G., Goryunov, I. M., & Romanov, M. A. *Metod opredeleniya dinamicheskikh parametrov v SAPR-D* [Dynamic parameters determining in Engine CAD]. Ufa Publ., UAI, 1986, no. 14, pp. 39-46. (In Russian).
6. Yepifanov, S. V., & Bondarenko, O. V. Analiz tochnosti samonalashtuvannya dynamichnoyi modeli hazoturbinnoho dvyhuna [Accuracy of the gas turbine engine dynamic model self-tuning]. *Aviatsiynno-kosmichna tekhnika i tekhnolohiya – Aerospace Technic and Technology*, 2024, no. 2(194), pp. 38-48. DOI: 10.32620/akt.2024.2.04. (In Ukrainian).
7. Kulikov, G. H., & Thompson, H. *Dynamic modelling of gas turbines. Identification, simulation, condition monitoring and optimal control*. Springer-Verlag. London, 2004. 309 p.

Надійшла в редакцію 30.05.2024, розглянута на редколегії 15.08.2024.

IDENTIFICATION OF DYNAMIC CHARACTERISTICS OF TWO-SHAFT TURBOFAN ENGINE

Oleksii Bondarenko

Mathematical models are an important tool for designing engines and their automatic control systems. The models are used in the simulation modeling of the control object, in the analysis, synthesis, semi-realistic modeling, and in the synthesis of the engine's automatic control algorithms. The accuracy of a model is important and cannot be ensured without individual adjustments to a specific engine. The development direction associated with the introduction of adaptive automatic control systems (ACS) is promising. The key feature of these systems is matching algorithms and the mathematical model's self-adjustment to the engine's real characteristics. This paper considers the formation of models using the method of least squares (LSM) based on the measured parameters of the engine's working process. An urgent need is to ensure sufficient information to achieve a given level of accuracy. This check must be performed a priori (to predict the composition of engine operating modes

and the volume of registered information) and a posteriori. The difficulty in evaluating the dynamic characteristics of a two-shaft engine lies in its larger number than a gas generator. The formation of a model of the parameters of a two-shaft engine can be done in many ways. In this work, such a model of a two-shaft engine is used, the parameters of which reflect the engine's dynamic properties and the dynamics of influences and separately characterize the oscillations. **The subject of the study** is the process of forming a dynamic mathematical model (MM) of a two-shaft gas turbine engine using real data for the subsequent application of this model for solving problems of control and diagnostics of onboard systems. **The goal** is to determine the dependence of the errors of estimation of the dynamic parameters of mathematical models on the influencing factors in the conditions of real change of these factors over time. **Tasks** considered in the work: formation of a dynamic model of a two-shaft engine and reduction of the number of independent dynamic characteristics, formation of the LSM-functional for the evaluation task, determination of the evaluation errors of dynamic coefficients; analysis of influencing factors, as well as determination of dependencies between factors and errors. For this purpose, the **methods** of linear dynamic systems theory and statistical evaluation are used. The following **results** were obtained: a ratio was determined for calculating the error in estimating the dynamic characteristics of a two-shaft engine when the fuel consumption changes in leaps and bounds. It was studied on the example of a real engine, and the regularities between the dynamic characteristics, which simplify the estimation of parameters, were revealed. **Scientific and practical novelty**: for the first time, a ratio was obtained that determines the estimation errors of time constants based on the specified values of measurement errors, the amplitude of fuel consumption, the frequency and duration of observation, as well as the dynamic characteristics of the system. These relations are given in dimensionless coordinates and can be applied to any twin-shaft turbojet engine when planning experiments and debugging on-board algorithms for self-tuning models.

Keywords: two-shaft gas turbine engine; automatic control; dynamic model; adaptive model, self-tuning, identification.

Бондаренко Олексій Васильович – асп. каф. конструкції авіаційних двигунів, Національний аерокосмічний університет ім. М.Є. Жуковського «Харківський авіаційний університет», Харків, Україна.

Oleksii Bondarenko – PhD student of the Aircraft Engine Design Department, National Aerospace University “Kharkiv Aviation Institute”, Kharkiv, Ukraine,
e-mail: o.v.bondarenko@khai.edu, ORCID: 0000-0001-7943-8555.