

УДК 539.3:620.22-419

doi: 10.32620/aktt.2020.8.16

А. В. МОРОЗОВ

ДП ЗМКБ «Івченко-Прогрес», Запоріжжя, Україна

ЧИСЕЛЬНЕ ВИЗНАЧЕННЯ ЕФЕКТИВНИХ ПРУЖНИХ ХАРАКТЕРИСТИК ТРИВИМІРНОАРМОВАНОВОГО ВОЛОКНИСТОГО КОМПОЗИЦІЙНОГО МАТЕРІАЛУ

Процеси, що відбуваються в композиційних матеріалах, визначаються диференціальними рівняннями в часткових похідних із змінними коефіцієнтами. В більшості композиційні матеріали мають періодичну структуру, тому коефіцієнти в рівняннях є швидко осцилюючими періодичними функціями. В дослідженні поля напружень і деформацій конструкцій з композиційного матеріалу найбільш ефективним є метод скінчених елементів, в якому неоднорідний композиційний матеріал замінюється еквівалентним йому однорідним анізотропним матеріалом. Для визначення усереднених характеристик композиційного матеріалу з періодичною структурою потрібна верифікована методика, що дозволить це зробити. Отже фундаментальною задачею механіки композиційних матеріалів є визначення ефективних пружних характеристик матеріалу. Робота присвячена актуальній проблемі визначення ефективних пружних характеристик тривимірноармованих композиційних матеріалів по відомим пружним властивостям волокон та в'язучого з урахуванням розподілу армуючих волокон по об'єму композиційного матеріалу.

В роботі здійснено математичне моделювання мінімального тривимірного представницького елемента об'єму за заданою схемою армування і геометричними розмірами компонентів. Чисельні експерименти отримані за допомогою програмного пакету ANSYS. Низкою чисельних експериментів моделюються шість випадків деформування: одноосові розтягнення у напрямках X , Y , Z та зсув у площинах XY , YZ , XZ . За результатами чисельного дослідження напруженого і деформованого стану представницького елемента об'єму композиційного матеріалу визначені ефективні пружні постійні еквівалентного гомогенного матеріалу. Дві серії розрахунків здійснені з завданням відповідних умов симетрії та умов періодичності. За результатами експериментального дослідження здійснена верифікація запропонованої методики визначення ефективних пружних характеристик тривимірноармованих волокнистих композиційних матеріалів. Розроблена чисельна методика дозволяє вирішувати задачі механіки композиційних матеріалів за допомогою сучасних програмних комплексів, що використовують в математичній основі метод скінчених елементів.

Ключові слова: представницький елемент об'єму; композиційні матеріали; ефективні пружні характеристики; гомогенізація; чисельний аналіз.

Вступ

Створення сучасних перспективних авіаційних двигунів для літаків цивільної авіації пов'язано з розробкою економічних авіаційних газотурбінних двигунів (АГТД) з великим ступенем двоконтурності які відрізняються габаритами робочих лопаток вентилятора. Використання широкохордних лопаток вентилятора дозволяє підвищити степінь стиску на вході та характеризується підвищенням аеродинамічної стійкості лопаток. Для вирішення проблеми пов'язаної зі збільшенням маси світові двигунобудівні компанії використовують композиційні матеріали доля яких в загальному обсязі конструкції двигуна збільшується з кожним роком. На сучасному етапі розвитку двигунобудування широкохордну лопатку вентилятора доцільно створювати з композиційного матеріалу. Тому стає актуальною проблема розробки методики визначення ефективних пружних характеристик тривимірноармованих волокнистих композиційних матеріалів, що дозволить здійснити аналіз механічної

поведінки матеріалу на мікро і макрорівні абстрагування в конструкції лопатки вентилятора.

Чисельні методи визначення ефективних пружних характеристик композиційних матеріалів мають давню історію. Завдяки простоті фізичної інтерпретації найпопулярнішим на сьогодні у дослідженні механіки суцільних середовищ є метод скінчених елементів (МСЕ). МСЕ дозволяє здійснювати розрахункові дослідження процесів у середовищах довільної структури, але потребує розробки спеціальних підходів до чисельного моделювання даних процесів, що визначає актуальність задачі.

В роботі [1] запропонована методика визначення ефективних характеристик жорсткості гібридного композиційного матеріалу на основі матриці з магнію, що армована борними та вуглецевими волокнами за допомогою програмного пакету ANSYS. На основі вирішення модельних задач, що мають точне рішення здійснений аналіз залежності похибки розрахунків від кількості вузлів скінчено-елементної сітки математичної моделі.

Вирішенню проблеми визначення пружних властивостей ортогонально армованого композиційного матеріалу присвячена робота [2]. В чисельних експериментах за допомогою програмного пакету ANSYS моделюються випадки одноосових розтягнень у напрямках X , Y та зсуву у площинах XY , YZ . Здійснене порівняння результатів розрахунків з аналітичним рішенням за методом Ваніна–Алфутова.

В статті [3] результати дослідження ефективних пружних характеристик представницького елемента об'єму еластостійких композитів засновані на чисельному розв'язанні крайових задач нелінійної теорії пружності. Ефективні властивості оцінюються у вигляді квадратичної залежності між усередненими напруженнями та деформаціями. Чисельні розрахунки здійснені за допомогою програмного модулю Fidesys Composite використовуючи метод скінчених елементів та метод спектральних елементів. Досліджені залежності ефективних властивостей еластомеру від просторової орієнтації часток наповнювача та від ступеню наповнення.

В роботі [4] Бахваловим запропонований метод асимптотичного усереднення для визначення ефективних пружних характеристик композиційних матеріалів. Процеси у середовищах з періодичною структурою визначаються диференціальними рівняннями в часткових похідних із змінними (швидко осцилюючими) коефіцієнтами. Рішення знаходиться у вигляді рядів по степеням малого параметру з коефіцієнтами, що залежать від повільних змінних (належать до глобальної системи координат) та швидких змінних (належать до локальної системи координат). Оскільки у вихідних рівняннях визначений малий параметр, метод можливо вважати методом розкладання по малому параметру. Побудова в роботі [5] узагальнив результати по розвитку і практичному застосуванню методу усереднення в задачах механіки композиційних матеріалів.

Приклади чисельного дослідження за допомогою метода скінчених елементів локальних задач теорії пружності представницького елемента об'єму і визначення ефективних пружних характеристик композиційних матеріалів різноманітної структури наведені в [6].

Ефективні пружні постійні композиційного матеріалу

У розрахунках композиційний матеріал вважається гомогенним анізотропним матеріалом з усередненими пружними характеристиками. Узагальнений закон Гука в тензорному запису має вигляд [7]:

$$\langle \varepsilon_{ij} \rangle = A_{ijkl} \langle \sigma_{kl} \rangle \quad (i, j, k, l = 1, 2, 3), \quad (1)$$

де A_{ijkl} – константи податливості еквівалентного

гомогенного матеріалу;

$\langle \sigma_{ij} \rangle$, $\langle \varepsilon_{ij} \rangle$ – усереднені значення напружень і деформацій.

У зворотній формі узагальнений закон Гука має вигляд:

$$\langle \sigma_{ij} \rangle = B_{ijkl} \langle \varepsilon_{kl} \rangle \quad (i, j, k, l = 1, 2, 3), \quad (2)$$

де B_{ijkl} – константи жорсткості еквівалентного гомогенного матеріалу.

Закон Гука для ортотропного матеріалу в системі прямокутних декартових координат осі якої перпендикулярні площинам симетрії пружних характеристик зручно зобразити [8,9] у матричній формі:

$$\begin{bmatrix} \langle \varepsilon_x \rangle \\ \langle \varepsilon_y \rangle \\ \langle \varepsilon_z \rangle \\ \langle \gamma_{xy} \rangle \\ \langle \gamma_{yz} \rangle \\ \langle \gamma_{zx} \rangle \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & 0 & 0 & 0 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & 0 & 0 & 0 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a_{44} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & a_{55} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & a_{66} \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} \langle \sigma_x \rangle \\ \langle \sigma_y \rangle \\ \langle \sigma_z \rangle \\ \langle \tau_{xy} \rangle \\ \langle \tau_{yz} \rangle \\ \langle \tau_{zx} \rangle \end{bmatrix}, \quad (3)$$

де a_{ij} – компоненти матриці податливості.

Компоненти можна виразити через технічні константи:

$$\begin{aligned} a_{11} &= \frac{1}{E_x}; & a_{22} &= \frac{1}{E_y}; & a_{33} &= \frac{1}{E_z}; \\ a_{12} &= -\frac{\nu_{xy}}{E_x} = -\frac{\nu_{yx}}{E_y}; & a_{13} &= -\frac{\nu_{xz}}{E_x} = -\frac{\nu_{zx}}{E_z}; \\ a_{23} &= -\frac{\nu_{yz}}{E_y} = -\frac{\nu_{zy}}{E_z}; \\ a_{44} &= \frac{1}{G_{xy}}; & a_{55} &= \frac{1}{G_{yz}}; & a_{66} &= \frac{1}{G_{zx}}, \end{aligned} \quad (4)$$

де E_x , E_y , E_z – модулі пружності;

ν_{xy} , ν_{yx} , ν_{zx} , ν_{xz} , ν_{zy} , ν_{yz} – коефіцієнти Пуассона;

G_{xy} , G_{yz} , G_{zx} – модулі зсуву.

Матриця жорсткості – обернена матриця пружних постійних $[B] = [A]^{-1}$.

У матричній формі:

$$\begin{bmatrix} \langle \sigma_x \rangle \\ \langle \sigma_y \rangle \\ \langle \sigma_z \rangle \\ \langle \tau_{xy} \rangle \\ \langle \tau_{yz} \rangle \\ \langle \tau_{zx} \rangle \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} & 0 & 0 & 0 \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} & 0 & 0 & 0 \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & b_{44} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & b_{55} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & b_{66} \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} \langle \varepsilon_x \rangle \\ \langle \varepsilon_y \rangle \\ \langle \varepsilon_z \rangle \\ \langle \gamma_{xy} \rangle \\ \langle \gamma_{yz} \rangle \\ \langle \gamma_{zx} \rangle \end{bmatrix}, \quad (5)$$

де b_{ij} – компоненти матриці жорсткості.

Тому пружні властивості ортотропного композиційного матеріалу визначаються 9-ю незалежними постійними E_x , E_y , E_z , G_{xy} , G_{yz} , G_{zx} , ν_{xy} , ν_{yz} , ν_{zx} .

Визначення ефективних пружних характеристик композиційних матеріалів

Для визначенні ефективних пружних характеристик потрібно моделювання низки чисельних експериментів. Спільна робота волокон і в'язучого з різними пружними характеристиками є складною математичною задачею. Для рішення задачі використовуються моделі волокна і в'язучого з урахуванням їх спільної роботи.

Чисельні експерименти проводяться з припущеннями, що:

1. Міжфазна межа має ідеальний контакт, тобто описується безперервністю переміщень і поверхневих напружень між волокном і в'язучим.
2. Компоненти композиційного матеріалу однорідні і лінійно-пружні.
3. Волокна розподілені регулярно та рівномірно.

Для чисельного дослідження використовується мінімальний тривимірний представницький елемент об'єму (рисунок 1), що періодично повторюється у всьому об'ємі композиційного матеріалу по трьом напрямкам. Моделювання представницького елемента об'єму здійснено у програмному пакеті SOLIDWORKS. Габаритні розміри моделі уздовж осі x ($a = 9$ мм); осі y ($b = 11$ мм); осі z ($c = 3,19$ мм). Початок системи координат у точці $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$.

В аналізі напруженого і деформованого стану представницького елемента об'єму задаються відповідні умови симетрії та періодичності. Чисельні експерименти реалізовано за допомогою програмного пакету ANSYS. Виконуються дві серії розрахунків ефективних пружних характеристик композиційного матеріалу: з завданням відповідних умов симетрії (перша серія розрахунків) та умов періодичності (друга серія розрахунків).

Для завдання характеристик матеріалів враховується, що частина волокон співпадають з осями координат x та y , також існують нахилені ділянки волокон.

Для моделювання властивостей композиційного матеріалу введені три матеріали: матеріал 1 – для волокон у напрямку X , матеріал 2 – для волокон у напрямку Y , матеріал 3 – для в'язучого. Для завдання властивостей матеріалу нахилених ділянок волокон введені локальні системи координат.

Матеріали 1 та 2 задані як пружний анізотропний матеріал (рисунок 2), а матеріал 3 заданий як пружний ізотропний матеріал. Параметри D_{ij}

($i, j = 1 \dots 6$) – це компоненти матриці податливості a_{ij} (4) для волокон відповідних матеріалів 1 та 2.

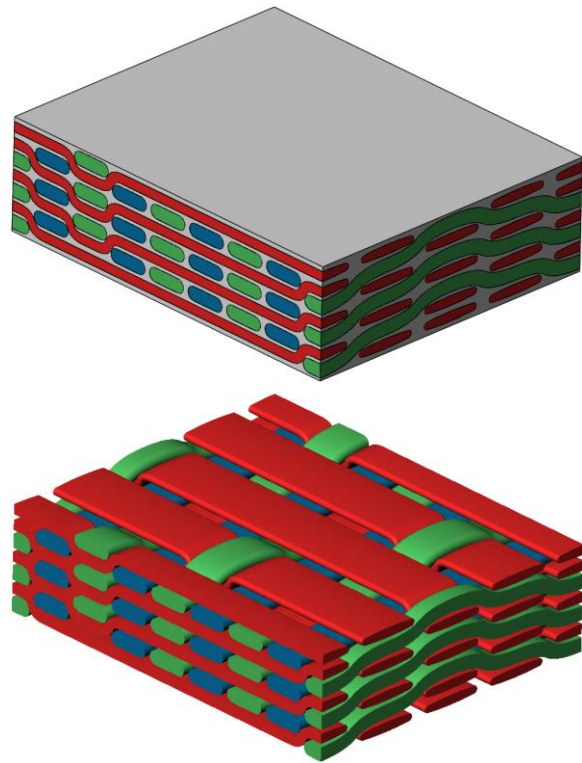


Рис. 1. Представницька модель композиційного матеріалу

Anisotropic Elasticity for Material Number 1		Anisotropic Elasticity for Material Number 2	
Anisotropic Elastic Matrix Options		Anisotropic Elastic Matrix Options	
Temperature	T1	Temperature	T1
D11	4E-12	D11	7.6923E-11
D12	-8E-13	D12	-8E-13
D13	-8E-13	D13	-1.6923E-11
D14	0	D14	0
D15	0	D15	0
D16	0	D16	0
D22	7.6923E-11	D22	4E-12
D23	-1.6923E-11	D23	-8E-13
D24	0	D24	0
D25	0	D25	0
D26	0	D26	0
D33	7.6923E-11	D33	7.6923E-11
D34	0	D34	0
D35	0	D35	0
D36	0	D36	0
D44	7.6923E-11	D44	7.6923E-11
D45	0	D45	0
D46	0	D46	0
D55	1.8769E-10	D55	7.6923E-11
D56	0	D56	0
D66	7.6923E-11	D66	1.8769E-10
Add Temperature Delete Temperature		Add Temperature Delete Temperature	

Рис. 2. Характеристики матеріалів волокон

Скінчено-елементна сітка математичної моделі має 2591012 елементів та 3992554 вузлів, при моделюванні використаний елемент SOLID186.

Усереднені значення представницького елемента об'єму напружень і деформацій:

$$\langle \sigma_{ij} \rangle = \frac{1}{V} \int_V \sigma_{ij} dV; \quad \langle \varepsilon_{ij} \rangle = \frac{1}{V} \int_V \varepsilon_{ij} dV. \quad (6)$$

Чисельними експериментами моделюються шість випадків деформування: одноосові розтягнення у напрямках X, Y, Z та зсув у площинах XY, YZ, XZ.

Перший експеримент – розтягнення у напрямку X. Визначаються компоненти жорсткості:

$$b_{11} = \frac{\langle \sigma_x \rangle}{\langle \varepsilon_x \rangle}; \quad b_{21} = \frac{\langle \sigma_y \rangle}{\langle \varepsilon_x \rangle}; \quad b_{31} = \frac{\langle \sigma_z \rangle}{\langle \varepsilon_x \rangle}. \quad (7)$$

Другий експеримент – розтягнення у напрямку Y. Визначається компонента жорсткості:

$$b_{22} = \frac{\langle \sigma_y \rangle}{\langle \varepsilon_y \rangle}. \quad (8)$$

Третій експеримент – розтягнення у напрямку Z. Визначаються компоненти жорсткості:

$$b_{23} = \frac{\langle \sigma_y \rangle}{\langle \varepsilon_z \rangle}; \quad b_{33} = \frac{\langle \sigma_z \rangle}{\langle \varepsilon_z \rangle}. \quad (9)$$

Четвертий експеримент – зсув у площині XY. Визначається компонента жорсткості:

$$b_{44} = \frac{\langle \tau_{xy} \rangle}{\langle \gamma_{xy} \rangle}. \quad (10)$$

П'ятий експеримент – зсув у площині YZ. Визначається компонента жорсткості:

$$b_{55} = \frac{\langle \tau_{yz} \rangle}{\langle \gamma_{yz} \rangle}. \quad (11)$$

Шостий експеримент – зсув у площині XZ. Визначається компонента жорсткості:

$$b_{66} = \frac{\langle \tau_{zx} \rangle}{\langle \gamma_{zx} \rangle}. \quad (12)$$

Матриця пружних постійних є симетричною $b_{ij} = b_{ji}$, тому маємо рівності:

$$b_{12} = b_{21}; \quad b_{13} = b_{31}; \quad b_{23} = b_{32}. \quad (13)$$

Після завершення аналізу у постпроцесорі обчислювались середні по площині S значення напружень для перших трьох експериментів:

$$\begin{aligned} \langle \sigma_x \rangle &= \frac{1}{S} \iint_{b,c} \sigma_x dydz; \\ \langle \sigma_y \rangle &= \frac{1}{S} \iint_{a,c} \sigma_y dx dz; \\ \langle \sigma_z \rangle &= \frac{1}{S} \iint_{a,b} \sigma_z dx dy. \end{aligned} \quad (14)$$

Для останніх трьох експериментів:

$$\begin{aligned} \langle \tau_{xy} \rangle &= \frac{1}{S} \iint_{b,c} \tau_{xy} dydz; \\ \langle \tau_{yz} \rangle &= \frac{1}{S} \iint_{a,c} \tau_{yz} dx dz; \\ \langle \tau_{xz} \rangle &= \frac{1}{S} \iint_{b,c} \tau_{xz} dydz. \end{aligned} \quad (15)$$

Моделювання розтягнення у напрямку X

Для обчислення ε приймалась рівною 10^{-3} . Така деформація забезпечується переміщенням $u_x|_{x=a} = \varepsilon \cdot a$. Далі для скорочення запису вводяться позначення:

$$\begin{aligned} u_x|_{x=a} &= u_{xa}; \quad u_x|_{y=b} = u_{xb}; \quad u_x|_{z=c} = u_{xc}; \\ u_y|_{x=a} &= u_{ya}; \quad u_y|_{y=b} = u_{yb}; \quad u_y|_{z=c} = u_{yc}; \\ u_z|_{x=a} &= u_{za}; \quad u_z|_{y=b} = u_{zb}; \quad u_z|_{z=c} = u_{zc}. \end{aligned}$$

Середні значення компонентів тензору деформації мають значення:

$$\begin{aligned} \langle \varepsilon_x \rangle &= 10^{-3}; \quad \langle \varepsilon_y \rangle = 0; \quad \langle \varepsilon_z \rangle = 0; \\ \langle \gamma_{xy} \rangle &= 0; \quad \langle \gamma_{yz} \rangle = 0; \quad \langle \gamma_{zx} \rangle = 0. \end{aligned} \quad (16)$$

Граничні умови симетрії задаються наступним чином:

$$\begin{aligned} \text{на площині } x=0: \quad & u_x = 0; \quad \tau_{xy} = 0; \quad \tau_{xz} = 0; \\ \text{на площині } y=0: \quad & u_y = 0; \quad \tau_{xy} = 0; \quad \tau_{yz} = 0; \\ \text{на площині } z=0: \quad & u_z = 0; \quad \tau_{yz} = 0; \quad \tau_{xz} = 0. \end{aligned} \quad (17)$$

Також:

$$\begin{aligned} \text{на площині } x=a: \quad & u_x = \varepsilon \cdot a; \quad \tau_{xy} = 0; \quad \tau_{xz} = 0; \\ \text{на площині } y=b: \quad & u_y = 0; \quad \tau_{xy} = 0; \quad \tau_{yz} = 0; \\ \text{на площині } z=c: \quad & u_z = 0; \quad \tau_{yz} = 0; \quad \tau_{xz} = 0. \end{aligned} \quad (18)$$

Граничні умови періодичності задаються наступним чином:

$$\begin{aligned} \text{співвідношення для площин } x=0 \text{ та } x=a: \\ u_{xa} = u_{x0} + \varepsilon \cdot a; \quad u_{ya} = u_{y0}; \quad u_{za} = u_{z0}. \\ \text{співвідношення для площин } y=0 \text{ та } y=b: \\ u_{xb} = u_{x0}; \quad u_{yb} = u_{y0}; \quad u_{zb} = u_{z0}. \\ \text{співвідношення для площин } z=0 \text{ та } z=c: \\ u_{xc} = u_{x0}; \quad u_{yc} = u_{y0}; \quad u_{zc} = u_{z0}. \end{aligned} \quad (19)$$

Вирази u_{x0} , u_{y0} , u_{z0} в (19) відрізняються в залежності від того, до якої площини застосовано співвідношення. Наприклад у співвідношенні $u_{xa} = u_{x0} + \varepsilon \cdot a$ – мається на увазі, що значення $u_{x0} = u_x|_{x=0}$; у випадку $u_{xb} = u_{x0}$ – значення $u_{x0} = u_x|_{y=0}$; у випадку $u_{xc} = u_{x0}$ – значення $u_{x0} = u_x|_{z=0}$.

Для закріплення представницької моделі у просторі перед умовами періодичності задається наступна умова в одній з кутових точок:

$$x = 0; y=b; z=0: u_x = u_y = u_z = 0. \quad (20)$$

Після завершення аналізу НДС у постпроцесорі обчислювались середні значення напружень $\langle \sigma_x \rangle$, $\langle \sigma_y \rangle$, $\langle \sigma_z \rangle$.

Результати чисельного експерименту дозволяють визначити на основі співвідношення (7) пружні характеристики еквівалентного матеріалу b_{11} , b_{21} , b_{31} .

На рисунках 3...6 наведені результати розподілу переміщень і напружень першого чисельного експерименту з умовами симетрії.

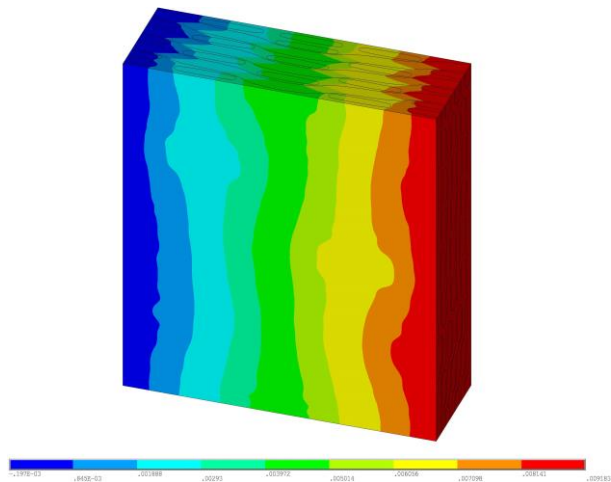


Рис. 3. Розподіл переміщень всієї моделі u_x , м

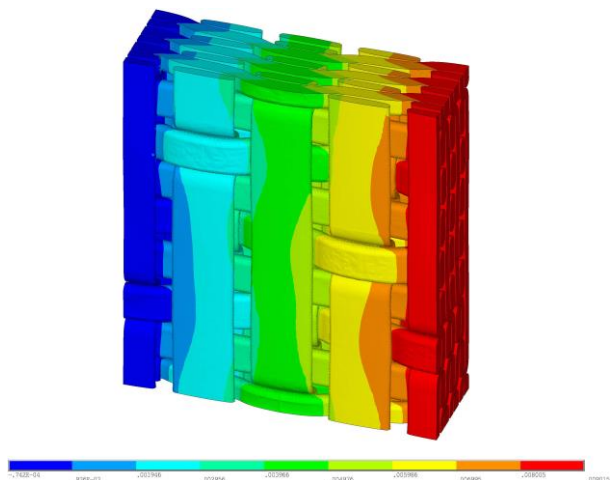


Рис. 4. Розподіл переміщень волокон u_x , м

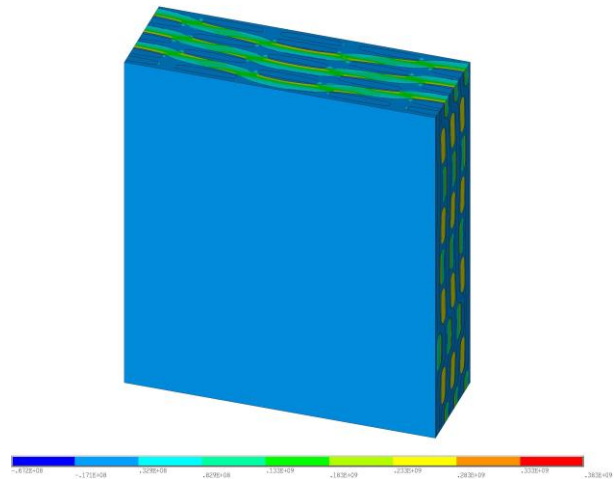


Рис. 5. Розподіл нормальних напружень всієї моделі σ_x , Па

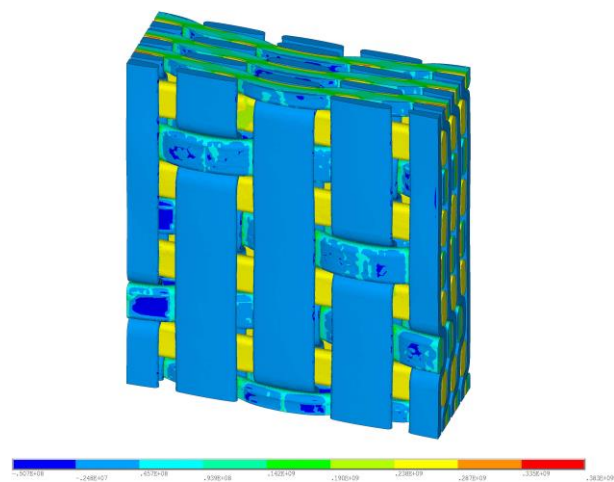


Рис. 6. Розподіл нормальних напружень волокон σ_x , Па

Моделювання розтягнення у напрямку Y

Для обчислення ϵ приймалась рівною 10^{-3} . Така деформація забезпечується переміщенням $u_y|_{y=b} = \epsilon \cdot b$.

Середні значення компонентів тензору деформації мають значення:

$$\begin{aligned} \langle \epsilon_x \rangle &= 0; \langle \epsilon_y \rangle = 10^{-3}; \langle \epsilon_z \rangle = 0; \\ \langle \gamma_{xy} \rangle &= 0; \langle \gamma_{yz} \rangle = 0; \langle \gamma_{zx} \rangle = 0. \end{aligned} \quad (21)$$

Граничні умови симетрії задаються за виразами (17) і наступним чином:

$$\begin{aligned} \text{на площині } x = a: \quad & u_x = 0; \tau_{xy} = 0; \tau_{xz} = 0; \\ \text{на площині } y = b: \quad & u_y = \epsilon \cdot b; \tau_{xy} = 0; \tau_{yz} = 0; \\ \text{на площині } z = c: \quad & u_z = 0; \tau_{yz} = 0; \tau_{xz} = 0. \end{aligned} \quad (22)$$

Граничні умови періодичності задаються за допомогою (20) та:

співвідношень для площин $x = 0$ та $x = a$:

$$\begin{aligned}
u_{xa} &= u_{x0}; u_{ya} = u_{y0}; u_{za} = u_{z0}; \\
\text{співвідношень для площин } y = 0 \text{ та } y = b: \\
u_{xb} &= u_{x0}; u_{yb} = u_{y0} + \varepsilon \cdot b; u_{zb} = u_{z0}; \\
\text{співвідношень для площин } z = 0 \text{ та } z = c: \\
u_{xc} &= u_{x0}; u_{yc} = u_{y0}; u_{zc} = u_{z0}.
\end{aligned} \quad (23)$$

Результати чисельного експерименту дозволяють визначити на основі співвідношення (8) пружну характеристику еквівалентного матеріалу b_{22} .

Моделювання розтягнення у напрямку Z

Для обчислення ε приймалась рівною 10^{-3} . Така деформація забезпечується переміщенням $u_z|_{z=c} = \varepsilon \cdot c$.

Середні значення компонентів тензору деформацій мають значення:

$$\begin{aligned}
\langle \varepsilon_x \rangle &= 0; \langle \varepsilon_y \rangle = 0; \langle \varepsilon_z \rangle = 10^{-3}; \\
\langle \gamma_{xy} \rangle &= 0; \langle \gamma_{yz} \rangle = 0; \langle \gamma_{zx} \rangle = 0.
\end{aligned} \quad (24)$$

Граничні умови симетрії задаються за виразами (17) і наступним чином:

$$\begin{aligned}
\text{на площині } x = a: u_x &= 0; \tau_{xy} = 0; \tau_{xz} = 0; \\
\text{на площині } y = b: u_y &= 0; \tau_{xy} = 0; \tau_{yz} = 0; \\
\text{на площині } z = c: u_z &= \varepsilon \cdot c; \tau_{yz} = 0; \tau_{xz} = 0.
\end{aligned} \quad (25)$$

Граничні умови періодичності задаються за допомогою (20) та:

$$\begin{aligned}
\text{співвідношень для площин } x = 0 \text{ та } x = a: \\
u_{xa} &= u_{x0}; u_{ya} = u_{y0}; u_{za} = u_{z0}; \\
\text{співвідношень для площин } y = 0 \text{ та } y = b: \\
u_{xb} &= u_{x0}; u_{yb} = u_{y0}; u_{zb} = u_{z0}; \\
\text{співвідношень для площин } z = 0 \text{ та } z = c: \\
u_{xc} &= u_{x0}; u_{yc} = u_{y0}; u_{zc} = u_{z0} + \varepsilon \cdot c.
\end{aligned} \quad (26)$$

Результати чисельного експерименту дозволяють визначити на основі співвідношення (9) пружні характеристики еквівалентного матеріалу b_{23} b_{33} .

Моделювання зсуву у площині XY

Для обчислення ε приймалась рівною 10^{-3} . Така деформація забезпечується переміщенням $u_x|_{y=b} = \varepsilon \cdot b$.

Середні значення компонентів тензору деформацій мають значення:

$$\begin{aligned}
\langle \varepsilon_x \rangle &= 0; \langle \varepsilon_y \rangle = 0; \langle \varepsilon_z \rangle = 0; \\
\langle \gamma_{xy} \rangle &= 10^{-3}; \langle \gamma_{yz} \rangle = 0; \langle \gamma_{zx} \rangle = 0.
\end{aligned} \quad (27)$$

Граничні умови симетрії задаються за виразами (17) і наступним чином:

$$\begin{aligned}
\text{на площині } x = a: u_y &= 0; \sigma_x = 0; \tau_{xz} = 0; \\
\text{на площині } y = b: u_x &= \varepsilon \cdot b; \sigma_y = 0; \tau_{yz} = 0; \\
\text{на площині } z = c: u_z &= 0; \tau_{yz} = 0; \tau_{xz} = 0.
\end{aligned} \quad (28)$$

Граничні умови періодичності задаються за допомогою (20) та:

співвідношень для площин $x = 0$ та $x = a$:

$$\begin{aligned}
u_{xa} &= u_{x0}; u_{ya} = u_{y0}; u_{za} = u_{z0}; \\
\text{співвідношень для площин } y = 0 \text{ та } y = b: \\
u_{xb} &= u_{x0} + \varepsilon \cdot b; u_{yb} = u_{y0}; u_{zb} = u_{z0};
\end{aligned} \quad (29)$$

співвідношень для площин $z = 0$ та $z = c$:

$$u_{xc} = u_{x0}; u_{yc} = u_{y0}; u_{zc} = u_{z0}.$$

Результати чисельного експерименту дозволяють визначити на основі співвідношення (10) пружну характеристику еквівалентного матеріалу b_{44} .

Моделювання зсуву у площині YZ

Для обчислення ε приймалась рівною 10^{-3} . Така деформація забезпечується переміщенням $u_y|_{z=c} = \varepsilon \cdot c$.

Середні значення компонентів тензору деформацій мають значення:

$$\begin{aligned}
\langle \varepsilon_x \rangle &= 0; \langle \varepsilon_y \rangle = 0; \langle \varepsilon_z \rangle = 0; \\
\langle \gamma_{xy} \rangle &= 0; \langle \gamma_{yz} \rangle = 10^{-3}; \langle \gamma_{zx} \rangle = 0.
\end{aligned} \quad (30)$$

Граничні умови симетрії задаються за виразами (17) і наступним чином:

$$\begin{aligned}
\text{на площині } x = a: u_x &= 0; \tau_{xy} = 0; \tau_{xz} = 0; \\
\text{на площині } y = b: u_z &= 0; \sigma_y = 0; \tau_{yz} = 0; \\
\text{на площині } z = c: u_y &= \varepsilon \cdot c; \sigma_z = 0; \tau_{xz} = 0.
\end{aligned} \quad (31)$$

Граничні умови періодичності задаються за допомогою (20) та:

$$\begin{aligned}
\text{співвідношень для площин } x = 0 \text{ та } x = a: \\
u_{xa} &= u_{x0}; u_{ya} = u_{y0}; u_{za} = u_{z0}; \\
\text{співвідношень для площин } y = 0 \text{ та } y = b: \\
u_{xb} &= u_{x0}; u_{yb} = u_{y0}; u_{zb} = u_{z0}; \\
\text{співвідношень для площин } z = 0 \text{ та } z = c: \\
u_{xc} &= u_{x0}; u_{yc} = u_{y0} + \varepsilon \cdot c; u_{zc} = u_{z0}.
\end{aligned} \quad (32)$$

Результати чисельного експерименту дозволяють визначити на основі співвідношення (11) пружну характеристику еквівалентного матеріалу b_{55} .

Моделювання зсуву у площині XZ

Для обчислення ε приймалась рівною 10^{-3} . Така деформація забезпечується переміщенням $u_x|_{z=c} = \varepsilon \cdot c$.

Середні значення компонентів тензору деформацій мають значення:

$$\begin{aligned}
\langle \varepsilon_x \rangle &= 0; \langle \varepsilon_y \rangle = 0; \langle \varepsilon_z \rangle = 0; \\
\langle \gamma_{xy} \rangle &= 0; \langle \gamma_{yz} \rangle = 0; \langle \gamma_{zx} \rangle = 10^{-3}.
\end{aligned} \quad (33)$$

Граничні умови симетрії задаються за виразами (17) і наступним чином:

$$\begin{aligned}
\text{на площині } x = a: u_z &= 0; \sigma_x = 0; \tau_{xz} = 0; \\
\text{на площині } y = b: u_y &= 0; \tau_{xy} = 0; \tau_{yz} = 0; \\
\text{на площині } z = c: u_x &= \varepsilon \cdot c; \sigma_z = 0; \tau_{yz} = 0.
\end{aligned} \quad (34)$$

Граничні умови періодичності задаються за допомогою (20) та:

$$\begin{aligned} &\text{співвідношень для площин } x = 0 \text{ та } x = a: \\ &u_{xa} = u_{x0}; u_{ya} = u_{y0}; u_{za} = u_{z0}; \\ &\text{співвідношень для площин } y = 0 \text{ та } y = b: \\ &u_{xb} = u_{x0}; u_{yb} = u_{y0}; u_{zb} = u_{z0}; \\ &\text{співвідношень для площин } z = 0 \text{ та } z = c: \\ &u_{xc} = u_{x0} + \varepsilon \cdot c; u_{yc} = u_{y0}; u_{zc} = u_{z0}. \end{aligned} \quad (35)$$

Результати чисельного експерименту дозволяють визначити на основі співвідношення (12) пружну характеристику еквівалентного матеріалу b_{66} .

В результаті чисельних розрахунків з умовами симетрії визначені пружні характеристики еквівалентного гомогенного матеріалу.

Матриця коефіцієнтів жорсткості b , ГПа має вигляд:

$$B = \begin{bmatrix} 61,417 & 3,5992 & 1,9790 & 0 & 0 & 0 \\ 3,5992 & 48,950 & 1,9998 & 0 & 0 & 0 \\ 1,9790 & 1,9998 & 7,5190 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3,7027 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1,3638 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1,4620 \end{bmatrix}$$

Після обернення матриці за допомогою співвідношень (4) визначені ефективні пружні характеристики тривимірноармованого волокнистого композиційного матеріалу (табл. 1).

Таблиця 1
Ефективні пружні характеристики

Модуль пружності, МПа			Модуль зсуву, МПа		
E_x	E_y	E_z	G_{xy}	G_{yz}	G_{zx}
59984	47511	6565	3702,7	1363,8	1462
Коефіцієнт Пуассона					
ν_{xy}	ν_{yx}	ν_{xz}	ν_{zx}	ν_{yz}	ν_{zy}
0,04745	0,03758	0,638	0,0698	0,6519	0,0901

Для верифікації чисельних експериментів здійснене експериментальне дослідження пружних характеристик зразків тривимірноармованого композиційного матеріалу методом тензометрії за наведеною вище схемою армування (рис. 7).

Так для першого і другого чисельний експерименту – розтягнення у напрямках X та Y , дослідження зразків здійснено на універсальній випробувальній машині.

Зразки двох груп (виготовлені по основі і по утку) з композиційного матеріалу препаровані тензорезисторами Zemic з обох боків у середині робо-

чої зони. Величини деформацій тензорезисторів визначені за допомогою вимірювальної системи НВМ.



Рис. 7. Зразки після випробування

Визначені експериментально середні модулі пружності:

$$E_x = 56265 \text{ МПа};$$

$$E_y = 47289 \text{ МПа}.$$

Більша похибка у верифікації чисельного і експериментального дослідження становить 6,2 % для модуля пружності E_x .

Висновки

В роботі розроблена чисельна методика визначення ефективних пружних характеристик тривимірноармованого волокнистого композиційного матеріалу методом скінченних елементів за допомогою програмного пакету ANSYS.

Виконано математичне моделювання представницького елемента об'єму та чисельне визначення ефективних пружних характеристик композиційного матеріалу за допомогою проведення серії чисельних експериментів. Здійснені дві серії розрахунків з заданням відповідних умов симетрії та умов періодичності.

Експериментальна верифікація розробленої методики дає можливість з точністю достатньою для практичної реалізації використовувати її в проектних роботах.

Запропонована методика потребує подальшого відпрацювання для здійснювання аналізу напруженого та деформованого стану конструкції виготовленої із композиційного матеріалу на прикладі лопатки вентилятора.

Література

1. Методика определения упругих характеристик гибридного композиционного материала и

оценка её точности [Текст] / В. П. Павлов, Э. М. Нусратуллин, А. А. Филиппов и др. // Известия КГАСУ. – 2012. – № 3 (21). – С. 167-174.

2. Darya zadeh, S. A new numerical method for determination of effective elastic constants in a composite with cross-ply fibers [Text] / S. Darya zadeh, G. I. Lvov, Seyed Rahim Kiahosseini // Вісник НТУ «ХПІ». – 2014. – № 58 (1100). – С. 169-180.

3. Коновалов, Д. А. О численной оценке эффективных упругих характеристик эластомерных композитов при конечных деформациях с использованием метода спектральных элементов с помощью CAE FIDESYS [Текст] / Д. А. Коновалов, М. Я. Яковлев // Чебышевский сборник. – 2017. – Т. 18, Вып. 3. – С. 316-329. – DOI: 10.22405/2226-8383-2017-18-3-316-329.

4. Бахвалов, Н. С. Осреднение процессов в периодических средах. Математические модели механики композиционных материалов [Текст] / Н. С. Бахвалов, Г. П. Панасенко. – М. : Наука, 1984. – 352 с.

5. Победря, Б. Е. Механика композиционных материалов [Текст] / Б. Е. Победря. – М. : Изд-во Моск. ун-та, 1984. – 336 с.

6. Дмитриенко, Ю. И. Метод конечных элементов для решения локальных задач механики композиционных материалов [Текст] / Ю. И. Дмитриенко, А. П. Соколов. – М. : Изд-во МКГУ им. Н. Э. Баумана, 2010. – 66 с.

7. Малмейстер, А. К. Сопротивление полимерных и композиционных материалов [Текст] / А. К. Малмейстер, В. П. Тамуж, Г. А. Тетерс. – Рига : Зинатне, 1972. – 572 с.

8. Jones, Robert M. Mechanics of composite materials [Text] / Robert M. Jones. – 2nd ed., 1999. – 519 p.

9. Dvorak, G. J. Micromechanics of Composite Material, Solid Mechanics and Its Applications 186 [Text] / G. J. Dvorak. – Springer Science + Business Media B. V., 2013. – 442 p. – DOI: 10.1007/978-94-007-4101-0.

References

1. Pavlov, V. P., Nusratullin, E. M., Filippov, A.A., Mukhamedova, I. Z. Metodika opredeleniya uprugikh kharakteristik gibridnogo kompozitsionnogo

materiala i otsenka ee tochnosti [The methodology for determining the elastic characteristics of hybrid composite material and evaluation of its precision]. Izvestiya KGASU, 2012, no. 3 (21), pp. 167-174.

2. Darya zadeh, S., Lvov, G. I., Kiahosseini, Seyed Rahim. A new numerical method for determination of effective elastic constants in a composite with cross-ply fibers. Visnyk NTU KhPI, 2014, no. 58 (1100), pp. 169-180.

3. Konovalov, D. A., Yakovlev, M. Ya. O chislennoi otsenke effektivnykh uprugikh kharakteristik elastomernykh kompozitov pri konechnykh deformatsiyakh s ispol'zovaniem metoda spektral'nykh elementov s pomoshch'yu CAE FIDESYS [Numerical evaluation of effective elastic characteristics of elastomeric composites at finite deformations using the method of spectral elements with the CAE FIDESYS]. Chebyshevskii sbornik, 2017, chapter 18, vol. 3, pp. 316-329. DOI: 10.22405/2226-8383-2017-18-3-316-329.

4. Bakhvalov, N. S., Panasenko, G. P. Osrednenie protsessov v periodicheskikh sredakh. Matematicheskie modeli mekhaniki kompozitsionnykh materialov [Averaging processes in periodic environment. Mathematical models of mechanics of composite material]. Moscow, Nauka Publ., 1984. 352 p.

5. Pobedrya, B. E. Mekhanika kompozitsionnykh materialov [Mechanics of composite materials]. Moscow, Mosk. univ. Publ., 1984. 336 p.

6. Dmitrienko, Yu. I., Sokolov, A. P. Metod konechnykh elementov dlya resheniya lokal'nykh zadach mekhaniki kompozitsionnykh materialov [The method of finite elements for solving the goals of mechanics of composite material]. Moscow, MKGU im. N. E. Bauman Publ., 2010. 66 p.

7. Malmeister, A. K., Tamuzh, V. P., Teters, G. A. Soprotivlenie polimernykh i kompozitsionnykh materialov [Resistance of polymer and composite material], Riga, Zinatne Publ., 1972. 572 p.

8. Jones, Robert M. Mechanics of composite materials, 2nd ed., 1999, 519 p.

9. Dvorak, G. J. Micromechanics of Composite Material, Solid Mechanics and Its Applications 186. Springer Science + Business Media B. V., 2013. 442 p. DOI: 10.1007/978-94-007-4101-0.

Надійшла до редакції 18.06.2020, розглянута на редколегії 15.08.2020

ЧИСЛЕННОЕ ОПРЕДЕЛЕНИЕ ЭФФЕКТИВНЫХ УПРУГИХ ХАРАКТЕРИСТИК ТРЁХМЕРНОАРМИРОВАННОГО КОМПОЗИЦИОННОГО МАТЕРИАЛА

А. В. Морозов

Процессы, происходящие в композиционных материалах, описываются дифференциальными уравнениями в частных производных с переменными коэффициентами. В большинстве композиционные материалы имеют периодическую структуру, поэтому коэффициенты в уравнениях являются быстро осциллирующими периодическими функциями. Для исследования поля напряжений и деформаций конструкции из композиционного материала наиболее эффективным является метод конечных элементов, в котором неоднородный композиционный материал заменяется эквивалентным ему однородным анизотропным материалом.

Для определения осреднённых характеристик композиционного материала с периодической структурой необходима верифицированная методика, позволяющая его выполнить. Поэтому фундаментальной задачей механики композиционных материалов является определение эффективных упругих характеристик материала. Работа посвящена актуальной проблеме определения эффективных упругих характеристик трёхмерно армированных композиционных материалов по известным упругим характеристикам волокон и связующего с учётом распределения армирующих волокон в объёме композиционного материала.

В работе выполнено математическое моделирование минимального трёхмерного представительного элемента объёма с заданной схемой армирования и геометрическим размерам компонентов. Численные эксперименты получены с помощью программного пакета ANSYS. Рядом численных экспериментов моделируются шесть видов деформации: одноосные растяжения в направлениях X, Y, Z и сдвиги в плоскостях XY, YZ, XZ. В результате численного исследования напряжённого и деформированного состояния представительного элемента объёма композиционного материала рассчитаны эффективные упругие постоянные эквивалентного однородного материала. Две серии расчетов выполнены с заданием соответствующих условий симметрии и условий периодичности.

По результатам экспериментального исследования выполнена верификация предложенной методики определения эффективных упругих характеристик трехмерноармированных волокнистых композиционных материалов. Разработанная численная методика позволяет решать задачи механики композиционных материалов с помощью современных программных комплексов, использующих в математической основе метод конечных элементов.

Ключевые слова: представительный элемент объёма; композиционные материалы; эффективные упругие характеристики; гомогенизация; численный анализ.

NUMERICAL DETERMINATION OF EFFECTIVE ELASTIC CHARACTERISTICS OF THREE-DIMENSIONAL FIBER COMPOSITE MATERIAL

A. Morozov

The processes occurring in composite materials are determined by differential equations in partial derivatives with variable coefficients. Most composite materials have a periodic structure, so the coefficients in the equations are rapidly oscillatory periodic functions. The most effective method for studying the stress and deformation field in structures made of composite materials is the method of finite elements, where a nonhomogeneous composite material is replaced by an equivalent homogeneous anisotropic material. To determine averaged characteristics of a composite material with a periodic structure requires a verified methodology allowing to do this. Therefore, the fundamental goal of the mechanics of composite materials is to calculate the effective elastic characteristics of the material. The paper considers the urgent issue of determining effective elastic characteristics of three-dimensional reinforced composite materials based on known elastic properties of fibers and matrix and distribution of reinforcing fibers by volume of composite material.

The paper presents the mathematical modeling of the minimum three-dimensional representative volume element based on the specified reinforcement scheme and geometrical dimensions of components. Numerical experiments are performed with the ANSYS software package. A series of numerical experiments simulate six deformation cases: uniaxial tension in the X, Y, Z directions, and shear in the XY, YZ, and XZ planes. Numerical studies of the stress and strain state of the representative volume element of composite material determine the effective elastic constants of equivalent homogeneous material. Two series of calculations are performed with specifying appropriate symmetry and periodicity conditions.

The results of the experimental study allow for the verification of the proposed methodology for determining the effective elastic characteristics of three-dimensional reinforced fiber composite materials. The developed numerical methodology enables us to solve the issues of the mechanics of composite materials with the help of modern software packages in the mathematical framework of which the finite element method is used.

Keywords: representative volume element; composite materials; effective elastic characteristics; homogenization; numerical analysis.

Морозов Андрій Володимирович – провідний інженер-дослідник ДП «Івченко-Прогрес», Запоріжжя, Україна.

Andrii Morozov – leading research engineer SE “Ivchenko-Progres”, Zaporizhzhia, Ukraine,
e-mail: avm1478@gmail.com, ORCID Author ID: 0000-0002-9343-6211.