

УДК 62-585.8:621.88:62-567

doi: 10.32620/aktt.2020.8.14

А. А. ТАРАСЕНКО, А. И. ТАРАСЕНКО

Национальный университет кораблестроения им. адм. Макарова, Николаев, Украина

УРАВНЕНИЯ ПРОСТРАНСТВЕННОГО ДВИЖЕНИЯ ТВЕРДОГО ТЕЛА С ПОДАТЛИВЫМ КРЕПЛЕНИЕМ К ФУНДАМЕНТУ (ЗАДАЧА АМОРТИЗАЦИИ В ПРОСТРАНСТВЕ)

Задача крепления оборудования, особенно судового, считается важной в условиях вибрационного и ударного воздействия. Оборудование может быть установлено на амортизаторы. Эти амортизаторы решают задачи виброизоляции и ударной защиты. Классический случай - применение резинометаллических амортизаторов. Оборудование может быть прикреплено к фундаменту с помощью болтов и шпонок. В этом случае важно чтобы при ударной нагрузке болты не разрушились и не раскрылись стыки соединений. Интересен случай навесного оборудования, крепление которого не должно разрушиться. Крепление навесного оборудования это, как правило, болты, разрушение которых не допустимо. Если в случае пластического деформирования болтов их можно затянуть, то заменить разрушившийся амортизатор непросто. Состояние устройств крепления можно исследовать путем моделирования, с помощью вычислительной техники, движения агрегата. Применение вычислительной техники оправдано громоздкостью задачи, нелинейными характеристиками резинометаллических амортизаторов и болтов в случае пластических деформаций. Обычно при моделировании движения амортизированного оборудования ограничиваются плоской задачей или случаем жестких шпонок. Для решения пространственной задачи вводим три системы координат. Одна система неподвижна и связана с фундаментом. Две других системы координат имеют начало в центре тяжести агрегата. Оси одной из этих систем параллельны осям системы, связанной с фундаментом. А другая из этих систем жестко связана с агрегатом. В начальный момент в случае покоя все три системы совпадают между собой. Для общего случая движения можно применить углы Эйлера, но ввиду малости перемещений оборудования происходит потеря точности. Действительно, линия пересечения плоскостей, определяющих углы Эйлера определена с погрешностью (случай практически параллельных плоскостей). Для решения этой задачи авторы использовали углы между осями, связанными с оборудованием и плоскостью фундамента. Затем через эти углы выразили углы Эйлера и получили выражения, позволяющие применение численных методов для решения уравнений движения.

Ключевые слова: оборудование; углы Эйлера; узлы крепления; амортизатор; численные методы.

Введение

Известно применение амортизаторов с целью уменьшения вибраций, звукоизоляции и защиты от внешнего ударного воздействия [1]. Оборудование может быть установлено на амортизаторы. Эти амортизаторы решают задачи виброизоляции и ударной защиты. Классический случай - применение резинометаллических амортизаторов. Оборудование может быть прикреплено к фундаменту с помощью болтов и шпонок. В этом случае важно чтобы при ударной нагрузке болты не разрушились и не раскрылись стыки соединений. Интересен случай навесного оборудования, крепление которого не должно разрушиться. Крепление навесного оборудования это, как правило, болты, разрушение которых не допустимо. Если в случае пластического деформирования болтов их можно затянуть, то заменить разрушившийся амортизатор непросто. Состояние устройств крепления можно исследовать путем

моделирования, с помощью вычислительной техники, движения агрегата. Применение вычислительной техники оправдано громоздкостью задачи, нелинейными характеристиками резинометаллических амортизаторов и болтов в случае пластических деформаций. Обычно при моделировании движения амортизированного оборудования ограничиваются плоской задачей или случаем жестких шпонок. Для получения полной картины движения оборудования, особенно в случае ударной нагрузки, желательно рассмотреть пространственную задачу.

Формулирование проблемы

Требуется на основе уравнений Эйлера [2] разработать удобную для применения численных методов и вычислительной техники математическую модель движения в пространстве амортизированного агрегата. Для общего случая движения можно применить углы Эйлера, но ввиду малости перемещений оборудования происходит потеря точности.

Действительно, линия пересечения плоскостей определяющих углы Эйлера определена с погрешностью (случай практически параллельных плоскостей).

Цель работы – на основе уравнений Эйлера [2], разработать удобную для применения численных методов и вычислительной техники математическую модель (систему дифференциальных уравнений) движения в пространстве амортизированного агрегата.

Общие соотношения

Традиционно [2], при рассмотрении пространственного движения твердого тела вводят три системы координат.

Первая система x, y, z – неизменно (жестко) связанная с движущимся агрегатом главная центральная система координат. Авторы просят прощения у тех, кто любит ξ, η и ζ , но эти обозначения не удобны при программировании.

Вторая система x_1, y_1, z_1 – центральная система координат, для движущегося агрегата оси которой параллельны осям третьей системы координат.

Третья система x_0, y_0, z_0 – неподвижная, жестко связанная с фундаментом система координат.

Следует подчеркнуть, что в начальный момент времени соответствующие оси всех трех систем координат совпадают между собой.

Движение агрегата может быть описано шестью уравнениями второго порядка в указанных выше системах координат

$$J_x \dot{\omega}_x + \omega_y \omega_z (J_z - J_y) = M_x, \quad (1.1)$$

$$J_y \dot{\omega}_y + \omega_z \omega_x (J_x - J_z) = M_y, \quad (1.2)$$

$$J_z \dot{\omega}_z + \omega_x \omega_y (J_y - J_x) = M_z, \quad (1.3)$$

$$m \ddot{X}_0 = P_{x_0}, \quad (1.4)$$

$$m \ddot{Y}_0 = P_{y_0}, \quad (1.5)$$

$$m \ddot{Z}_0 = P_{z_0}, \quad (1.6)$$

в этих уравнениях:

J_x, J_y, J_z – главные центральные моменты инерции относительно осей x, y, z ;

$\omega_x, \omega_y, \omega_z$ – проекции вектора угловой скорости на оси x, y, z ;

M_x, M_y, M_z – проекции вектора главного момента внешних сил на оси x, y, z ;

m – масса агрегата;

X_0, Y_0, Z_0 – координаты центра тяжести агрегата в системе x_0, y_0, z_0 ;

$P_{x_0}, P_{y_0}, P_{z_0}$ – проекции главного вектора внешних сил на оси x_0, y_0, z_0 .

Усилия в креплениях могут быть вычислены, если известны координаты точек крепления амортизаторов к фланцу в процессе движения агрегата. Нужно знать величину деформации амортизатора или болта. Для этого кроме координат центра тяжести нужны еще углы. Проекции угловых скоростей обычно выражают через углы Эйлера [2]:

$$\omega_x = \dot{\psi} \sin \theta \sin \varphi + \dot{\theta} \cos \varphi, \quad (2.1)$$

$$\omega_y = \dot{\psi} \sin \theta \cos \varphi - \dot{\theta} \sin \varphi, \quad (2.2)$$

$$\omega_z = \dot{\psi} \cos \theta + \dot{\varphi}, \quad (2.3)$$

в этих уравнениях согласно [2]:

ψ – угол прецессии;

φ – угол собственного вращения;

θ – угол нутации.

При определении величин углов Эйлера важное значение имеет положение линии пересечения плоскостей x, o, y и x_1, o, y_1 . При малых перемещениях эти плоскости практически параллельны (рис. 1).

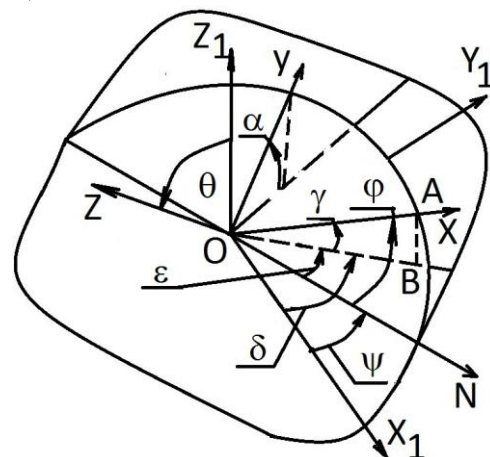


Рис. 1. Углы Эйлера и плоскости x, o, y и x_1, o, y_1

На рис. 1. кроме углов Эйлера показаны углы, которые выбраны в качестве независимых параметров. Это углы:

α – угол между осью y и проекцией этой оси на плоскость x_1, y_1, z_1 ;

γ – угол между осью x и проекцией этой оси на плоскость x_1, y_1, z_1 ;

δ – угол между осью x_1 и проекцией осью x на плоскость x_1, y_1, z_1 .

На рис. 2. показан фрагмент рис. 1. между осями x_1 и x .

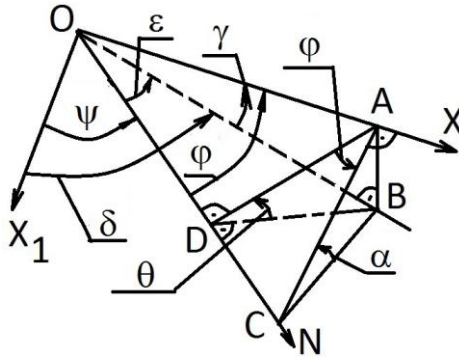


Рис. 2. Фрагмент рис. 1 для определения геометрических соотношений

С помощью рис. 2. можно получить следующие геометрические соотношения:

$$\cos \theta = \sqrt{1 - \sin^2 \alpha - \sin^2 \gamma}; \quad (3)$$

$$\sin \theta = \text{sign}(\alpha + \gamma) \sqrt{\sin^2 \alpha + \sin^2 \gamma}; \quad (4.1)$$

$$\sin \theta = \frac{\sin \alpha}{\cos \phi}; \quad (4.2)$$

$$\sin \phi = \frac{\sin \gamma}{\sin \theta}; \quad \cos \phi = \frac{\sin \alpha}{\sin \theta}; \quad (5)$$

$$\sin \epsilon = \frac{\sin \phi \cos \theta}{\cos \gamma}; \quad \cos \epsilon = \frac{\cos \phi}{\cos \gamma}; \quad (6)$$

$$\psi = \delta - \epsilon. \quad (7)$$

Эти соотношения позволяют вычислить углы Эйлера по известным углам α , γ и δ .

Из уравнения (2.3) получим

$$\dot{\psi} = \frac{\omega_z}{\cos \theta} - \frac{\dot{\phi}}{\cos \theta}. \quad (8)$$

Подставив (8) в (2.1) и (2.2) запишем

$$\omega_x = -\dot{\phi} \frac{\sin \theta \sin \phi}{\cos \theta} + \dot{\theta} \cos \phi + \omega_z \frac{\sin \theta \sin \phi}{\cos \theta}; \quad (9)$$

$$\omega_y = -\dot{\phi} \frac{\sin \theta \cos \phi}{\cos \theta} - \dot{\theta} \sin \phi + \omega_z \frac{\sin \theta \cos \phi}{\cos \theta}; \quad (10)$$

Продифференцировав (4.2) и подставив $\dot{\theta}$ в (9) получим

$$\omega_x = \frac{\dot{\alpha}}{\sqrt{1 - \frac{\sin^2 \gamma}{\cos^2 \alpha}}} + \omega_z \frac{\sin \gamma}{\cos \theta}. \quad (11)$$

Продифференцировав (5) и подставив $\dot{\phi}$ в (10) получим

$$\omega_y = \frac{-\dot{\gamma}}{\sqrt{1 - \frac{\sin^2 \alpha}{\cos^2 \gamma}}} + \omega_z \frac{\sin \alpha}{\cos \theta}. \quad (12)$$

Продифференцировав (6) и подставив $\dot{\epsilon}$ в (2.3) получим

$$\omega_z = \dot{\delta} \cos \theta + \dot{\gamma} \frac{\sin \alpha}{\cos \gamma}. \quad (13)$$

Естественно, предварительно дифференцируется (7) в полученное выражение подставляется $\dot{\epsilon}$, а выражение для $\dot{\psi}$ подставляется (2.3).

Таким образом, угловые скорости выражены, с учетом (3), через введенные в качестве независимых, переменные α , γ , δ .

Известно много случаев крепления оборудования, при котором вращение оборудования невозможно. В этом случае

$$\omega_z = 0, X_o = 0 \text{ и } Y_o = 0. \quad (14)$$

Тогда движение оборудования описывается уравнениями (1.6), (11) и (12) с учетом выражений (14).

В этом случае точка «о» может быть не центр тяжести, а центром фланца и (1.6) надо корректировать.

Результаты расчетов по уравнениям (1.6), (11) и (12) подтверждены экспериментами проведенными авторами на ударном стенде.

Подставив (13) в (12) и (11) получим:

$$\omega_x = \frac{\dot{\alpha} \cos \alpha + \dot{\gamma} \cdot \sin \gamma \cdot \sin \alpha}{\cos \theta} + \dot{\delta} \sin \gamma; \quad (15)$$

$$\omega_y = -\dot{\gamma} \frac{\cos \theta}{\cos \gamma} + \dot{\delta} \sin \alpha; \quad (16)$$

Решение проблемы (применение численного метода)

Движение агрегата описывается шестью дифференциальными уравнениями второго порядка или двенадцатью уравнениями первого порядка.

Большинство численных методов работают следующим образом:

- численный метод обращается к подпрограмме (процедуре) и передает этой процедуре следующие параметры α , γ , δ , X_o , Y_o , Z_o , $\dot{\alpha}$, $\dot{\gamma}$, $\dot{\delta}$, \dot{X}_o , \dot{Y}_o , \dot{Z}_o .

- полученные параметры известны и используя их необходимо определить производные от этих параметров. Производные от первых шести из перечисленных параметров очевидны

$$\frac{d\alpha}{dt} = \dot{\alpha}; \quad \frac{d\gamma}{dt} = \dot{\gamma}; \quad \frac{d\delta}{dt} = \dot{\delta};$$

$$\frac{dX_o}{dt} = \dot{X}_o; \quad \frac{dY_o}{dt} = \dot{Y}_o; \quad \frac{dZ_o}{dt} = \dot{Z}_o.$$

Производные от вторых шести параметров определяются из уравнений (1.1) – (1.6).

Подставив выражения (13), (15) и (16) в уравнения (1.1), (1.2) и (1.3) запишем

$$\frac{\ddot{\alpha} \cos \alpha + \ddot{\gamma} \cdot \sin \gamma \cdot \sin \alpha}{\cos \theta} + \ddot{\delta} \sin \gamma = Q_x, \quad (17)$$

$$-\ddot{\gamma} \frac{\cos \theta}{\cos \gamma} + \ddot{\delta} \sin \alpha = Q_y, \quad (18)$$

$$\ddot{\gamma} \frac{\sin \alpha}{\cos \gamma} + \ddot{\delta} \cos \theta = Q_z, \quad (19)$$

В этих уравнениях:

$$Q_z = \frac{M_z}{J_z} - \omega_x \omega_y \frac{J_y - J_x}{J_z} - \dot{\delta} \frac{d \cos \theta}{dt} - \dot{\gamma} \frac{d}{dt} \left(\frac{\sin \alpha}{\cos \gamma} \right),$$

$$Q_y = \frac{M_y}{J_y} - \omega_x \omega_z \frac{J_x - J_z}{J_y} - \dot{\delta} \cdot \dot{\alpha} \cos \alpha + \dot{\gamma} \frac{d}{dt} \left(\frac{\cos \theta}{\cos \gamma} \right),$$

$$Q_x = \frac{M_x}{J_x} - \omega_y \omega_z \frac{J_z - J_y}{J_x} - \dot{\delta} \cdot \dot{\gamma} \cos \gamma -$$

$$-\dot{\gamma} \frac{d}{dt} \left(\frac{\sin \alpha \sin \gamma}{\cos \theta} \right) - \dot{\alpha} \frac{d}{dt} \left(\frac{\cos \alpha}{\cos \theta} \right).$$

При дифференцировании выражений содержащих «cos θ» авторы рекомендуют использовать уравнение (3).

Уравнения (17), (18) и (19) могут быть разрешены относительно вторых производных.

$$\ddot{\delta} = \frac{Q_y \sin \alpha + Q_z \cos \theta}{\cos^2 \gamma};$$

$$\ddot{\gamma} = \frac{\ddot{\delta} \cos \gamma \sin \alpha - Q_y \cos \gamma}{\cos \theta};$$

$$\ddot{\alpha} = \frac{Q_x \cos \theta - \ddot{\gamma} \sin \gamma \sin \alpha - \ddot{\delta} \cos \theta \sin \gamma}{\cos \alpha}.$$

Выводы

Таким образом, полученные уравнения позволяют получить устойчивое решение с помощью численного метода.

Литература

1. Крючков, Ю. С. Ударостойкость судового энергетического оборудования [Текст] / Ю. С. Крючков, И. И. Гусаров, А. А. Гальцев. – Л. : Судостроение, 1969. – 253 с.
2. Яблонский, А. А. Курс теоретической механики. Часть II [Текст] / А. А. Яблонский. – М. : Высшая школа, 1971 – 487 с.

References

1. Krjuchkov, Ju. S., Gusarov, I. I., Gal'cev, A. A. *Udarostojkost' sudovogo jenergeticheskogo oborudovanija* [Impact resistance of marine power equipment. Leningrad, Sudostroenie Publ., 1969. 253 p.
2. Jablonskij, A. A. *Kurs teoreticheskoy mehaniki. Chast' II* [The course of theoretical mechanics. Part II]. Moscow, Vysshaja shkola Publ., 1971. 487 p.

Надійшла до редакції 08.06.2020, розглянута на редколегії 15.08.2020

РІВНЯННЯ ПРОСТОРОВОГО РУХУ ТВЕРДОГО ТІЛА З ПОДАТЛИВИМ КРІПЛЕННЯМ ДО ФУНДАМЕНТУ (ЗАВДАННЯ АМОРТИЗАЦІЇ В ПРОСТОРІ)

А. О. Тарасенко, О. І. Тарасенко

Завдання кріплення обладнання, особливо суднового, вважається важливою в умовах вібраційного і ударного впливу. Устаткування може бути встановлено на амортизатори. Ці амортизатори вирішують завдання віброізоляції і ударного захисту. Класичний випадок - застосування резино-металевих амортизаторів. Устаткування може бути прикріплено до фундаменту за допомогою болтів і шпонок. У цьому випадку важливо щоб при ударному навантаженні болти не зруйнувати і розкрилися стики з'єднань. Цікавий випадок навісного обладнання, кріплення якого не повинно зруйнуватися. Кріплення навісного обладнання це, як правило, болти, руйнування яких не допустимо. Якщо в разі пластичного деформування болтів їх можна затягнути, то замінити зруйнований амортизатор непросто. Стан пристроїв кріплення можна досліджувати шляхом моделювання, за допомогою обчислювальної техніки, руху агрегату. Застосування обчислювальної техніки виправдано громіздкістю завдання, нелінійними характеристиками резино-металевих амортизаторів і болтів в разі пластичних деформацій. Зазвичай при моделюванні руху амортизованого обладнання обмежуються плоскою задачею або випадком жорстких шпонок. Для вирішення просторової задачі вводимо три системи координат. Одна система нерухова і пов'язана з фундаментом. Дві інших системи координат мають початок в центрі мас агрегату. Осі однієї з цих систем паралельні осям системи пов'язаної з фундаментом. А інша з цих систем жорстко пов'язана з агрегатом. У початковий момент в разі спокою все три системи збігаються між собою. Для загального випадку руху можна застосувати кути Ейлера, але через малість переміщень обладнання відбувається втрата точності. Дійсно, лінія перетинання площин які визначають кути Ейлера знайдена з похибкою (випадок практично паралельних площин). Для вирішення цього завдання автори використовували кути між осями пов'язаними з обладнанням і площиною фундаменту. Потім через

ці кути визначають кути Ейлера і одержують вираження зручні для застосування чисельних методів для вирішення рівнянь руху.

Ключові слова: обладнання; кути Ейлера; вузли кріплення; амортизатор; чисельні методи.

EQUATIONS OF SPATIAL MOTION OF A SOLID BODY WITH MOLDABLE FASTENING TO THE FOUNDATION (THE TASK OF DEPRECIATION IN SPACE)

A. Tarasenko, O. Tarasenko

The task of fastening equipment, especially ship equipment, is considered important in conditions of vibration and shock. Equipment can be mounted on shock absorbers. These shock absorbers solve the problems of vibration isolation and shock protection. The classic case is the use of rubber-metal shock absorbers. The equipment can be attached to the foundation with bolts and dowels. In this case, the bolts mustn't collapse and the joints do not open during shock. An interesting case is an attachment, the fastening of which should not be destroyed. Attachments are usually attached by bolts, the destruction of which is not permissible. In the case of plastic deformation of the bolts they can be tightened, and then replacing the collapsed shock absorber is not easy. The condition of the fastening devices can be investigated by modeling, using computer technology, the movement of the unit. The use of computer technology is justified by the cumbersomeness of the task, the nonlinear characteristics of rubber-metal shock absorbers, and bolts in the case of plastic deformations. Typically, when modeling the movement of shock-absorbing equipment, they are limited to a flat task or a case of hard keys. To solve the spatial problem, we introduce three coordinate systems. One system is non-mobile and connected to the foundation. Two other coordinate systems have a beginning at the center of gravity of the unit. The axes of one of these systems are parallel to the axes of the system associated with the foundation. And the other of these systems are rigidly connected to the unit. At the initial moment, in case of rest, all three systems coincide. For the general case of motion, Euler angles can be used, but due to the small movements of the equipment, accuracy is lost. Indeed, the intersection line of the planes determining the Euler angles is determined with an error (the case of almost parallel planes). To solve this problem, the authors used the angles between the axes associated with the equipment and the foundation plane. Then, through these angles, Euler angles were expressed and expressions were obtained that allow the use of numerical methods to solve the equations of motion.

Keywords: equipment; Euler angles; attachment points; shock absorber; numerical methods.

Тарасенко Андрей Александрович – асп. каф. теоретической механики Национального университета кораблестроения им. адм. Макарова, Николаев, Украина.

Тарасенко Александр Иванович – канд. техн. наук, доц. каф. МКМ Национального университета кораблестроения им. адм. Макарова, Николаев, Украина.

Andrei Tarasenko – PhD student of Dept. of Theoretical Mechanics, Admiral Makarov National University of Shipbuilding, Ukraine,

e-mail: tandr414@gmail.com, ORCID Author ID: 0000-0003-2082-3250,

<https://scholar.google.com.ua/citations?user=000000020823250>.

Oleksandr Tarasenko – Candidate of Technical Science, Assistant Professor of Dept. of Mechanics and machine design Admiral Makarov National University of Shipbuilding, Ukraine,

e-mail: taleks333@gmail.com, ORCID Author ID: 0000-0003-0363-4044, Scopus Author ID: 7006767975,

<https://scholar.google.com.ua/citations?user=0000000303634044>.