

УДК 539.3

В.Ю. Мірошніков, канд. техн. наук,
С.В. Олешкевич, канд. техн. наук,
А.В. Медведєва

ОЦІНЮВАННЯ НАПРУЖЕНОГО СТАНУ ЦИЛІНДРИЧНИХ ПОРОЖНИН У ПРОСТОРИ, ПРИ ЗАДАНОМУ ПРОСТОРОВОМУ АСИМЕТРИЧНОМУ НАВАНТАЖЕННІ

При проектуванні композитів у галузі машинобудування, проектуванні різного роду комунікацій і тунелів, прокладених під землею, потрібно знати напружено-деформований стан пружного тіла (простору або півпростору) з декількома порожнинами, а також взаємний їх вплив один на одного. Таку інформацію можна отримати, розв'язавши відповідну задачу теорії пружності. Натомість готових розрахунків таких задач у просторовому варіанті нема. Отже проблема розрахунку таких задач є актуальною.

У працях [1 – 4] вивчались просторові (тривимірні) задачі теорії пружності для тіл, які обмежені канонічними поверхнями (поверхні другого порядку: циліндр, конус, шар, еліпсоїд, параболоїд та інші). Точні рішення отримані виключно методом розділення змінних і методом Фур'є. Задачі для пружних тіл з декількома граничними поверхнями не можуть бути вирішені в рамках класичного підходу Фур'є. Для таких задач знадобилося створювати узагальнений метод Фур'є [5 – 8], витoki якого можна знайти в задачах дифракції хвиль на декількох тілах [9]. На основі цього методу і розроблено метод розв'язання задачі, зазначеної у заголовку. У статті [10] дано для циліндра з двома циліндричними порожнинами. У роботах [10 – 13] розглянуто розв'язання близької задачі для двох і більше циліндричних порожнин або включень із заданими напруженнями в пружному циліндрі, де наведені деякі результати числових розрахунків напружень, але не наведено аналізу впливу взаємного розташування навантаження на порожнинах.

У роботах [14, 15] проведено детальний аналіз напруженого стану простору з циліндричними порожнинами для крайових умов в переміщеннях і змішаних умов (на межах задано напруження та переміщення).

У цій статті проведено аналіз напружено-деформованого стану циліндричних порожнин під дією асиметрично прикладеного навантаження. Для досягнення цієї мети використано узагальнений метод Фур'є.

Постановка задачі. Метод розв'язання

Пружний однорідний простір має N кругових непересічних між собою циліндричних паралельних порожнин, на межах яких задано напруження, які будемо вважати швидко спадними до нуля по координаті z на далеких відстанях від початку координат.

Потрібно розв'язати рівняння рівноваги Ламе за умови:

$$F\vec{U} = \vec{F}_0^{(q)} \text{ на } S_q, q = 1, 2, \dots, N \quad (1)$$

де S_q – поверхня порожнини з номером q ,

$$F\vec{U} = 2 \cdot G \cdot \left[\frac{\sigma}{1-2 \cdot \sigma} \vec{n} \cdot \text{div} \vec{U} + \frac{\partial}{\partial n} \vec{U} + \frac{1}{2} (\vec{n} \cdot \text{rot} \vec{U}) \right], \quad (2)$$

де $\vec{n}$ - орт нормалі до поверхні S_q , G – модуль зсуву, σ – коефіцієнт Пуассона.

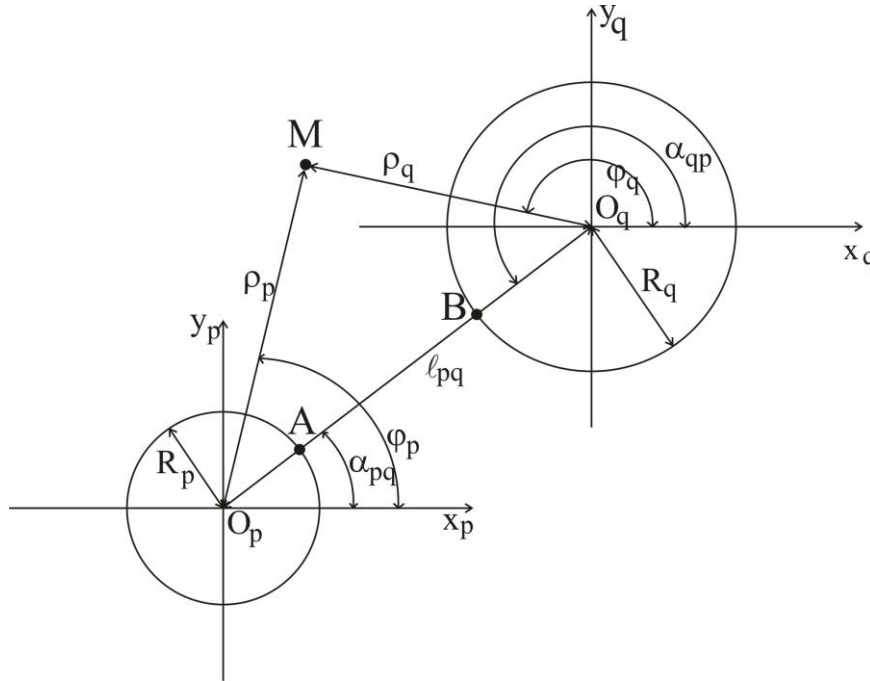


Рисунок 1 – Циліндричні порожнини в пружному просторі

Розв'язання задачі шукаємо у вигляді

$$\vec{U} = \sum_{p=1}^N \vec{U}_p, \quad (3)$$

де
$$\vec{U}_p = \int_{-\infty}^{\infty} d\lambda \sum_{m=-\infty}^{\infty} \vec{\Omega}_m^{(p)}(M_p; \lambda), \quad M_p = (\rho_p, \phi_p, z), \quad (4)$$

$$\vec{\Omega}_m^{(p)}(M_p; \lambda) = x_m^{(p)}(\lambda) \cdot \bar{S}_{1,m}(M_p; \lambda) + y_m^{(p)}(\lambda) \cdot \bar{S}_{2,m}(M_p; \lambda) + z_m^{(p)}(\lambda) \cdot \bar{S}_{3,m}(M_p; \lambda) \quad (5)$$

де $x_m^{(p)}(\lambda)$, $y_m^{(p)}(\lambda)$, $z_m^{(p)}(\lambda)$ - невідомі функції; $\bar{S}_{k,m}$ - базисні розв'язки рівняння Ламе зовні циліндра [7].

Напруження на поверхні пружного тіла з нормаллю $\vec{n}$ обчислюються за допомогою оператора напруження (2)

При розв'язанні задачі узагальненим методом Фур'є будемо користуватися формулами переходу в базисних розв'язках від однієї циліндричної системи координат, пов'язаної з циліндром з номером p , до іншої

циліндричної системи координат, пов'язаної з циліндром з номером q . Ці формули мають вигляд [1]

$$\left. \begin{aligned} \bar{S}_{1,m}(M_p; \lambda) &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} H_{m,n}^{(1)} \cdot \bar{R}_{1,n}(M_q; \lambda), \\ \bar{S}_{2,m}(M_p; \lambda) &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} H_{m,n}^{(1)} \cdot \bar{R}_{2,n}(M_q; \lambda) + H_{m,n}^{(2)} \cdot \bar{R}_{1,n}(M_q; \lambda), \\ \bar{S}_{3,m}(M_p; \lambda) &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} H_{m,n}^{(1)} \cdot \bar{R}_{3,n}(M_q; \lambda), \end{aligned} \right\} \quad (6)$$

де $H_{m,n}^{(1)} = (-1)^n \tilde{K}_{m-n}(\lambda \ell_{pq}) \cdot e^{i(m-n)\alpha_{pq}}$;

$$H_{m,n}^{(2)} = \frac{\lambda}{2} \ell_{pq} (-1)^{n+1} e^{i(m-n)\alpha_{pq}} [\tilde{K}_{m-n+1}(\lambda \ell_{pq}) + \tilde{K}_{m-n-1}(\lambda \ell_{pq})];$$

$$\tilde{K}(x) = (\text{sign}(x))^m \cdot K_m(|x|);$$

ℓ_{pq}, α_{pq} - позначено на рис.1

Для знаходження напруження на поверхні циліндру з номером q запишемо (1) у вигляді

$$\vec{U} = \vec{U}_q + \sum_{p=1, p \neq q}^N \vec{U}_p, \quad (7)$$

Перепишемо (7), застосувавши формули переходу (6):

$$\begin{aligned} \vec{U} &= \int_{-\infty}^{\infty} d\lambda \sum_{n=-\infty}^{\infty} \vec{\Omega}_n^{(q)}(M_q; \lambda) + \sum_{p=1, p \neq q}^N d\lambda \sum_{m=-\infty}^{\infty} \vec{\Omega}_n^{(p)}(M_q; \lambda) = \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} d\lambda \left\{ \sum_{n=-\infty}^{\infty} [x_n^{(q)}(\lambda) \cdot \bar{S}_{1,m}(M_p; \lambda) + y_n^{(q)}(\lambda) \cdot \bar{S}_{2,m}(M_p; \lambda) + \right. \\ &\quad + z_n^{(q)}(\lambda) \cdot \bar{S}_{3,m}(M_p; \lambda)] + \sum_{p=1, p \neq q}^N \sum_{m=-\infty}^{\infty} \sum_{n=-\infty}^{\infty} [x_m^{(q)}(\lambda) \cdot H_{m,n}^{(1)}(p, q) + \\ &\quad + y_n^{(q)}(\lambda) \cdot H_{m,n}^{(2)}(p, q)] \cdot \bar{R}_{1,n}(M_p; \lambda) + y_n^{(p)}(\lambda) \cdot H_{m,n}^{(1)}(p, q) \cdot \\ &\quad \cdot \bar{R}_{2,n}(M_p; \lambda) + z_n^{(q)}(\lambda) \cdot H_{m,n}^{(1)}(p, q) \cdot \bar{R}_{3,n}(M_p; \lambda) \Big\} \end{aligned} \quad (8)$$

В останній формулі всі базисні розв'язки записано в системі координат (ρ_q, ϕ_q, z) циліндра з номером q .

Застосуємо до (8) оператор напруження (2) та використаємо рівності для базисних розв'язок [7]. У результаті отримаємо вектор напруження від всього розв'язання (3) на поверхні циліндра з номером q . Прирівняємо цей вектор напруження при $\rho = R_q$ до заданого вектору напру-

ження, який діє на поверхні порожнини з $\vec{n} = -\vec{e}_\rho$:

$$\vec{F}_0^{(q)} = \vec{e}_\rho \cdot \sigma_\rho^{(q)} + \vec{e}_\phi \cdot \tau_{\rho\phi}^{(q)} + \vec{e}_z \cdot \tau_{\rho z}^{(q)}, \quad (9)$$

де $\sigma_\rho^{(q)}$, $\tau_{\rho\phi}^{(q)}$, $\tau_{\rho z}^{(q)}$ – задані функції. Розкладемо їх в ряди – інтеграли по ϕ і z :

$$\vec{F}_0^{(q)} = \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\lambda z} d\lambda \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{in\phi} (\vec{e}_\rho \cdot \tilde{\sigma}_{n,\rho}^{(q)}(\lambda) + \vec{e}_\phi \cdot \tilde{\tau}_{n,\phi}^{(q)} + \vec{e}_z \cdot \tilde{\tau}_{n,z}^{(q)}). \quad (10)$$

В отриманій векторній рівності прирівнюємо проекції при $\vec{e}_\rho$, $\vec{e}_\phi$, $\vec{e}_z$. У результаті отримаємо три рівності, які після звільнення в них від рядів та інтегралів дадуть три сукупності нескінченних систем лінійних алгебраїчних рівнянь щодо невідомих $x_n^{(q)}(\lambda)$, $y_n^{(q)}(\lambda)$, $z_n^{(q)}(\lambda)$. Оскільки всього циліндричних порожнин N ($q = 1, 2, \dots, N$), то таких сукупностей рівнянь буде $3N$. Це буде розв'язувальна система рівнянь задачі теорії пружності, що розглядається.

Необхідно зазначити, що нескінченні системи, до яких зведена проблема, припускають застосування до них методу редукції. При цьому наближені рішення сходяться до точного при збільшенні порядку системи.

Числовий аналіз задачі для двох циліндрів

Маємо дві паралельні циліндричні порожнини у просторі, які розташовані на відстані $\ell_{pq} = 40$ см, під кутом $\alpha_{pq} = 0$. Радіуси порожнин $R_p = 10$ см., $R_q = 10$ см., $\Delta\ell = (R_p + R_q) / \ell_{pq} = 0,5$. Простір – ізотропний матеріал, коефіцієнт Пуассона $\sigma = 0,35$, модуль пружності $E = 2$ кН/см². На межах циліндрів задано напруження у вигляді функції

$$\sigma_\rho^{(q)} = \frac{-a^4}{((z+b)^2 + a^2)^2} \quad (\text{висота хвилі } -1 \text{ кН/см}^2) \quad \text{при} \quad \tau_{\rho\phi}^{(p)} = \tau_{\rho\phi}^{(q)} = 0,$$

$$\tau_{\rho z}^{(p)} = \tau_{\rho z}^{(q)} = 0, \quad a=10, \quad \text{для циліндра } p \quad b_p = 0, \quad \text{для циліндра } q \quad b_q = 0 \dots 40.$$

При цьому, застосувавши перетворення Фур'є отримаємо

$$\tilde{\sigma}_{n,\rho}^{(q)}(\lambda) = \frac{-e^{i\lambda \cdot b} \cdot 2500 \cdot e^{-a \cdot |\lambda|} \cdot (a \cdot |\lambda| + 1)}{a^3}, \quad \tilde{\tau}_{n,\phi}^{(q)} = 0, \quad \tilde{\tau}_{n,z}^{(q)} = 0.$$

Нескінченна система рівнянь була зведена до кінцевої: $m = -8 \dots 8$, межі інтеграції були узяті від $-3 \dots 3$, обчислення інтегралів виконано за допомогою квадратурної формули Філона. Число вузлових точок – 1000. Це є достатнім при заданих геометричних умовах, точність виконання граничних умов у цьому випадку досягає 10^{-4} .

У результаті розв'язання цієї системи рівнянь було знайдено невідомі функції, перевірено виконання граничних умов на межах циліндричних порожнин, побудовано графіки нормальних напружень у точці А вздовж осі z (рис. 2 – 4).

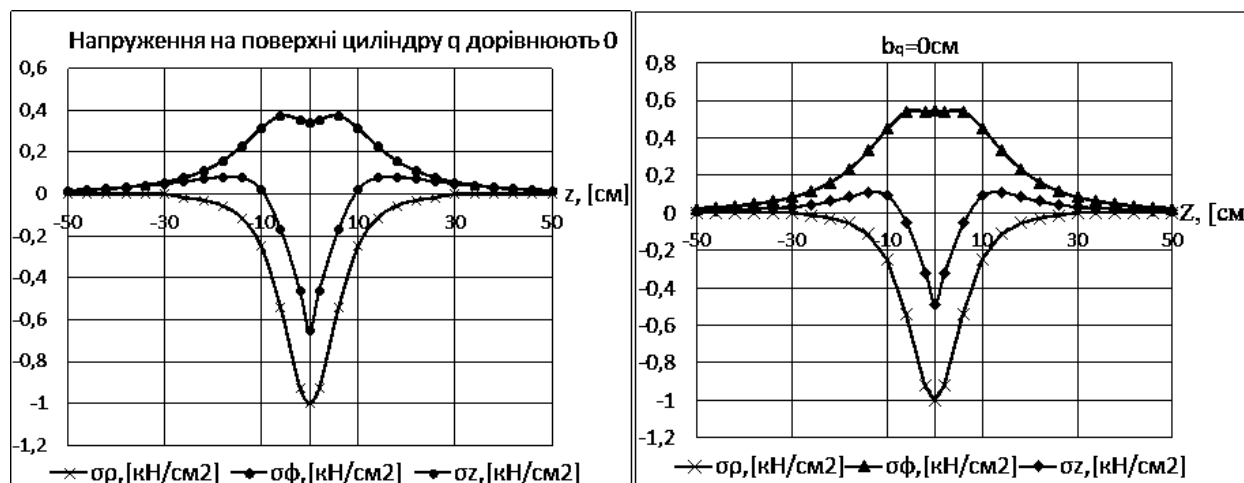


Рисунок 2 – Нормальні напруження в точці А вздовж осі z

Якщо навантаження на циліндрі q розташовані симетрично відносно осі y – навпроти циліндра p (рис. 2, праворуч), то напруження σ_ϕ порівнянно з відсутнім навантаженням циліндра q (рис. 2, ліворуч.) збільшуються, а напруження σ_z зменшуються.

Якщо симетрія відносно осі y порушується (рис. 3, 4) σ_ϕ при $z = 0$, зі зростанням b_d зменшується, відновлюючи ненавантажений стан, показаний на рис. 2, ліворуч, а σ_z поступово збільшується.

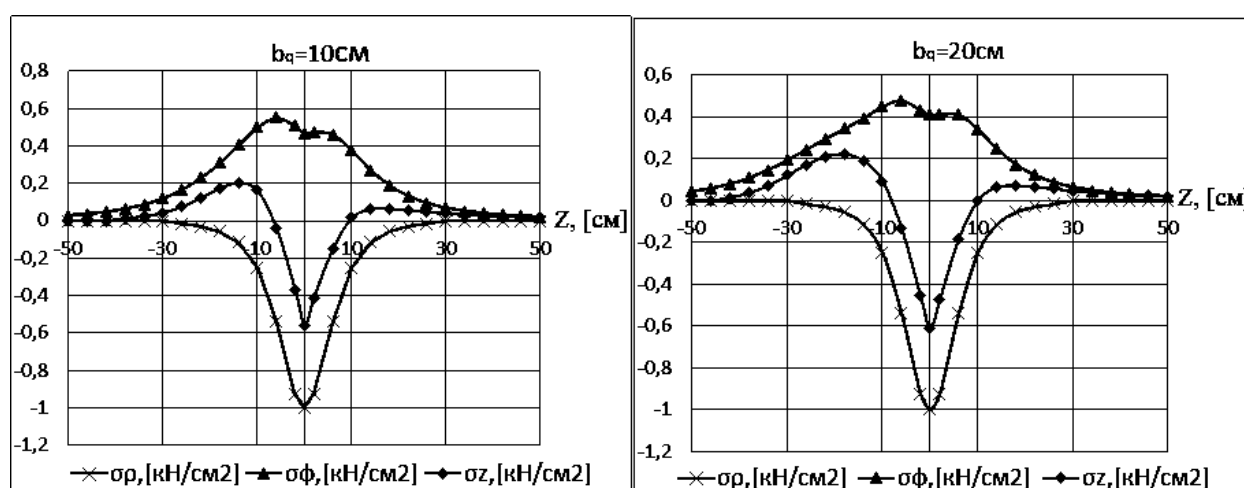


Рисунок 3 – Нормальні напруження в точці А вздовж осі z при $b_d = 10$ см та $b_d = 20$ см

При $b_d = 40$ см (рис. 4) циліндр q майже не впливає на напружений стан у т. $z = 0$ та має тільки локальний вплив у т. $z = -40$.

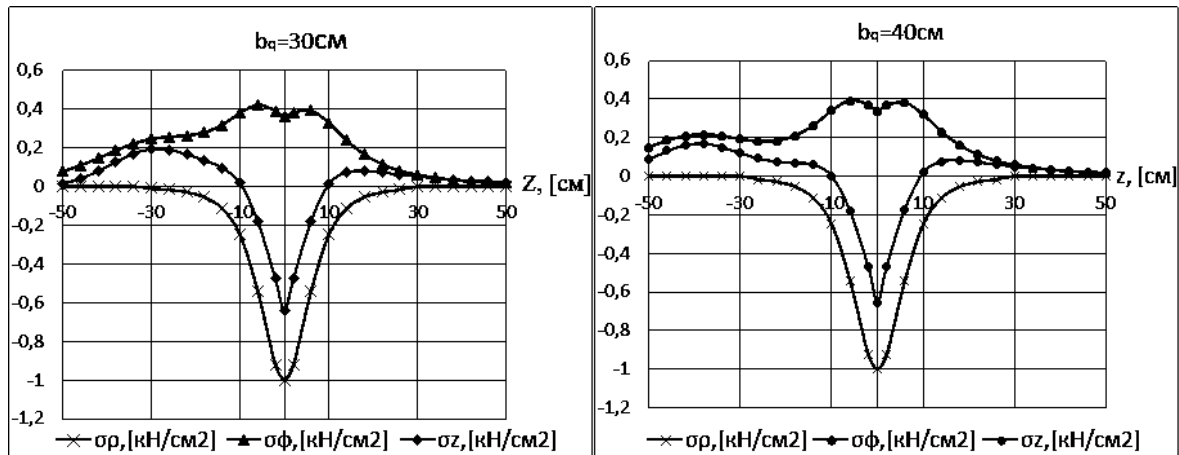


Рисунок 4 – Нормальні напруження в точці А вздовж осі z при $b_d = 30$ см та $b_d = 40$ см

Висновки

Запропоновано метод розв'язання задачі теорії пружності, коли на межах декількох паралельних циліндричних кругових порожнин задано напруження. Числові дослідження алгебраїчної системи для двох циліндрів дають можливість стверджувати, що її рішення може бути з будь-яким ступенем точності знайдено методом редукції.

Проведено аналіз напружено-деформованого стану циліндричних порожнин під дією асиметрично прикладеного навантаження. Наведені графіки дають уявлення про розподіл напружень у тілі у найбільш цікавій зоні та взаємний вплив циліндричних порожнин одна на одну.

Список використаних джерел

1. Подильчук, Ю.Н. Пространственные задачи теории упругости [Текст] / Ю.Н. Подильчук. – Киев: Наук. думка, 1979. – 240 с.
2. Гринченко, В.Т. Пространственные задачи теории упругости и пластичности. Равновесие упругих тел канонической формы [Текст] / В.Т. Гринченко, А.Ф. Улитко. – Киев: Наук. думка, 1985. – 280 с.
3. Улитко, А.Ф. Метод собственных векторных функций в пространственных задачах теории упругости [Текст] / А.Ф. Улитко. – Киев: Наук. думка, 1979. – 265 с.
4. Уфлянд Я.С. Интегральные преобразования в задачах теории упругости [Текст] / Я.С. Уфлянд. – Л.: Наука, 1967. – 402 с.
5. Гузь, А.Н. Сферические днища, ослабленные отверстиями [Текст] / А.Н. Гузь, И.С. Чернышенко, К.И. Шнеренко. – Киев: Наук. думка, 1970. – 323 с.
6. Гузь, А.Н. Дифракция упругих волн в многосвязных телах [Текст] / А.Н. Гузь, В.Т. Головчан. – Киев: Наук. думка, 1972. – 254 с.
7. Николаев, О.Г. Узагальнений метод Фурье в просторових задачах теорії пружності для канонічних багатозв'язкових тіл [Текст] / О.Г. Никола-

єв. – Дніпропетровськ.: автореф. дис... д-ра физ. – мат. наук, 1997. – 36 с.

8. Николаев, А.Г. Обобщенный метод Фурье в пространственных задачах теории упругости [Текст] / А.Г. Николаев, В.С. Проценко.– Харьков: Национальный аэрокосмический университет им. Н.Е. Жуковского «ХАИ», 2011. – 344 с.

9. Иванов, Е.А. Дифракция электромагнитных волн на двух телах [Текст] / Е.А. Иванов.– Минск: Наука и техника, 1968. – 584 с.

10. Николаев, А.Г. Распределение напряжений в цилиндрическом образце материала с двумя параллельными цилиндрическими полостями [Текст] / А.Г. Николаев, Е.А. Танчик // Вопросы проектирования и производства конструкций летательных аппаратов:– Харьков, 2013 Вып. 4. – С. 40 – 49.

11. Николаев, А.Г. Напряженное состояние в цилиндрическом образце с двумя параллельными цилиндрическими волокнами [Текст] / А.Г. Николаев, Е.А. Танчик // Авиационно-космическая техника и технология: сб. науч. тр. / М–во образования и науки Украины, Нац. аэрокосм. ун–т им. Н. Е. Жуковского «ХАИ». – Харьков, 2013. – Вып. 6 (103). – С.32 – 38.

12. Николаев, А.Г. Распределение напряжений в ячейке однонаправленного композиционного материала, образованного четырьмя цилиндрическими волокнами [Текст] / А.Г. Николаев, Е.А. Танчик. // Вісник Одеського нац. ун-ту. мат. і мех. – Одеса, 2013 – Т.18 – Вип. 4(20). – С. 101 – 111.

13. Николаев, А.Г. Первая краевая задача теории упругости для цилиндра с N цилиндрическими полостями [Текст] / А.Г. Николаев, Е.А. Танчик // Сибирский журнал вычислительной математики. – Новосибирск, 2015. – Т. 18, № 2. – С. 177 – 189.

14. Мірошніков, В. Ю. Друга основна задача теорії пружності в просторі з декількома паралельними круговими циліндричними порожнинами [Текст] / В.Ю. Мірошніков.– Зб. наук. праць Харків. ун-ту Повітряних Сил, 2017. – Вип.1. – С. 92 – 96.

15. Мірошніков, В.Ю. Третя основна задача теорії пружності в просторі з N паралельними круговими циліндричними порожнинами [Текст] / В.Ю.Мірошніков // Вопросы проектирования и производства конструкций летательных аппаратов: сб. науч. тр. Нац. аэрокосм. ун–та им. Н.Е. Жуковского «ХАИ». – Вып. 2 (90).– Харьков, 2017. – С. 89 – 103.

16. Николаев, А.Г. Обоснование метода Фурье в основных краевых задачах теории упругости для некоторых пространственных канонических областей [Текст] / А.Г. Николаев.– Киев: Доп. НАН України, 1998, №2. – С.78 – 83.

Поступила в редакцию 18.08.2017.

Рецензент: д-р техн. наук, проф. Я.С. Карпов, Национальный аэрокосмический университет им. Н.Е. Жуковского «ХАИ», г. Харьков.