

ИНЖЕНЕРНАЯ МЕТОДИКА РАСЧЕТА СТУПЕНЧАТЫХ АДГЕЗИОННЫХ СОЕДИНЕНИЙ

Соединения деталей композитных конструкций традиционно выполняются с использованием механического крепежа или склеиванием. Ключевое преимущество адгезионных (клеевых) соединений над другими – возможность изготовления крупногабаритных, экономически эффективных интегрированных конструкций [1]. Помимо этого они характеризуются конструктивной простотой и высокой эффективностью и широко используются для соединения композитов в авиационной и космической технике. Весовая эффективность клеевых соединений обусловлена их способностью распределять нагрузку по гораздо более широкой области, чем в случае механических соединений. Кроме того, отсутствие концентраторов напряжений снижает риск локального расслоения, что в итоге способствует значительному снижению массы соединения в целом по сравнению с механическими соединениями.

Типовые схемы исполнения клеевых соединений аналогичны механическим: нахлесточные (одно- и двухсторонние) и встык (с одной или двумя накладками). В дополнение к перечисленным возможны и другие конструктивно-технологические решения, такие, как соединения «на ус» и ступенчатые клеевые соединения. В последнем случае максимальная несущая способность соединения достигается при сбалансированной (постоянной по длине) жесткости соединяемых деталей. Толщина деталей в начале и конце соединения, как правило, ограничивается, а длина и количество шагов выступают как дополнительные проектные переменные, причем количество шагов оказывает наибольшее влияние на прочность соединения.

Ступенчатые клеевые соединения широко применяются при склеивании композитных деталей с металлическими для передачи значительных усилий, когда реализовать механическое соединение достаточно сложно ввиду чувствительности слоистых композитов к концентраторам напряжений. Ступенчатые клеевые соединения композитов с металлом можно встретить в элементах хвостового оперения истребителей F-14 и F-15, а также в корневом узле крепления крыла F-18 [2].

Геометрическая конфигурация ступенчатых соединений может быть различной, однако во всех случаях возможно мысленно разделить зону склеивания на несколько участков, в границах которых толщина соединяемых элементов не изменяется (см. рис. 1). Эти участки можно анализировать отдельно как обычные нахлесточные односторонние или двухсторонние соединения. Именно такой подход используется в работе [3] при построении общей методики расчета адгезионных соединений.

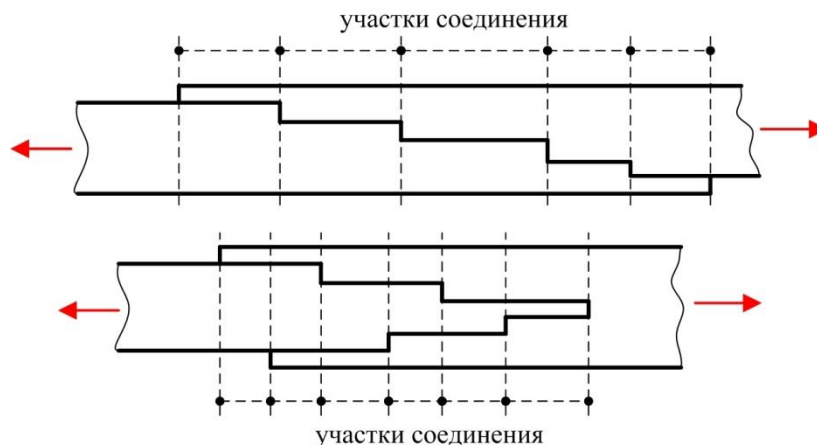


Рисунок 1 – Условное разделение ступенчатых соединений на сегменты с постоянными параметрами

Неизвестные усилия в деталях на границах участков (в местах разреза) определяются из системы линейных алгебраических уравнений, включающей в себя уравнения равновесия и совместности деформаций. В результате для каждого участка получают распределение касательных напряжений в клее и оценивают их максимальные значения. Несмотря на физическую логичность и относительную математическую простоту реализации такого подхода, использовать его на стадии проектирования невозможно, так как количество ступенек является одним из неизвестных проектных параметров.

Таким образом, разработка инженерной методики расчета ступенчатых клеевых соединений, позволяющей быстро и с достаточной степенью точности оценить максимальные значения касательных напряжений в клеевой прослойке в зависимости от количества ступенек и других параметров при произвольном термомеханическом нагружении, является весьма актуальной задачей.

Рассмотрим общий случай ступенчатого соединения двух элементов. Будем считать, что свойства деталей и клея, а также толщина клеевой прослойки не изменяются по длине соединения (см. рис. 2). На рис. 2 величины $\Phi_{1(i)}$ и $\Phi_{2(i)}$ соответствуют усилиям в деталях на границах участков с постоянными параметрами. Эти усилия связаны уравнениями равновесия

$$\Phi_{1(i-1)} + \Phi_{2(i-1)} = \Phi_{1(i)} + \Phi_{2(i)}, \quad (1)$$

т.е. расчет касательных напряжений в таком соединении представляет собой $N - 1$ статически неопределимую задачу. Для поиска неизвестных, например $\Phi_{1(i)}$, в работе [3] используются условия совместности сдвиговых деформаций в клее на границах участков, что дает в конечном итоге систему линейных уравнений относительно неизвестных усилий $\Phi_{1(i)}$. Преобразуем ее к такому виду:

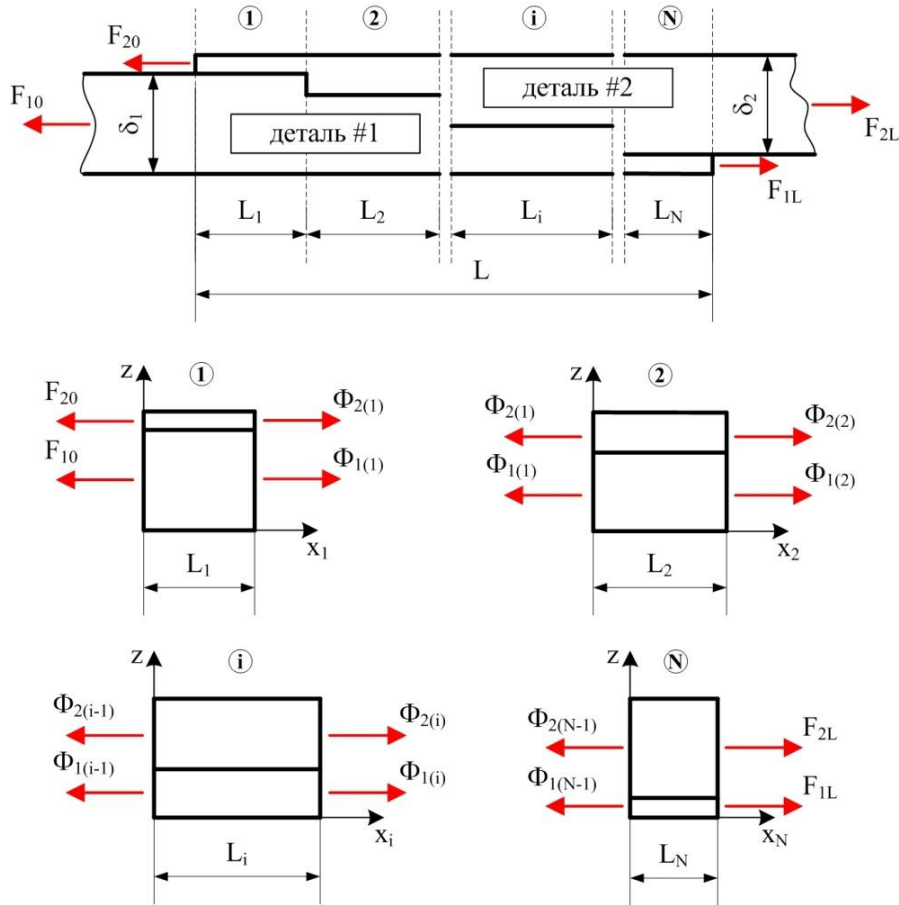


Рисунок 2 – Ступенчатое клеевое соединение и его декомпозиция на регулярные участки

$$-a_i \Phi_{1(i-1)} + b_i \Phi_{1(i)} - a_{i+1} \Phi_{1(i+1)} = c_i, \quad i = 1 \dots N-1, \quad (2)$$

где
$$a_i = \frac{\lambda_i}{G_a sh(\lambda_i L_i)} = \frac{\Pi_{1x(i)} + \Pi_{2x(i)}}{\lambda_i \delta_a sh(\lambda_i L_i)};$$

$$b_i = a_i ch(\lambda_i L_i) + a_{i+1} ch(\lambda_{i+1} L_{i+1}); \quad c_i = a_i d_i + a_{i+1} d_{i+1};$$

$$d_i = \frac{ch(\lambda_i L_i) - 1}{\Pi_{1x(i)} + \Pi_{2x(i)}} \left[\Pi_{2x(i)} (F_{1b} + F_{2b}) + \Delta T (\alpha_2 - \alpha_1) \right];$$

$$\lambda_i^2 = \frac{\Pi_{1x(i)} + \Pi_{2x(i)}}{\Pi_a};$$

$$\Pi_{1x(i)} = \frac{1}{E_{x1} \delta_{1(i)}}; \quad \Pi_{2x(i)} = \frac{1}{E_{x2} \delta_{2(i)}}; \quad \Pi_a = \frac{\delta_a}{G_a};$$

E_{x1} , E_{x2} , G_a – модули упругости деталей и модуль сдвига клея;

$\delta_{1(i)}$, $\delta_{2(i)}$, δ_a – толщина деталей на i -м участке соединения и

толщина клея.

Так как величины $a_1\Phi_{1(0)} = a_1F_{10}$ и $a_N\Phi_{1(N)} = a_NF_{1e}$ являются известными, уравнения (2) сводятся к системе уравнений с трехдиагональной симметрической матрицей коэффициентов:

$$\begin{bmatrix} b_1 & -a_2 & & & 0 \\ -a_2 & b_2 & -a_3 & & \\ & -a_3 & b_3 & \ddots & \\ & & \ddots & \ddots & -a_{N-1} \\ 0 & & & -a_{N-1} & b_{N-1} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \Phi_{1(1)} \\ \Phi_{1(2)} \\ \Phi_{1(3)} \\ \vdots \\ \Phi_{1(N-1)} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} c_1 + a_1F_{1b} \\ c_2 \\ c_3 \\ \vdots \\ c_{N-1} + a_NF_{1e} \end{Bmatrix}. \quad (3)$$

Эту систему уравнений можно решать различными численными методами, например, в работе [3] предлагается использовать метод Гаусса. Однако алгоритм Томаса в данном случае представляется наиболее эффективным. Так как $a_i > 0$ и $ch\lambda_i L_i > 1$, матрица коэффициентов характеризуется строгим диагональным преобладанием (и по строкам, и по столбцам), что обеспечивает стабильность алгоритма Томаса и эквивалентность точному решению при любой конфигурации соединения [4].

После вычисления усилий $\Phi_{1(i)}$ распределение напряжений в клее на каждом участке находят как для обычного соединения с нахлестом в общем случае нагружения [5]. Например, касательные напряжения в клее находят по формуле (см. рис. 2)

$$\tau_{a(i)} = \frac{\lambda_i}{\Pi_{1x(i)} + \Pi_{2x(i)}} \frac{A_i ch\{\lambda_i (L_i - x_i)\} + B_i ch(\lambda_i x_i)}{sh(\lambda_i L_i)}, \quad (4)$$

где $A_i = \Phi_{1(i-1)} (\Pi_{1x(i)} + \Pi_{2x(i)}) - \Pi_{2x(i)} (F_{10} + F_{20}) + \Delta T (\alpha_{x1} - \alpha_{x2})$;

$$B_i = -\Phi_{1(i)} (\Pi_{1x(i)} + \Pi_{2x(i)}) + \Pi_{2x(i)} (F_{10} + F_{20}) - \Delta T (\alpha_{x1} - \alpha_{x2});$$

α_{x1}, α_{x2} – коэффициенты расширения материалов деталей; ΔT – приращение температуры.

Резкое изменение жесткости деталей на границе участков вызывает концентрацию касательных напряжений в клее в этой зоне. Строго говоря, параметры ступенчатого соединения могут быть выбраны таким образом, что максимальные значения касательных напряжений будут наблюдаться не на внешних кромках, а во внутренних точках клеевого слоя. Однако, как показано в [6], такие варианты ступенчатых соединений не являются рациональными по несущей способности и их следует избегать при проектировании. Из этого следует, что как в обычных соединениях с нахлестом, так и в оптимальных ступенчатых соединениях

максимальные касательных напряжений в клее будут возникать на границах клеевой прослойки. Это в свою очередь означает, что два внешних участка в ступенчатом соединении наиболее важны при расчете на прочность. Руководствуясь какими-либо предположениями относительно усилий $\Phi_{1(1)}$ и $\Phi_{1(N-1)}$ и сравнивая значения касательных напряжений на кромках соединения

$$\begin{aligned}\tau_0 = \tau_{a(1)} \Big|_{x_1=0} &= \frac{\lambda_1}{\Pi_{1x(1)} + \Pi_{2x(1)}} \frac{A_1 \operatorname{ch}(\lambda_1 L_1) + B_1}{\operatorname{sh}(\lambda_1 L_1)}; \\ \tau_L = \tau_{a(N)} \Big|_{x_N=L_N} &= \frac{\lambda_N}{\Pi_{1x(N)} + \Pi_{2x(N)}} \frac{A_N + B_N \operatorname{ch}(\lambda_N L_N)}{\operatorname{sh}(\lambda_N L_N)},\end{aligned}\quad (5)$$

можно оценить максимальные напряжения в клее.

Проектирование ступенчатых соединений подразумевает два параллельных и взаимосвязанных процесса, определяющие конфигурацию соединения – распределение толщины деталей δ_1 , δ_2 и распределение общей длины соединения L между участками. На рис. 3 показаны некоторые примеры ступенчатых соединений, а на рис. 4 – графики относительных касательных напряжений в клее $\bar{\tau}_a$ и нормальных усилий в первой детали $\bar{F}_{1x}$. В расчетах предполагалось, что детали изготовлены из одного и того же материала $E_{x1} = E_{x2} = 70$ ГПа, модуль сдвига клея $G_a = 1,3$ ГПа. Толщина клея, длина соединения и условия нагружения также считались одинаковыми во всех случаях: $t_a = 0,2$ мм; $L = 60$ мм; $F_{1L} = F_{20} = 0$; $F_{10} = F_{2L} = F = 100$ Н/мм. Относительные напряжения вычисляются по формулам

$$\begin{aligned}\bar{\tau}_a &= \tau_a \frac{L}{|F_{1L} - F_{10}|} = \tau_a \frac{L}{F}; \\ \bar{F}_{1x} &= \frac{F_{1x}}{|F_{1L} - F_{10}|} = \frac{F_{1x}}{F}.\end{aligned}\quad (6)$$

Точки на графиках соответствуют усилиям $\Phi_{1(i)}$ на границах участков.

Как следует из рис. 4, варьирование толщины деталей на участках (особенно на первом и последнем) оказывает существенное влияние на максимальные касательные напряжения в клее. Изменение длины участков в первую очередь обуславливает характер передачи внешнего усилия с одной детали на другую, в том числе и значения $\Phi_{1(1)}$, $\Phi_{1(N-1)}$. Например, для ступенчатых соединений с одинаковой длиной участков распределение этих внутренних усилий близко к линейному закону.

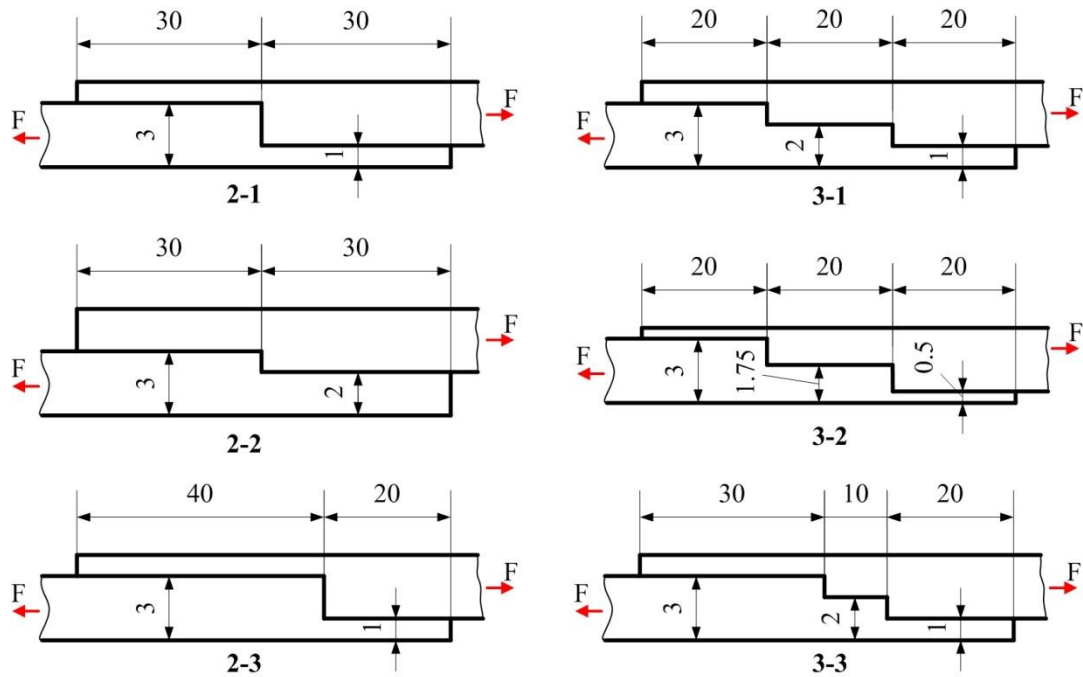
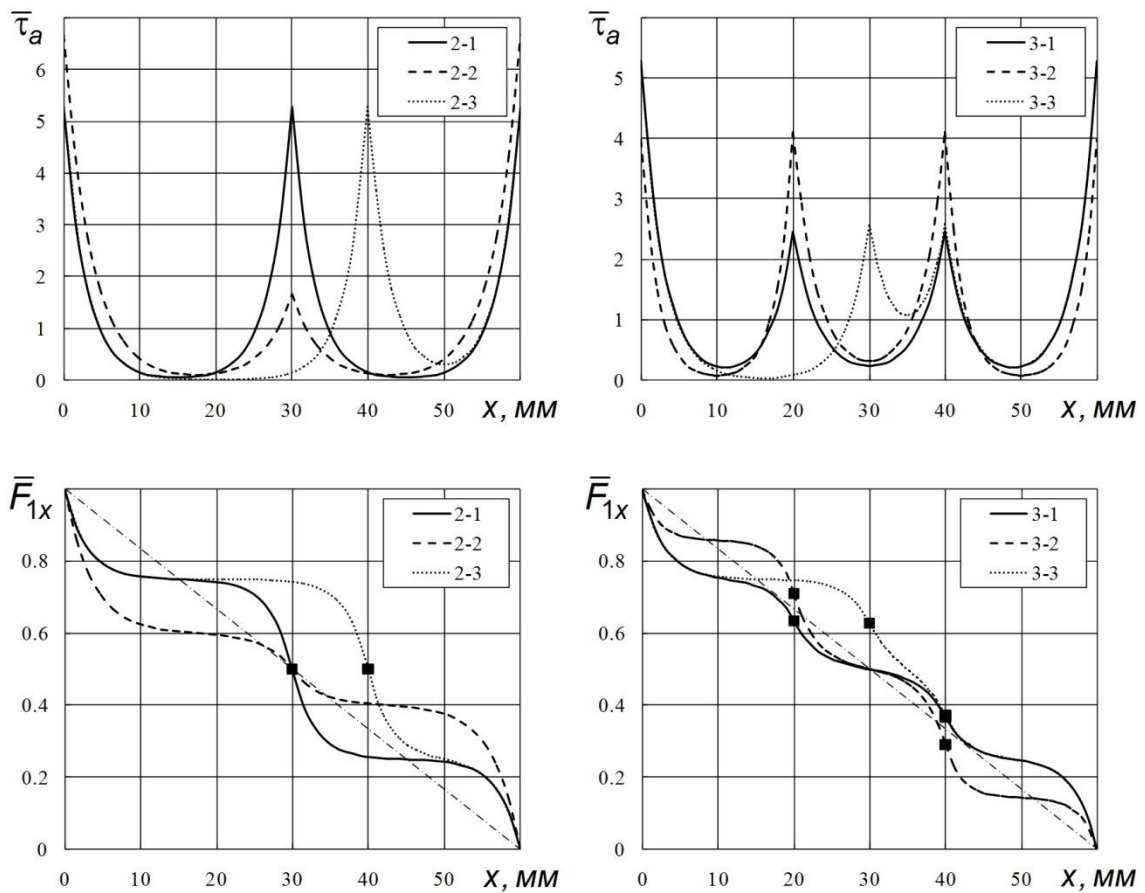


Рисунок 3 – Примеры ступенчатых соединений деталей одинаковой толщины



Рассмотрим специальный случай ступенчатого соединения. Будем считать, что:

- длина всех участков одинакова, т.е. $L_i = \ell$;
- толщина каждой детали дискретно уменьшается (или увеличивается) на каждом участке на одну и ту же величину;
- усилия $\Phi_{1(i)}$, $\Phi_{2(i)}$ равномерно распределены по длине соединения;
- деталь #1 тоньше детали #2 или имеет ту же толщину (данное допущение не обязательно, но несколько упрощает дальнейший анализ).

Математически эти допущения означают следующее:

$$L_i = \frac{L}{N} = \ell;$$

$$\delta_{1(i)} = \delta_1 - (i-1)\Delta\delta; \quad \delta_1 \leq \delta_2; \quad \delta_{2(i)} = \delta_2 - \delta_1 + i \cdot \Delta\delta; \quad (7)$$

$$\Phi_{1(i)} = F_{10} - i \cdot \Delta\Phi; \quad \Phi_{2(i)} = F_{20} + i \cdot \Delta\Phi,$$

где $\Delta\delta = \frac{\delta_1}{N}$; $\Delta\Phi = \frac{F_{10} - F_{1L}}{N} = \frac{F_{2L} - F_{20}}{N}$.

Тогда основные параметры соединения для первого и последнего участков можно выразить через аналогичные свойства, но относящиеся к обычному нахлесточному соединению деталей той же толщины:

$$\begin{aligned} \Pi_{1x(1)} &= \frac{1}{E_{x1}\delta_{1(1)}} = \Pi_{1x}; & \Pi_{1x(N)} &= \frac{1}{E_{x1}\delta_{1(N)}} = N\Pi_{1x}; \\ \Pi_{2x(1)} &= \frac{1}{E_{x2}\delta_{2(1)}} = \frac{\Pi_{2x}}{\bar{\delta}}; & \Pi_{2x(N)} &= \frac{1}{E_{x2}\delta_{2(N)}} = \Pi_{2x}; \end{aligned} \quad (8)$$

$$\lambda_1^2 = \frac{\Pi_{1x(1)} + \Pi_{2x(1)}}{\Pi_a} = \lambda^2 \frac{R_1^2}{1 + \bar{\Pi}}; \quad \lambda_N^2 = \frac{\Pi_{1x(N)} + \Pi_{2x(N)}}{\Pi_a} = \lambda^2 \frac{R_N^2}{1 + \bar{\Pi}},$$

где коэффициенты $\bar{\delta}$, $\bar{\Pi}$, R_1 и R_N описывают геометрические и жесткостные свойства соединения:

$$\bar{\delta} = 1 - \frac{\delta_1}{\delta_2} \left(1 - \frac{1}{N} \right); \quad \bar{\Pi} = \frac{\Pi_{2x}}{\Pi_{1x}} = \frac{E_{x1}\delta_1}{E_{x2}\delta_2}; \quad R_1^2 = 1 + \frac{\bar{\Pi}}{\bar{\delta}}; \quad R_N^2 = N + \bar{\Pi}. \quad (9)$$

Подставив выражения (8) в равенства (5), найдем касательные напряжения в клее во внешних точках соединения $X = 0$ и $X = L$:

$$\tau_0 = \frac{\lambda}{R_1 \sqrt{1 + \bar{\Pi}} \operatorname{sh}(\lambda_1 \ell)} \left\{ \left[F_{10} - F_{20} \frac{\bar{\Pi}}{\delta} + \Delta T \left(\frac{\alpha_{x1}}{\Pi_{1x}} - \frac{\alpha_{x2}}{\Pi_{2x}} \bar{\Pi} \right) \right] \times \right. \\ \left. \times [ch(\lambda_1 \ell) - 1] + R_1^2 \Delta \Phi \right\}; \quad (10)$$

$$\tau_L = \frac{\lambda}{R_N \sqrt{1 + \bar{\Pi}} \operatorname{sh}(\lambda_N \ell)} \left\{ \left[F_{2L} \bar{\Pi} - F_{1L} N - \Delta T \left(\frac{\alpha_{x1}}{\Pi_{1x}} - \frac{\alpha_{x2}}{\Pi_{2x}} \bar{\Pi} \right) \right] \times \right. \\ \left. \times [ch(\lambda_N \ell) - 1] + R_N^2 \Delta \Phi \right\}. \quad (11)$$

В частном случае ступенчатого соединения двух одинаковых деталей, когда $\delta_1 = \delta_2 = \delta$, $E_{x1} = E_{x2} = E$, $\alpha_{x1} = \alpha_{x2} = \alpha$, а внешние усилия $F_{1L} = F_{20} = 0$, $F_{10} = F_{2L} = F$, выражения (10), (11) упрощаются:

$$\tau_0 = \tau_L = \frac{\lambda F}{\sqrt{2(N+1)} \operatorname{sh}(\lambda_s \ell)} \left[ch(\lambda_s \ell) - 1 + \frac{N+1}{N} \right], \quad (12)$$

где $\lambda_s^2 = \lambda_1^2 = \lambda_N^2 = \lambda^2 \frac{N+1}{2} = \frac{N+1}{\delta_a \delta} \frac{G_a}{E}$.

Равенства (10), (11) можно упростить далее, если учесть, что $\lambda_i \ell > 0$, и полагать

$$\frac{ch(\lambda_i \ell) - 1}{sh(\lambda_i \ell)} \approx 1; \quad \frac{1}{sh(\lambda_i \ell)} \approx 0. \quad (13)$$

Предположения (13) являются достаточно точными, если $\lambda_i \ell \geq 3$, что справедливо для большинства практических инженерных задач. Тогда максимальные касательные напряжения в точках $x = 0$ и $x = L$ будут равны:

$$\tau_0 = \frac{\lambda}{R_1 \sqrt{1 + \bar{\Pi}}} \left[F_{10} - F_{20} \frac{\bar{\Pi}}{\delta} + \Delta T \left(\frac{\alpha_{x1}}{\Pi_{1x}} - \frac{\alpha_{x2}}{\Pi_{2x}} \bar{\Pi} \right) \right]; \quad (14)$$

$$\tau_L = \frac{\lambda}{R_N \sqrt{1 + \bar{\Pi}}} \left[F_{2L} \bar{\Pi} - F_{1L} N - \Delta T \left(\frac{\alpha_{x1}}{\Pi_{1x}} - \frac{\alpha_{x2}}{\Pi_{2x}} \bar{\Pi} \right) \right], \quad (15)$$

и для рассмотренного выше частного случая соединения двух идентичных деталей

$$\tau_0 = \tau_L = \frac{\lambda F}{\sqrt{2(N+1)}}. \quad (16)$$

Как показали численные эксперименты, формулы (14), (15) оказываются даже более точными, чем выражения (10), (11). Точность приближенного расчета снижается с увеличением соотношения жесткостей деталей и количества ступенек. Однако даже в таких случаях погрешность расчета по формулам (14), (15) по сравнению с точными зависимостями (4) (требующими решения системы линейных алгебраических уравнений) не превышает 5%. Когда жесткости деталей соизмеримы и количество ступенек не превышает 20, погрешность расчета снижается до величины менее 2%.

Список использованных источников

1. Avila, A.F. An experimental and numerical study on adhesive joints for composites / A.F. Avila, P. Bueno // Composite Structures. – Vol. 64 – 2004. – pp. 531-537.
2. MIL-HDBK-17-3F: Composite materials handbook. – Vol.3 – Polymer matrix composites, materials usage, design, and analysis. – 2002. – 693 p.
3. Карпов, Я.С. Общая методика определения напряженно-деформированного состояния адгезионных соединений в линейной одномерной постановке / Я.С. Карпов, П.М. Гагауз, Ф.М. Гагауз // Вопросы проектирования и производства конструкций летательных аппаратов: сб. науч. тр. Нац. аэрокосм. ун-та им. Н.Е. Жуковского «ХАИ». – Вып. 2 (78). – Харьков, 2014. – С. 7 – 20.
4. Biswa Nath Datta. Numerical linear algebra and applications: 2nd ed. – SIAM, 2010. – 554 p. ISBN 978-0-89871-765-5.
5. Карпов, Я.С. Проектирование деталей и агрегатов из композитов: учебник / Я.С. Карпов. – Харьков: Нац. аэрокосм. ун-т им. Н.Е. Жуковского « Харьков. авиац. ин-т», 2010. – 768 с.
6. Hart-Smith, L.J. Adhesive-bonded scarf and stepped-lap joints, CR-112237. – NASA Contractor Report 112237, 1973.

Поступила в редакцию 01.06.2017.

*Рецензент: д-р техн. наук, проф. Я.С. Карпов
Национальный аэрокосмический университет
им. Н.Е. Жуковского «ХАИ», г. Харьков*