

О РАСПРЕДЕЛЕНИИ НАПРЯЖЕНИЙ ПО ТОЛЩИНЕ КЛЕЕВОГО СОЕДИНЕНИЯ

В большинстве аналитических моделей напряженно-деформированного состояния (НДС) клеевых соединений распределение нормальных напряжений по толщине соединяемых слоев предполагается линейным, т.е. используются модель стержня или балки. При этом для определения распределения касательных напряжений по толщине соединения используются формулы, являющиеся обобщением формулы Журавского [1]. Такой подход позволяет с достаточной точностью описать НДС элементов соединения в глубине области склейки, однако у края соединения, т.е. именно там, где напряжения в клее максимальны, гипотеза плоских сечений описывает деформации соединяемых деталей весьма грубо. Двумерная модель соединения [2] весьма сложна для анализа, обладает медленной сходимостью, и ее применение в инженерной практике является проблематичным.

Поэтому в качестве компромисса между точностью модели и сложностью расчета НДС соединения предложен ряд моделей и методов определения НДС соединений, основанных на дискретизации соединяемых элементов в трансверсальном направлении. Например, в работе [3] уравнения в частных производных, описывающие продольные и поперечные перемещения несущих слоев соединения, решаются с помощью дифференциально-разностного метода (метода прямых). В работе [4] поперечные перемещения полагаются нулевыми, а продольные перемещения находятся с помощью метода конечных разностей по обеим координатам, что позволяет изучить НДС соединений со ступенчатым изменением толщины, соединений «на ус» и т.д. В работе [5] соединяемые элементы рассматриваются как системы упругосоединенных стержней, работающих на растяжение-сжатие. Данная модель получила развитие в работе [6] где слоистый композиционный материал (КМ) рассматривается как система упругосоединенных балок – монослоев КМ, что позволяет описать НДС слоистого КМ.

Еще одним компромиссом между точностью модели и сложностью расчета НДС соединения представляется континуальная модель соединяемых слоев, в которой для упрощения решения поперечные перемещения полагаются равными нулю [7]. Этот же подход использован для создания уточненной теории балок [8]. Отличия между моделями НДС соединения, которые описывают распределение напряжений по толщине соединения с разной степенью приближения, можно представить в виде таблицы:

Отличия между двумерными моделями НДС соединения

	[1]	[2]	[3]	[4]	[5]	[6]	[7]
Континуальная модель	+	+					+
Дискретизация для учета слоистой структуры КМ					+	+	
Дискретизация для получения численного решения			+	+			
Гипотеза плоских сечений	+						
Трансверсальные перемещения	+	+	+			+	
Трансверсальные напряжения в соединяемых слоях		+	+			+	

В работе [7] продольные перемещения элементов соединения описываются уравнением в частных производных и представлены в форме ряда из собственных функций, коэффициенты при которых находятся из краевых условий. А НДС законцовки рассматривается в одномерном приближении. Вследствие этого усилие в краевых условиях задачи задано в одной точке и краевые условия не могут быть представлены в виде разложения в функциональный ряд. Поскольку собственные функции не ортогональны, авторы работы [7] находят коэффициенты ряда с помощью ортогонализации разности между краевыми условиями и полученным решением системе собственных функций, ошибочно отбросив одну из них и включив в систему краевое условие, заданное в единственной точке. Такое решение не может быть признано удовлетворительным и приводит, в частности, к ошибочному результату, приведенному в указанной работе и состоящему в том, что касательные напряжения достигают максимума не на границе склейки, а в глубине толщины соединяемого элемента. Кроме того, при постановке задачи авторами полагалось, что композитный стержень соединен с металлической законцовкой без соединительного слоя.

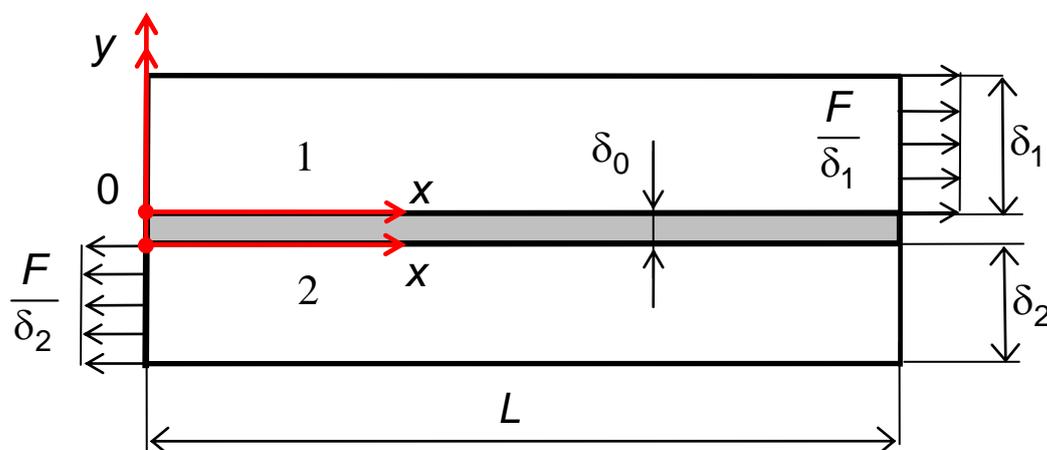
Следовательно, можно сделать вывод о том, что существующие аналитические подходы к определению НДС соединения либо слишком сложны, обладают плохой сходимостью и недостаточно обоснованы, либо описывают НДС слоев с помощью на гипотезы плоских сечений, и не могут с высокой точностью описать напряжения у края соединения. Поэтому решение задачи о НДС соединения в двумерной по толщине постановке, которое обладало бы высокой точностью и хорошей сходимостью, является актуальной задачей.

В данной работе развивается подход, предложенный в работах [7] и [8], который заключается в том, что соединяемые слои полагаются абсолютно жесткими в трансверсальном направлении, т.е. при отсутствии изгиба испытывают перемещения только в продольном

направлении. В отличие от работы [7] НДС металлической законцовки также рассматривается в двумерной постановке, что позволяет избежать указанных выше противоречий.

Касательные напряжения в клеевом слое полагаются пропорциональными разности перемещений обращенных к клеевому слою сторон соединяемых слоев. Как известно, в этом случае касательные напряжения в клее достигают максимальных значений на краях соединения. Если край клеевого шва не имеет наплыва и свободен от нагрузки, то, очевидно, такая модель противоречит закону парности касательных напряжений. Но, если соединение имеет наплыв из излишков клея (а это достаточно распространенное технологическое решение), то касательные напряжения в клее максимальны как раз на краю стыка [9].

Постановка задачи. В авиационных конструкциях, как правило, применяются симметричные двухсрезные соединения, для анализа НДС которых в силу симметрии может рассматриваться половина толщины соединения. Вследствие симметрии влиянием изгиба на НДС соединения также можно пренебречь. Положив, что соединяемые элементы конструкции являются абсолютно жесткими в поперечном направлении, можно пренебречь и поперечными перемещениями. Рассмотрим клеевое соединение двух пластинок, показанное на рис. 1.



Модули упругости и модули сдвига слоев соответственно обозначим E_k и G_k , $k=1,2$. Начала координат поместим в углы прямоугольных областей 1 и 2, как это показано на рис. 1. Для каждой области вводится своя система координат, однако удобно ввести для этих координат одинаковые обозначения, подразумевая, что области разнесены на толщину клеевого слоя δ_0 . Модуль сдвига клея – G_0 .

Уравнения равновесия и деформации соединяемых слоев с учетом введенных гипотез имеют вид [7]

$$\frac{\partial \sigma_x^{(k)}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_k}{\partial y} = 0; \quad k = 1, 2;$$

$$\sigma_x^{(k)} = E_k \frac{\partial U_k}{\partial x}; \quad \tau^{(k)} = G_k \frac{\partial U_k}{\partial y}, \quad (1)$$

где $\sigma_x^{(k)}(x, y)$ и $\tau^{(k)}(x, y)$ – соответственно нормальные напряжения в продольном направлении, и касательные напряжения в слое k ; $U_k(x, y)$ – продольные перемещения слоя k .

Отсюда следуют уравнения равновесия в перемещениях

$$\frac{E_k}{G_k} \cdot \frac{\partial^2 U_k}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U_k}{\partial y^2} = 0. \quad (2)$$

Внешние стороны соединения свободны от нагрузки:

$$\tau_1(x, \delta_1) = 0; \quad \tau_2(x, -\delta_2) = 0. \quad (3)$$

На границе с клеем имеем условие пропорциональности касательных напряжений в клее разности перемещений внутренних сторон соединяемых пластинок, а также равенство касательных напряжений в клее касательным напряжениям в пластинках:

$$\tau = \frac{G_0}{\delta_0} (U_2(x, 0) - U_1(x, 0)); \quad \tau_1(x, 0) = \tau_2(x, 0) = \tau,$$

что с учетом (1) можно записать в форме

$$G_2 \frac{\partial U_2}{\partial y} \Big|_{y=0} = \frac{G_0}{\delta_0} [U_1(x, 0) - U_2(x, 0)]; \quad G_1 \frac{\partial U_1}{\partial y} \Big|_{x=0} = G_2 \frac{\partial U_2}{\partial y} \Big|_{x=0}. \quad (4)$$

На торцах имеем

$$\sigma_1(0, y) = 0; \quad \sigma_2(0, y) = F/\delta_2; \quad \sigma_1(L, y) = F/\delta_1; \quad \sigma_2(L, y) = 0, \quad (5)$$

где F – приложенное погонное усилие.

Предлагаемая математическая модель позволяет задать произвольный закон распределения прилагаемой нагрузки по толщине, однако практическое значение имеют результаты расчетов для равномерно распределенной нагрузки.

Построение решения. Для построения решения уравнения (2) использован метод разделения переменных. Решение строится в виде произведения $U = X(x)Y(y)$.

Подставив в (2) и разделив переменные, получим

$$\frac{d^2 X}{dx^2} - \lambda^2 \frac{G}{E} X = 0; \quad \frac{d^2 Y}{dy^2} + \lambda^2 Y = 0,$$

где λ^2 – параметр разделения переменных.

Общие решения данных дифференциальных уравнений при условии $\lambda^2 > 0$ имеют вид

$$X = A_1 e^{\lambda\beta x} + A_2 e^{-\lambda\beta x}; \quad Y = C_1 \sin \lambda y + C_2 \cos \lambda y; \quad \beta = \sqrt{GE^{-1}}.$$

Учитывая краевые условия (3), частные решения уравнения (2), удобно записать в следующем виде:

$$U_1^* = (A \operatorname{ch} \Lambda \beta_1 x + B \operatorname{ch} \Lambda \beta_1 (x - L)) \cos \Lambda (y - \delta_1);$$

$$U_2^* = (a \operatorname{ch} \lambda \beta_2 x + b \operatorname{ch} \lambda \beta_2 (x - L)) \cos \lambda (y + \delta_2),$$

где $\beta = \sqrt{G_k E_k^{-1}}$; Λ и λ – параметры разделения переменных в уравнении (2) при $k=1$ и $k=2$ соответственно; A, B, a, b – произвольные константы.

Если же $\lambda = 0$, то получим:

$$U^{(0)} = (A_0 + B_0 x)(C_0 + D_0 y).$$

Исходя из краевых условий (3), находим

$$U_1^{(0)} = A_0 + B_0 x; \quad U_2^{(0)} = a_0 + b_0 x.$$

Положим, что краевые условия на границе клея (4) выполняются **точно** для каждого частного решения U_1^* и U_2^* , а также для $U_1^{(0)}$ и $U_2^{(0)}$. В этом случае из второго условия (4) следует

$$\begin{aligned} G_1 (A \operatorname{ch} \Lambda \beta_1 x + B \operatorname{ch} \Lambda \beta_1 (x - L)) \Lambda \sin \Lambda \delta_1 = \\ = -G_2 (a \operatorname{ch} \lambda \beta_2 x + b \operatorname{ch} \lambda \beta_2 (x - L)) \sin \lambda \delta_2, \end{aligned}$$

откуда в свою очередь следуют соотношения

$$\Lambda = \lambda \frac{\beta_2}{\beta_1}; \quad A = \xi a; \quad B = \xi b; \quad \text{где } \xi(\lambda) = -\frac{G_2 \beta_1 \sin(\lambda \delta_2)}{G_1 \beta_2 \sin(\beta_2 \lambda \delta_1 / \beta_1)}.$$

Суммируя U_1^* с $U_1^{(0)}$ и U_2^* с $U_2^{(0)}$, учитывая полученные выше результаты и подставив в первое условие (4), получим:

$$\begin{aligned} \frac{\beta_2}{\beta_1} \lambda \xi (a \operatorname{sh} \lambda \beta_2 x + b \operatorname{ch} \lambda \beta_2 x) \sin \lambda \frac{\beta_2}{\beta_1} \delta_1 = \\ = \frac{G_0}{G_1} \frac{1}{\delta_0} \left[A_0 + B_0 x + (a \operatorname{sh} \lambda \beta_2 x + b \operatorname{ch} \lambda \beta_2 x) \xi \cos \lambda \frac{\beta_2}{\beta_1} \delta_1 - \right. \\ \left. - a_0 - b_0 x - (a \operatorname{sh} \lambda \beta_2 x + b \operatorname{ch} \lambda \beta_2 x) \cos \lambda \delta_2 \right], \end{aligned}$$

откуда следует $A_0 = a_0$, $B_0 = b_0$, и, кроме того, возникает трансцендентное уравнение относительно λ :

$$\lambda \cdot \sin \lambda \delta_2 \cdot \sin(\beta_2 \lambda \delta_1 / \beta_1) - \frac{G_0}{\delta_0} \left(\frac{1}{G_2} \sin \frac{\beta_2}{\beta_1} \lambda \delta_1 \cdot \cos \lambda \delta_2 + \frac{\beta_1}{\beta_2} \frac{1}{G_1} \sin \lambda \delta_2 \cdot \cos \frac{\beta_2}{\beta_1} \lambda \delta_1 \right) = 0. \quad (6)$$

Данное уравнение имеет бесконечное счетное множество решений λ_n , $n = 1, 2, 3, \dots$. Следовательно, общее решение уравнений (2) представляет собой суперпозицию частных решений U_1^* и U_2^* , соответствующих λ_n , и $U_1^{(0)}$ и $U_2^{(0)}$. Вводя новые обозначения, получим

$$U_k = a_0 + b_0 x + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n \operatorname{ch} \omega_n x + b_n \operatorname{ch} \omega_n (x - L)}{\omega_n \operatorname{sh} \omega_n L} f_n^{(k)}(y), \quad (7)$$

где в свою очередь $\omega_n = \lambda_n \beta_2$; $\omega_n \operatorname{sh} \omega_n L$ – нормирующие множители, которые облегчают анализ сходимости решения; $f_n^{(1)} = \xi_n \cos \omega_n (y - \delta_1) / \beta_1$, $f_n^{(2)} = \cos[\lambda_n (y + \delta_2)]$; $\xi_n = \xi(\lambda_n)$.

Константы a_n и b_n находим из краевых условий. Функции $f_n^{(k)}(y)$ заданы на отрезках $[0; \delta_2]$ и $[-\delta_1; 0]$, и не ортогональны. Системы данных функций являются переполненными, и это позволяет удовлетворить краевым условиям на торцах соединяемых элементов. Напряжения в несущих слоях находим по формуле (1). Краевые условия (5) приводят к уравнениям:

$$b_0 - \sum_{n=1}^{\infty} b_n f_n^{(1)}(y) = 0; \quad b_0 - \sum_{n=1}^{\infty} b_n f_n^{(2)}(y) = \frac{F}{E_2 \delta_2};$$

$$b_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n f_n^{(1)}(y) = \frac{F}{E_1 \delta_1}; \quad b_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cdot f_n^{(2)}(y) = 0,$$

которые могут быть записаны в векторной форме

$$b_0 \vec{H} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \vec{V}_n^{(1)} + \sum_{n=1}^{\infty} b_n \vec{V}_n^{(2)} - \vec{R} = 0, \quad (8)$$

$$\vec{H} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}; \quad \vec{R}^{(1)} = \begin{pmatrix} 0 \\ F/(\delta_2 E_2) \\ F/(\delta_1 E_1) \\ 0 \end{pmatrix}; \quad \vec{V}_n^{(1)} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ f_n^{(1)}(y) \\ f_n^{(2)}(y) \end{pmatrix}; \quad \vec{V}_n^{(2)} = \begin{pmatrix} -f_n^{(1)}(y) \\ -f_n^{(2)}(y) \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Уравнение (8) решается путем ортогонализации его левой части системе линейно независимых вектор-функций \vec{H} , $\vec{V}_n^{(1)}$, $\vec{V}_n^{(2)}$. Скалярное произведение вектор-функций задается следующим образом:

$$(\vec{w}, \vec{v}) = \int_0^{\delta_1} w_1 v_1 dy + \int_{-\delta_2}^0 w_2 v_2 dy + \int_0^{\delta_1} w_3 v_3 dy + \int_{-\delta_2}^0 w_4 v_4 dy,$$

где w_k и v_k – соответствующие компоненты векторов \vec{w} и \vec{v} .

Ортогонализация приводит к системе

$$\mathbf{M} \cdot \vec{\mathbf{A}} = \vec{\mathbf{Q}}, \quad (9)$$

$$\mathbf{M} = \begin{pmatrix} \mathbf{N} & \mathbf{B}^{(1)} & \mathbf{B}^{(2)} \\ \mathbf{D}^{(1)} & \mathbf{M}^{(1,1)} & \mathbf{M}^{(1,2)} \\ \mathbf{D}^{(2)} & \mathbf{M}^{(2,2)} & \mathbf{M}^{(2,2)} \end{pmatrix}; \quad \vec{\mathbf{Q}} = \begin{pmatrix} \mathbf{q}^{(0)} \\ \mathbf{q}^{(1)} \\ \mathbf{q}^{(2)} \end{pmatrix}; \quad \mathbf{A} = \begin{pmatrix} b_0 \\ a_1 \\ \dots \\ a_N \\ b_1 \\ \dots \\ b_N \end{pmatrix}.$$

Элементы субматриц вычисляются следующим образом

$$N_{1,1} = (\vec{H}, \vec{H}); B_{1,n}^{(1)} = (\vec{V}_n^{(1)}, \vec{H}); B_{1,n}^{(2)} = (\vec{V}_n^{(2)}, \vec{H}); \mathbf{D}^{(1)} = (\mathbf{B}^{(1)})^T; \mathbf{q}^{(0)} = (\vec{R}, \vec{H}),$$

$$\mathbf{D}^{(2)} = (\mathbf{B}^{(2)})^T; M_{n,k}^{(1,1)} = (\vec{V}_n^{(1)}, \vec{V}_k^{(1)}); M_{n,k}^{(1,2)} = (\vec{V}_n^{(1)}, \vec{V}_k^{(2)}); \mathbf{q}_n^{(2)} = (\vec{R}, \vec{V}_n^{(2)}),$$

$$M_{n,k}^{(2,1)} = (\vec{V}_n^{(2)}, \vec{V}_k^{(1)}) = (\mathbf{M}_{n,k}^{(1,2)})^T; M_{n,k}^{(2,2)} = (\vec{V}_n^{(2)}, \vec{V}_k^{(2)}); \mathbf{q}_n^{(1)} = (\vec{R}, \vec{V}_n^{(1)}),$$

Численный пример. Рассмотрим клеевое соединение двух стержней со следующими параметрами: $L = 50$ мм; $E_1 = 60$ ГПа; $G_1 = 9$ ГПа; $E_2 = 200$ ГПа; $G_2 = 80$ ГПа; $\delta_1 = 10$ мм; $\delta_2 = 5$ мм; $G_0 = 0,6$ ГПа; $\delta_0 = 0,2$ мм.

Практический интерес имеет сравнение результатов расчетов напряжений в клее по предложенной модели с расчетами по одномерной модели Фолькерсена [10, 11], поскольку позволяет оценить точность последней. Существует два варианта математической модели соединения Фолькерсена. В классическом подходе предполагается, что сдвиговые деформации сосредоточены только в соединительном слое, а в уточненной модели Фолькерсена – что сдвиговые деформации постоянны по толщине клея и линейно изменяются по толщине соединяемых деталей, принимая нулевое значение на внешних сторонах соединяемых слоев. Данные подходы отличаются лишь

формулой вычисления податливости соединительного слоя [11].

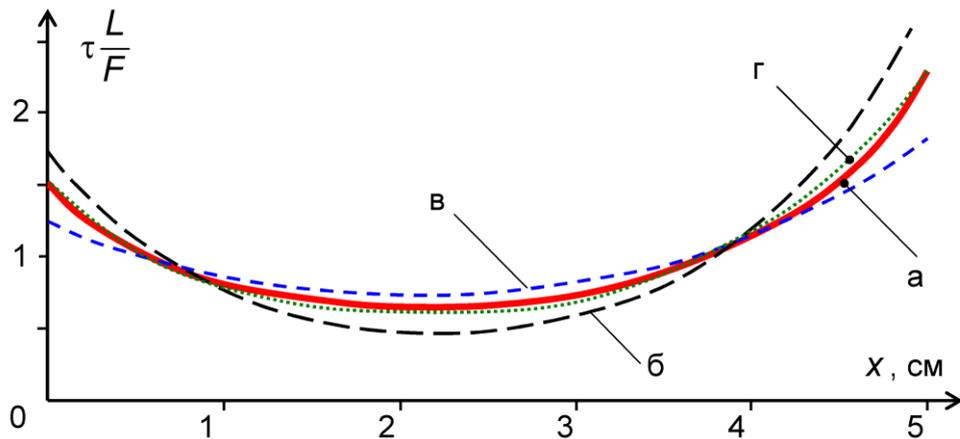


Рисунок 2 – Касательные напряжения в клее:
а – по предложенной двумерной модели; б – по классической модели Фолькерсена; в – по уточненной модели Фолькерсена;
г – средние значения напряжений двух моделей Фолькерсена

Из рисунка видно, что напряжения, вычисленные как среднее арифметическое расчетов по двум моделям Фолькерсена, с высокой точностью совпадают с напряжениями, вычисленными по предложенной двумерной модели. Эта зависимость справедлива для широкого спектра упругих и геометрических параметров элементов соединения.

Распределение касательных напряжений по толщине соединения показано на рис. 3. Для иллюстрации выбрана окрестность правого края соединения, т.е. область, где касательные напряжения в клее максимальны, и рассмотрены напряжения на торце соединения и на некотором удалении от него.

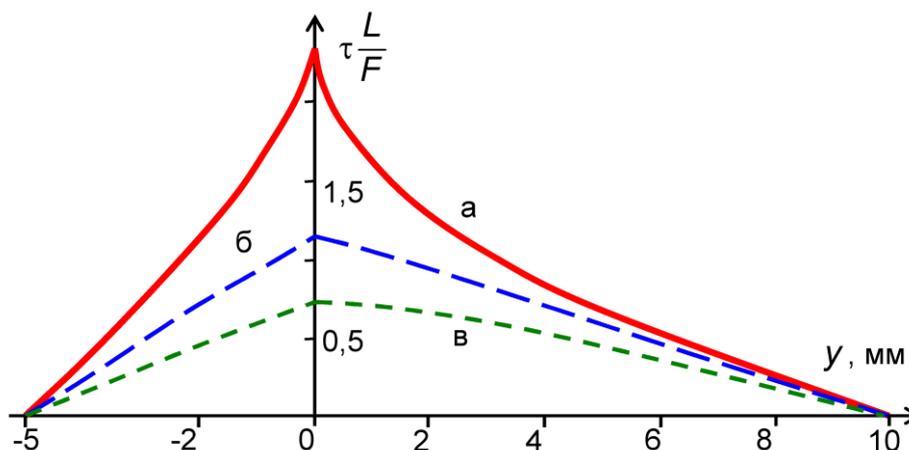


Рисунок 3 – Касательные напряжения в первом соединяемом слое:
а – у края шва, $x = L$; б – при $x = L - \delta_1$; в – при $x = L - 2\delta_1$

Приводимые графики показывают, что распределение касательных напряжений по толщине близко к линейному и отличается от него лишь в малой зоне у края клеевого шва.

Расчеты показали, что $a_n/b_n = \text{const}$, а сами коэффициенты не монотонно убывают с увеличением n , и скорость убывания приблизительно пропорциональна n^{-2} , что говорит о хорошей сходимости решения.

Выводы. Полученное решение может быть использовано для определения НДС коротких клеевых соединений относительно толстых слоев, для которых гипотеза о равномерном распределении напряжений по толщине неприменима. Предложенный подход может быть развит в следующих направлениях:

- определение НДС клеевого соединения пластинки с массивом;
- решение аналогичной задачи в цилиндрической системе координат и определение НДС трубчатых соединений, соединений с продольными связями, соединений анкеров с массивом и т.д.;
- определение НДС соединений со ступенчатым изменением толщины соединяемых деталей;
- учет влияния наплывов клея и заделки торцов на НДС соединения.

Список использованных источников

1. Zhao B. A Two-Dimensional Approach of Single-Lap Adhesive Bonded Joints [Text] / B. Zhao, Z.-H. Lu // Mechanics of Advanced Materials and Structures. – 2009, V.16, – P. 130–159.
2. Sawa T. A two-dimensional stress analysis of adhesive butt joints of dissimilar adherends subjected to tensile loads [Text] / T. Sawa, K. Temma, T. Nishigaya, H. Ishikawa // J. Adh. Sci. Techn. – 1995. – V.9, №2, p.215–236.
3. Короткова, С. Е. Механика клеевых соединений [Текст] / С.Е. Короткова; Министерство образования Украины, ИСМО, ДГМИ. – Алчевск: ДГМИ, 1998. – 187 с.
4. Карпов, Я. С. Соединения деталей и агрегатов из композиционных материалов [Текст] / Я. С. Карпов. – Харьков: Нац. аэрокосм. ун-т «Харьков. авиац. ин-т», 2006. – 359 с.
5. Кутьинов В.Ф. Расчет клеевых соединений // Проектирование, расчет и испытания конструкций из композиционных материалов / В.Ф. Кутьинов. – М.: ЦАГИ, 1979. – Вып. 7. – С. 14 - 30.
6. Kurennov S.S. Through-Thickness Stress Distribution in the Adhesive Joint for the Multilayer Composite Material [Text] / S.S. Kurennov, A.G. Koshevoi, A.G. Polyakov // Russian Aeronautics (Iz.VUZ) – 2015, – V. 58, №2. P. 145–151.

7. Васильев, В.В. Исследования напряженного состояния клеевого соединения композиционного материала с металлическим листом [Текст] // В.В. Васильев, Ю.В. Боков / Проектирование, расчет и испытания конструкций из композиционных материалов. – М.: ЦАГИ, 1979. – Вып. 7. – С. 4 – 10.

8. Васильев, В.В., О сингулярности решения в плоской задаче теории упругости для консольной полосы [Текст] / В.В. Васильев, С.А. Лурье // Изв. РАН. МТТ. – 2013. – № 4. – С. 40–49.

9. Frostig, Y. Analysis of adhesive-bonded joints, square-end, and spew-fillet—high-order theory approach [Text] / Y. Frostig, O. T. Thomsen, F. Mortensen // J. of Engineering Mechanics. – 1999, – V. 125, – P. 1298–1307.

10. da Silva L.F.M., das Neves P.J.C., Adams R.D., Spelt J.K. Analytical models of adhesively bonded joints — Part I: Literature survey // Int. J. of Adhesion & Adhesives. – 2009, – Vol. 29, – Pp. 319–330.

11. Гагауз, П. М. Применение одномерной дискретной модели для анализа напряженно-деформированного состояния адгезионных соединений [Текст] / П.М. Гагауз, Ф.М. Гагауз // Вопросы проектирования и производства конструкций летательных аппаратов. -- 2015. – Вып. 3. – С. 45-55.

Поступила в редакцию 25.11.2016.

*Рецензент: д-р техн. наук, проф. Я.С. Карпов,
Национальный аэрокосмический университет
им. Н.Е. Жуковского «ХАИ», г. Харьков.*