

## КРАЕВЫЕ ЗАДАЧИ ТЕОРИИ УПРУГОСТИ ДЛЯ ОРТОТРОПНОЙ ПЛАСТИНЫ, ОСЛАБЛЕННОЙ ЭЛЛИПТИЧЕСКИМ ОТВЕРСТИЕМ И ПАРАБОЛИЧЕСКИМ ВЫРЕЗОМ

Имеется лишь небольшое число публикаций, ориентированных на построение новых и развитие имеющихся аналитических методов исследования задач теории упругости для многосвязных ортотропных тел. Это обстоятельство связано с существенными математическими трудностями построения эффективных методов точной реализации граничных условий исходных краевых задач.

Актуальность соответствующих исследований для инженерных применений определяется тем, что в вопросах прочности материалов и элементов конструкций используют в основном информацию о напряженно-деформированном состоянии вблизи отверстий, разрезов (трещин), включений и т.д. Получение достоверной и полной информации о распределении напряжений в указанных локальных зонах непосредственно связано с использованием аналитических методов решения краевых задач теории упругости. В обзорных статьях [1, 2] с достаточной полнотой представлена история проблемы исследования закономерностей напряженного состояния в анизотропных телах.

Предлагаемый в данной работе аналитический подход основан на представлении общих решений уравнений равновесия в напряжениях и перемещениях через две гармонические функции [3, 4] и использовании соотношений между базисными гармоническими функциями в эллиптических и параболических системах координат. Реализация граничных условий основных краевых задач приводит к бесконечным системам линейных алгебраических уравнений второго рода с экспоненциально убывающими матричными коэффициентами, что позволяет провести эффективный анализ напряженного состояния вблизи концентраторов напряжений. В предельном случае, когда пластина ослаблена конечным и полубесконечным разрезами на оси анизотропии, удается получить простые асимптотические формулы для коэффициентов интенсивности нормальных напряжений.

Пусть  $\delta_1, \delta_2$  ( $\delta_j > 0$ ) – безразмерные величины, определяемые формулами

$$\delta_1^2 + \delta_2^2 = \omega = \frac{E_1}{G_{12}} - 2\nu_{12}; \quad \delta_1^2 \delta_2^2 = \gamma = \frac{E_1}{E_2} \quad (\omega > 0, \omega^2 - 4\gamma \geq 0),$$

где  $E_1 = E_x$ ,  $E_2 = E_y$  – модули упругости материала на растяжение (сжатие) в направлении осей  $x$  и  $y$ ;  $G_{12} = G_{xy}$  – модуль сдвига в плос-

кости  $Oxy$ ;  $\nu_{12} = \nu_{xy}$  – коэффициент Пуассона.

Частные решения двумерных однородных уравнений равновесия ортотропных в осях  $x$  и  $y$  пластин представим в виде [3, 4]

$$\tau_{xy}^{(j)} = -\frac{a}{\delta_j} \frac{\partial I_j}{\partial y} = -a \frac{\partial I_j}{\partial y_j}, \quad \sigma_x^{(j)} = -a \delta_j \frac{\partial I_j}{\partial x}, \quad \sigma_y^{(j)} = \frac{a}{\delta_j} \frac{\partial I_j}{\partial x} = -\delta_j^{-2} \sigma_x^{(j)}; \quad (1)$$

$$u_x^{(j)} = -\frac{a(\delta_j^2 + \nu_{12})}{\delta_j E_1} I_j, \quad u_y^{(j)} = \frac{a(\delta_{3-j}^2 + \nu_{12})}{E_1} \int \frac{\partial I_j}{\partial x} dy_j \quad (j=1, 2), \quad (2)$$

где  $I_j = I_j(x, y_j)$  – гармонические функции переменных  $x, y_j = \delta_j y$ ;  $a$  – размерный параметр, определяемый выбором исходной криволинейной системы координат. Заметим, что в формулах (2)  $I_j$  и  $\int \frac{\partial I_j}{\partial x} dy_j$  – сопряженные гармонические функции переменных  $x, y_j$ .

Положим

$$\tau_{xy} = \tau_{xy}^{(1)} + \tau_{xy}^{(2)}, \quad \sigma_x = \sigma_x^{(1)} + \sigma_x^{(2)}, \quad \sigma_y = \sigma_y^{(1)} + \sigma_y^{(2)}; \quad u_x = u_x^{(1)} + u_x^{(2)}, \quad u_y = u_y^{(1)} + u_y^{(2)}. \quad (3)$$

При  $\delta_1 \neq \delta_2$  ( $\omega^2 \neq 4\gamma$ ) представления (3) компонент тензора напряжений и вектора перемещений являются общими (функции  $I_j$  линейно независимы). В случае  $\delta_1 = \delta_2 = \delta$  ( $\omega^2 = 4\gamma$ ) функции  $I_1, I_2$  образуют линейно зависимую систему и тогда надо либо построить решение уравнений равновесия, не выражающееся линейно через уже имеющееся решение (построенное с помощью гармонической функции  $I_1$ ), либо в исходной краевой задаче ( $\delta_1 \neq \delta_2$ ) совершить предельный переход  $\delta_2 \rightarrow \delta_1 = \delta$ .

Пусть  $\langle x, y \rangle, \langle \xi, \theta \rangle$  – исходные декартова и эллиптическая системы координат, связанные соотношениями (рисунок)

$$x = a \operatorname{sh} \xi \sin \theta, \quad y = a \operatorname{ch} \xi \cos \theta \quad (a > 0, 0 \leq \xi < \infty, 0 \leq \theta \leq 2\pi). \quad (4)$$

Уравнение  $\xi = \xi_0 = \operatorname{const}$  задаёт вытянутый вдоль оси  $Oy$  эллипс с полуосями  $a \operatorname{sh} \xi_0, a \operatorname{ch} \xi_0$ .

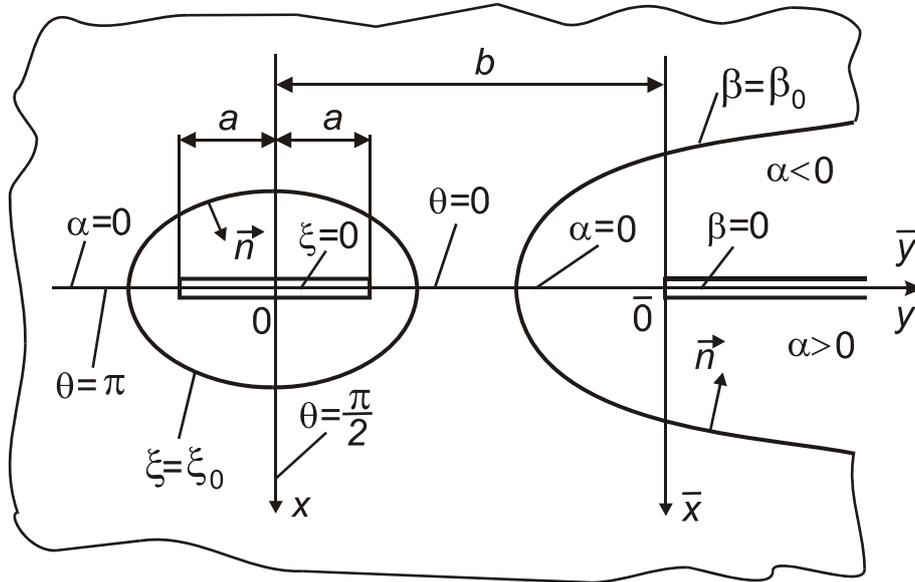
При  $\delta_1 \neq \delta_2$  каждую из гармонических функций  $I_j$  ( $j=1, 2$ ) будем рассматривать как функцию эллиптических координат  $\xi_j, \theta_j$ , определяемых формулами

$$x_j = x = a_j \operatorname{sh} \xi_j \sin \theta_j, \quad y_j = \delta_j y = a_j \operatorname{ch} \xi_j \cos \theta_j \quad (a_j > 0, 0 \leq \xi_j < \infty, 0 \leq \theta_j \leq 2\pi). \quad (5)$$

Уравнение  $\xi_j = \xi_{j0} = \operatorname{const}$  ( $j=1, 2$ ) задаёт эллипс, совпадающий с ис-

ходным эллипсом  $\xi = \xi_0$  при условии, что

$$a_j \operatorname{sh} \xi_{j0} = a \operatorname{sh} \xi_0, \quad a_j \operatorname{ch} \xi_{j0} = \delta_j a \operatorname{ch} \xi_0 \quad (j=1, 2). \quad (6)$$



Геометрия пластины

Тогда из соотношений (4) - (6) следует, что на границах  $\xi = \xi_0$ ,  $\xi_j = \xi_{j0}$  внутренних и внешних эллиптических областей  $0 \leq \xi < \xi_0$ ,  $0 \leq \xi_j \leq \xi_{j0}$ ;  $\xi_0 < \xi < \infty$ ,  $\xi_{j0} < \xi_j < \infty$  выполняются равенства  $\theta_1 = \theta_2 = \theta$ . При этом направляющие косинусы единичных внешних нормалей  $\vec{n} = n_x \vec{e}_x + n_y \vec{e}_y$ ,  $\vec{n}_j = n_x^{(j)} \vec{e}_x + n_y^{(j)} \vec{e}_y$  к границам  $\xi = \xi_0$ ,  $\xi_j = \xi_{j0}$  внешних областей  $\xi_0 < \xi < \infty$ ,  $\xi_{j0} < \xi_j < \infty$  совпадают и

$$n_x^{(1)} = n_x^{(2)} = n_x = -\frac{\operatorname{ch} \xi_0 \sin \theta}{h_0}, \quad n_y^{(1)} = n_y^{(2)} = n_y = -\frac{\operatorname{sh} \xi_0 \cos \theta}{h_0}; \quad h_0 = \sqrt{\operatorname{ch}^2 \xi_0 - \cos^2 \theta}.$$

Если на границе пластины задан вектор сил  $\vec{F} = F_x \vec{e}_x + F_y \vec{e}_y$ , то его проекции на оси декартовой системы координат выражаются формулами  $F_x = \sigma_x n_x + \tau_{xy} n_y$ ,  $F_y = \tau_{xy} n_x + \sigma_y n_y$ . Проекции  $F_x^{(j)} = \sigma_x^{(j)} n_x^{(j)} + \tau_{xy}^{(j)} n_y^{(j)}$ ,  $F_y^{(j)} = \tau_{xy}^{(j)} n_x^{(j)} + \sigma_y^{(j)} n_y^{(j)}$  векторов сил  $\vec{F}_j = F_x^{(j)} \vec{e}_x + F_y^{(j)} \vec{e}_y$ , соответствующие частным решениям (1), имеют вид [5]

$$F_x^{(j)} \Big|_{\xi_j = \xi_{j0}} = \frac{1}{h_0} \frac{\partial I_j}{\partial \xi_j} \Big|_{\xi_j = \xi_{j0}}, \quad F_y^{(j)} \Big|_{\xi_j = \xi_{j0}} = -\frac{1}{\delta_j h_0} \frac{\partial I_j}{\partial \theta_j} \Big|_{\xi_j = \xi_{j0}}. \quad (7)$$

Следовательно, на основании (3)

$$F_x \Big|_{\xi=\xi_0} = F_x^{(1)} \Big|_{\xi_1=\xi_{10}} + F_x^{(2)} \Big|_{\xi_2=\xi_{20}}, \quad F_y \Big|_{\xi=\xi_0} = F_y^{(1)} \Big|_{\xi_1=\xi_{10}} + F_y^{(2)} \Big|_{\xi_2=\xi_{20}}. \quad (8)$$

В предельном случае  $\xi_0=0$  ( $\xi_{j0}=0$ ) эллипсы  $\xi=\xi_0$ ,  $\xi_j=\xi_{j0}$  вырождаются в один и тот же разрез  $x = \pm 0$ ,  $|y| \leq a$ , причем  $a_j = \delta_j a$ ,  $h_0 = |\sin\theta|$ .

Введем теперь декартову  $\langle \bar{x}, \bar{y} \rangle$  и параболическую  $\langle \alpha, \beta \rangle$  системы координат следующими соотношениями (рис. 1):

$$\bar{x}=x, \quad \bar{y}=y-b, \quad \bar{x}=c\alpha\beta, \quad \bar{y}=\frac{c}{2}(\alpha^2-\beta^2) \quad (c>0, b>a, -\infty<\alpha<\infty, 0\leq\beta<\infty).$$

Уравнение  $\beta=\beta_0=\text{const}$  задает параболу

$$\bar{y} = \frac{\bar{x}^2}{2c\beta_0^2} - \frac{c\beta_0^2}{2}. \quad (9)$$

При  $\delta_1 \neq \delta_2$  каждую из гармонических функций  $I_j$  ( $j=1, 2$ ) будем рассматривать также как функцию параболических координат  $\alpha_i, \beta_i$ , определяемых формулами

$$\bar{x}_j = \bar{x} = c_j \alpha_j \beta_j, \quad \bar{y}_j = \delta_j \bar{y} - \gamma_j = \frac{c_j}{2}(\alpha_j^2 - \beta_j^2), \quad (c_j, \gamma_j - \text{const}, -\infty < \alpha_j < \infty, 0 \leq \beta_j < \infty).$$

Уравнение  $\beta_j = \beta_{j0} = \text{const}$  задает параболу

$$\bar{y}_j = \frac{\bar{x}_j^2}{2c_j\beta_{j0}^2} - \frac{c_j\beta_{j0}^2}{2} \quad (\bar{x}_j = \bar{x}), \quad (10)$$

совпадающую с исходной параболой (9) при условии, что  $\delta_j c_j \beta_{j0}^2 = c \beta_0^2$ ,

$\gamma_j = \frac{1}{2}(c_j \beta_{j0}^2 - c \delta_j \beta_0^2)$ . Положим  $c_j = \delta_j c$ . Тогда  $\delta_j \beta_{j0} = \beta_0$ ,  $\gamma_j = \frac{c}{2} \delta_j (\beta_{j0}^2 - \beta_0^2)$ ,

$\bar{x}_j \Big|_{\beta_j = \beta_{j0}} = c \alpha_j \beta_0$ ,  $\bar{x} \Big|_{\beta = \beta_0} = c \alpha \beta_0$  и так как  $\bar{x}_j = \bar{x}$ , то на совпадающих пара-

болах  $\beta_j = \beta_{j0}$ ,  $\beta = \beta_0$  выполняются равенства  $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha$ . При этом

направляющие косинусы единичных внешних нормалей  $\vec{n} = n_x \vec{e}_x + n_y \vec{e}_y$ ,  $\vec{n}_j = n_x^{(j)} \vec{e}_x + n_y^{(j)} \vec{e}_y$  к границам (9), (10) внешних параболических областей

$\beta_0 < \beta < \infty$ ,  $\beta_{j0} < \beta_j < \infty$  совпадают и

$$n_x^{(1)} = n_x^{(2)} = n_x = -\frac{\alpha}{g_0}, \quad n_y^{(1)} = n_y^{(2)} = n_y = \frac{\beta}{g_0}; \quad g_0 = \sqrt{\alpha^2 + \beta^2}.$$

Проекции  $F_x^{(j)} \Big|_{\beta_j = \beta_{j0}}$ ,  $F_y^{(j)} \Big|_{\beta_j = \beta_{j0}}$  векторов сил  $\vec{F}_j \Big|_{\beta_j = \beta_{j0}}$ , соответ-

ствующие частным решениям (1), имеют вид [3]

$$F_x^{(j)} \Big|_{\beta_j=\beta_{j0}} = \frac{a}{cg_0} \frac{\partial I_j}{\partial \beta_j} \Big|_{\beta_j=\beta_{j0}}, \quad F_y^{(j)} \Big|_{\beta_j=\beta_{j0}} = \frac{a}{\delta_j cg_0} \frac{\partial I_j}{\partial \alpha_j} \Big|_{\beta_j=\beta_{j0}}. \quad (11)$$

Следовательно, на основании (3)

$$F_x \Big|_{\beta=\beta_0} = F_x^{(1)} \Big|_{\beta_1=\beta_{10}} + F_x^{(2)} \Big|_{\beta_2=\beta_{20}}, \quad F_y \Big|_{\beta=\beta_0} = F_y^{(1)} \Big|_{\beta_1=\beta_{10}} + F_y^{(2)} \Big|_{\beta_2=\beta_{20}}. \quad (12)$$

В предельном случае  $\beta=0$  ( $\beta_{j0}=0$ ) параболы  $\beta=\beta_0$ ,  $\beta_j=\beta_{j0}$  вырождаются в один и тот же полубесконечный разрез  $\bar{x} = \pm 0$ ,  $0 \leq \bar{y} < \infty$ , причем  $\gamma_j=0$  ( $\bar{y}_j = \delta_j \bar{y}$ ),  $g_0 = |\alpha|$ .

Базисные гармонические функции в координатных системах  $\langle \xi_j, \theta_j \rangle$ ,  $\langle \alpha_j, \beta_j \rangle$  связаны между собой соотношениями

$$\begin{cases} e^{-n\xi_j} \sin n\theta_j = \int_0^\infty a_n^{(j)}(\mu) \operatorname{sh} \mu \beta_j \sin \mu \alpha_j d\mu \quad (y_j > a_j), \\ e^{-\mu\beta_j} \sin \mu \alpha_j = \sum_{n=1}^\infty b_n^{(j)}(\mu) \operatorname{sh} n\xi_j \sin n\theta_j \quad (\bar{y}_j < 0); \end{cases} \quad (13)$$

$$\begin{cases} e^{-n\xi_j} \cos n\theta_j = \int_0^\infty a_n^{(j)}(\mu) \operatorname{ch} \mu \beta_j \cos \mu \alpha_j d\mu \quad (y_j > a_j), \\ e^{-\mu\beta_j} \cos \mu \alpha_j = \frac{1}{2} b_0^{(j)}(\mu) + \sum_{n=1}^\infty b_n^{(j)}(\mu) \operatorname{ch} n\xi_j \cos n\theta_j \quad (\bar{y}_j < 0), \end{cases} \quad (14)$$

в которых

$$\begin{cases} a_n^{(j)}(\mu) \\ b_n^{(j)}(\mu) \end{cases} = \begin{cases} n \\ \mu \end{cases} S_n^{(j)}(\mu), \quad S_n^{(j)}(\mu) = \sqrt{\frac{2}{\pi c_j}} \int_0^\infty \lambda^{-\frac{3}{2}} I_n(a_j \lambda) e^{-(\gamma_j + \delta_j b) \lambda - \frac{\mu^2}{2c_j \lambda}} d\lambda,$$

$I_n(z)$  – модифицированная функция Бесселя,  $a_j < \gamma_j + \delta_j b$ .

Если  $\xi_0=0$  ( $\xi_{0j}=0$ ),  $\beta_0=0$  ( $\beta_{0j}=0$ ), то  $a_j = \delta_j a$ ,  $c_j = \delta_j c$ ,  $\gamma_j=0$  и, следовательно, величины  $a_n^{(j)}(\mu)$ ,  $b_n^{(j)}(\mu)$  не зависят от  $j$  ( $\delta_j$ ):

$$\begin{cases} a_n^{(j)}(\mu) \\ b_n^{(j)}(\mu) \end{cases} = \begin{cases} a_n(\mu) \\ b_n(\mu) \end{cases} = \begin{cases} n \\ \mu \end{cases} S_n(\mu), \quad S_n(\mu) = \sqrt{\frac{2}{\pi c}} \int_0^\infty \lambda^{-\frac{3}{2}} I_n(a \lambda) e^{-b \lambda - \frac{\mu^2}{2c \lambda}} d\lambda.$$

Метод получения такого рода соотношений между базисными гармоническими функциями, рассматриваемыми в разных координатных системах, изложен в работе [6].

Разложения (13), (14) в сочетании с методом Фурье и представлениями (1) - (3), (7), (8), (11), (12) позволяют точно удовлетворить граничным условиям основных краевых задач для неограниченной ортотропной пластины, ослабленной эллиптическим отверстием  $0 \leq \xi \leq \xi_0$  и параболическим вырезом  $0 \leq \beta \leq \beta_0$ , в частности конечным ( $\xi=0$ ) и полу-бесконечным ( $\beta=0$ ) разрезами вдоль оси Oy.

В качестве приложения приведенных общих результатов рассмотрим первую основную краевую задачу для ортотропной пластины с разрезами  $\xi=0$  ( $x = \pm 0, |y| < a$ ) и  $\beta=0$  ( $x = \pm 0, y > b > a$ ).

Пусть берега этого разреза  $\xi=0$  растягиваются равномерно распределенными нормальными усилиями интенсивности  $\sigma_0 = \text{const}$  ( $\sigma_0 > 0$ ), а берега разреза  $\beta=0$  свободны от внешних усилий. В силу симметрии задачи по координате  $x$  ( $\bar{x}$ ) достаточно удовлетворить граничным условиям

$$F_x|_{\xi=0} = \sigma_0, F_y|_{\xi=0} = 0 \quad (0 < \theta < \pi); F_x|_{\beta=0} = 0, F_y|_{\beta=0} = 0 \quad (0 < \alpha < \infty),$$

а гармонические функции  $I_j$  ( $j=1, 2$ ) представить в виде сумм

$$I_j = \sum_{n=1}^{\infty} A_n^{(j)} e^{-n\xi_j} \sin n\theta_j + \int_0^{\infty} B_j(\mu) e^{-b_j\mu} \sin \alpha_j \mu d\mu. \quad (15)$$

Используя теперь равенства (7), (8) при  $\xi_0=0, \xi_{j0}=0$ , (11), (12) при  $\beta_0=0, \beta_{j0}=0$ , разложения (13), (15) и учитывая, что на разрезах  $\xi=0, \beta=0$  соответственно  $\theta_1=\theta_2=\theta, h_0=|\sin \theta|; \alpha_1=\alpha_2=\alpha, g_0=|\alpha|$ , в результате простых преобразований находим связи между коэффициентами  $A_n^{(j)}$  и плотностями  $B_j(\mu)$ :

$$\delta_1^{-1} A_n^{(1)} + \delta_2^{-1} A_n^{(2)} = 0 \quad (n = 1, 2, \dots), \quad \delta_1^{-1} B_1(\mu) + \delta_2^{-1} B_2(\mu) = 0;$$

$$A_n^{(1)} + A_n^{(2)} = \int_0^{\infty} \mu [B_1(\mu) + B_2(\mu)] S_n(\mu) d\mu + \bar{f}_n \quad (n=1, 2, \dots);$$

$$B_1(\mu) + B_2(\mu) = \sum_{k=1}^{\infty} k [A_k^{(1)} + A_k^{(2)}] S_k(\mu); \quad \bar{f}_1 = -\sigma_0, \bar{f}_n = 0 \quad (n=2, 3, \dots).$$

Полагая  $A_n^{(1)} + A_n^{(2)} = -\sigma_0 x_n$ , для отыскания величин  $x_n$  получаем бесконечную систему линейных алгебраических уравнений второго рода

$$x_n = \sum_{k=1}^{\infty} d_{nk} x_k + f_n \quad (n=1, 2, \dots); \quad f_1 = 1, f_n = 0 \quad (n=2, 3, \dots); \quad (16)$$

$$d_{nk} = \frac{2k}{\pi c} \int_0^{\infty} \lambda^{-\frac{3}{2}} I_n(a\lambda) e^{-b\lambda} d\lambda \int_0^{\infty} \omega^{-\frac{3}{2}} I_k(a\omega) e^{-b\omega} d\omega \int_0^{\infty} \mu e^{-\frac{\mu^2}{2c} \left( \frac{1}{\lambda} + \frac{1}{\omega} \right)} d\mu > 0.$$

В результате интегрирования по переменной  $\mu$  и замены  $\omega = \lambda t$

$$d_{nk} = \frac{2k}{\pi} \int_0^{\infty} t^{-\frac{1}{2}} (1+t)^{-1} R_{nk}(t) dt, \quad R_{nk}(t) = \int_0^{\infty} \lambda^{-1} I_n(a\lambda) I_k(a\lambda t) e^{-b\lambda(1+t)} d\lambda. \quad (17)$$

Вводя безразмерный параметр  $\varepsilon = a/b$  ( $0 < \varepsilon < 1$ ), используя значение интеграла [7]

$$\int_0^{\infty} x^{-1} e^{-px} I_\nu(cx) dx = \frac{c^\nu}{\nu} (p + \sqrt{p^2 - c^2})^{-\nu}$$

и неравенство  $t^{-\frac{1}{2}}(1+t)^{-1} < \frac{1}{2}t^{-1}$  ( $t > 0$ ), для матричных коэффициентов  $d_{nk}$  получим оценку

$$0 < d_{nk} < \frac{\varepsilon^{n+k}}{\pi n (1 + \sqrt{1 - \varepsilon^2})^{n+k}} \quad (0 < \varepsilon < 1). \quad (18)$$

При этом  $\sigma_n = \sum_{k=1}^{\infty} d_{nk} < \frac{\varepsilon^{n+1}}{\pi n (1 - \varepsilon + \sqrt{1 - \varepsilon^2}) (1 + \sqrt{1 - \varepsilon^2})^n}$  ( $n=1, 2, \dots$ ).

Следовательно,  $\sigma_n \rightarrow 0$  ( $n \rightarrow \infty$ ,  $0 < \varepsilon < 1$ ), т.е. бесконечная система (16) квазирегулярна при любом значении  $\varepsilon \in (0; 1)$  (любой степени близости разрезов  $\xi=0$ ,  $\beta=0$ ). Кроме того, при любом  $n=1, 2, \dots$

$$0 < \sigma_n < \frac{\varepsilon^2}{\pi \sqrt{1 - \varepsilon^2} (1 + \sqrt{1 - \varepsilon^2})} < 1 \quad (0 < \varepsilon < \varepsilon_0 = \sqrt{1 - \frac{1}{(\pi+1)^2}}). \quad (19)$$

Оценка (19) означает, что оператор бесконечной системы (16) действует в пространстве  $\ell$  абсолютно суммируемых числовых последовательностей и является в нем оператором сжатия. Это свойство оператора обеспечивает существование и единственность решения системы (16) в пространстве  $\ell$  и позволяет для его нахождения использовать метод последовательных приближений и метод малого параметра. С другой стороны, оценка (19) означает, что при  $0 < \varepsilon < \varepsilon_0$  бесконечная система (16) вполне регулярна [8] и, следовательно, к ней в качестве метода решения применим также метод редукции. Так как  $d_{nk} > 0$ ,  $f_1 = 1$ ,  $f_n = 0$  ( $n=2, 3, \dots$ ), то  $x_n > 0$ .

На основании (17) и равенств [7,9]

$$\int_0^{\infty} x^{-1} e^{-px} I_{\mu}(bx) I_{\nu}(cx) dx =$$

$$= \frac{b^{\mu} c^{\nu} p^{-\mu-\nu}}{2^{\mu+\nu} \Gamma(\nu+1)} \sum_{s=0}^{\infty} \frac{\Gamma(\mu+\nu+2s)}{s! \Gamma(\mu+s+1)} \left(\frac{b}{2p}\right)^{2s} F\left(-s, -\mu-s; \nu+1; \frac{c^2}{b^2}\right),$$

$$\int_0^{\infty} \frac{t^{\alpha-1} dt}{(1+t)^{\beta}} = \frac{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta-\alpha)}{\Gamma(\beta)} \quad (\Gamma(z) - \text{гамма-функция; } F(a, b; c; z) - \text{гипергео-}$$

метрическая функция Гаусса) для вычисления матричных коэффициентов получаем разложение по степеням параметра  $\varepsilon$ :

$$d_{nk} = \frac{2k}{\pi} \sum_{s=0}^{\infty} \frac{T_{nk}^s}{n+k+2s} \left(\frac{\varepsilon}{2}\right)^{n+k+2s}, \quad T_{nk}^s = \sum_{i=0}^s \frac{\Gamma(k+2i+1/2)\Gamma(n+2s-2i+1/2)}{i!(k+i)!(s-i)!(n+s-i)!}.$$

Рассмотрим теперь вопрос о поведении нормальных напряжений вблизи вершин разрезов и вычислении соответствующих коэффициентов интенсивности. Используя представления (1), (3) и учитывая, что  $\xi_1 = \xi_2 = \xi$  при  $\theta = 0, \theta = \pi$  и  $\beta_1 = \beta_2 = \beta$  при  $\alpha = 0$ , после некоторых преобразований получаем асимптотические формулы

$$\begin{cases} \sigma_x \\ \sigma_y \end{cases}_{x=0, a < y < b} \sim \frac{\sigma_0}{\text{sh} \xi} \begin{Bmatrix} 1 \\ (\delta_1 \delta_2)^{-1} \end{Bmatrix} \sum_{n=1}^{\infty} n x_n \quad (\xi \rightarrow 0 \quad (y \rightarrow a)),$$

$$\begin{cases} \sigma_x \\ \sigma_y \end{cases}_{x=0, -\infty < y < -a} \sim \frac{\sigma_0}{\text{sh} \xi} \begin{Bmatrix} 1 \\ (\delta_1 \delta_2)^{-1} \end{Bmatrix} \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} n x_n \quad (\xi \rightarrow 0 \quad (y \rightarrow -a)),$$

$$\begin{cases} \sigma_x \\ \sigma_y \end{cases}_{x=0, -(b-a) < \bar{y} < 0} \sim \frac{\sigma_0 a}{c\beta} \begin{Bmatrix} 1 \\ (\delta_1 \delta_2)^{-1} \end{Bmatrix} \sum_{k=1}^{\infty} x_k \int_0^{\infty} \mu a_k(\mu) d\mu \quad (\beta \rightarrow 0 \quad (\bar{y} \rightarrow 0));$$

$$\int_0^{\infty} \mu a_k(\mu) d\mu = k \sqrt{\frac{2c}{\pi b}} \sum_{i=0}^{\infty} \frac{\Gamma(2i+k+1/2)}{i!(i+k)!}.$$

Соответствующие коэффициенты интенсивности

$$K_I^{\pm} = \lim_{\xi \rightarrow 0} \left[ \sigma_x \sqrt{2(\pm y - a)} \right]_{\theta = \theta^{\pm}} = \sigma_0 \sqrt{a} \sum_{n=1}^{\infty} (\pm 1)^{n-1} n x_n, \quad \left( \theta^{\pm} = \begin{Bmatrix} 0 \\ \pi \end{Bmatrix} \right), \quad (20)$$

$$\bar{K}_I = \lim_{\beta \rightarrow 0} \left[ \sigma_x \sqrt{-2\bar{y}} \right]_{\alpha=0} = 2\sigma_0 \sqrt{\frac{b}{\pi}} \sum_{k=1}^{\infty} k x_k \left(\frac{\varepsilon}{2}\right)^{k+1} \sum_{i=0}^{\infty} \frac{\Gamma(2i+k+1/2)}{i!(i+k)!} \left(\frac{\varepsilon}{2}\right)^{2i}.$$

Свойства бесконечной системы (16) и оценка (18) гарантируют сходимость рядов в формулах (20).

Решая систему (16) методом малого параметра и ограничиваясь при этом членами до порядка  $\varepsilon^6$ , получаем

$$x_1 = 1 + \frac{1}{2^4} \varepsilon^2 + \frac{17}{2^9} \varepsilon^4 + \frac{357}{2^{14}} \varepsilon^6, \quad x_2 = \frac{1}{2^6} \varepsilon^3 + \frac{25}{2^{11}} \varepsilon^5,$$

$$x_3 = \frac{5}{2^{10}} \varepsilon^4 + \frac{165}{2^{15}} \varepsilon^6, \quad x_4 = \frac{7}{2^{12}} \varepsilon^5, \quad x_5 = \frac{21}{2^{15}} \varepsilon^6;$$

$$K_I^\pm = \sigma_0 \sqrt{a} \left( 1 + \frac{1}{2^4} \varepsilon^2 \pm \frac{1}{2^5} \varepsilon^3 + \frac{49}{2^{10}} \varepsilon^4 \pm \frac{1}{2^5} \varepsilon^5 + \frac{657}{2^{14}} \varepsilon^6 \right),$$

$$\bar{K}_I = \sigma_0 \sqrt{\frac{b}{2}} \left( \frac{1}{2} \varepsilon^2 + \frac{17}{2^6} \varepsilon^4 + \frac{391}{2^{11}} \varepsilon^6 \right).$$

Нетрудно убедиться в корректности граничных условий на берегах разреза  $\beta=0$  ( $\bar{x} = \pm 0, 0 < \bar{y} < \infty$ ), предполагающих отсутствие взаимного контакта этих берегов. Действительно, простые вычисления показывают, что перемещения

$$u_x|_{x=\pm 0, 0 < \bar{y} < \infty} = \pm \frac{2a\sigma_0(\delta_1 + \delta_2)}{\sqrt{\pi} E_1} \sum_{k=1}^{\infty} k x_k c_k(\bar{y}) \quad (x_k > 0),$$

$$c_k(\bar{y}) = \sqrt{\bar{y}} \int_0^1 dt \int_0^{\infty} \lambda^{\frac{1}{2}} I_k(a\lambda) e^{-b\lambda} e^{-\lambda\bar{y}(1-t^2)} d\lambda > 0 \quad (\bar{y} > 0),$$

$$\text{т.е. } u_x|_{x=+0, 0 < \bar{y} < \infty} > 0, \quad u_x|_{x=-0, 0 < \bar{y} < \infty} < 0.$$

В заключение отметим, что разложения (14) позволяют реализовать и антисимметричный вариант задачи, а в общем случае разбиение исходной краевой задачи на симметричную и антисимметричную по координате  $x$  ( $\bar{x}$ ) дает возможность исследовать ее при произвольных граничных условиях на берегах разрезов.

#### Список использованных источников

1. Космодамианский, А.С. Концентрация внутренней энергии в многосвязных телах [Текст] / А.С. Космодамианский // Прикладная механика. – 2002. – Т.38, № 4. – С.21–48.
2. Немиш, Ю.Н. Развитие аналитических методов в трехмерных задачах статики анизотропных тел (обзор) [Текст] / Ю.Н. Немиш // Прикладная механика. – 2000. – Т.36, № 2. – С.3–38.
3. Соловьев, А.И. Краевые задачи теории упругости для ортотропных пластин, ограниченных координатными линиями декартовой и параболической систем координат [Текст] / А.И. Соловьев // Вопросы проектирования и производства конструкций летательных аппаратов: сб. науч.

тр. Нац. аэрокосм. ун-та им. Н.Е. Жуковского "ХАИ". – Вып. 2 (70). – Х., 2012. – С. 117–127.

4. Соловьев, А.И. О совместном применении декартовых и эллиптических координат к решению краевых задач теории упругости для ортотропных пластин [Текст] / А.И. Соловьев, А.В. Головченко // Открытые информационные и компьютерные технологии: сб. науч. тр. Нац. аэрокосм. ун-та им. Н.Е. Жуковского "ХАИ". – Вып. 53. – Х., 2012. – С. 101–110.

5. Соловьев, А.И. Краевые задачи теории упругости для ортотропной полуплоскости, ослабленной эллиптическим отверстием [Текст] / А.И. Соловьев // Вопросы проектирования и производства конструкций летательных аппаратов: сб. науч. тр. Нац. аэрокосм. ун-та им. Н.Е. Жуковского "ХАИ". – Вып. 4 (80). – Х., 2014. – С. 124–132.

6. Проценко, В.С. О совместном применении декартовых и биполярных координат к решению краевых задач теории потенциала и теории упругости [Текст] / В.С. Проценко, А.И. Соловьев // Прикладная механика. – 1984. – Т.48, № 6. – С. 973–982.

7. Прудников, А.П. Интегралы и ряды. Специальные функции [Текст] / А.П. Прудников, Ю.А. Брычков, О.И. Маричев. – М.: Наука, 1983. – 752 с.

8. Канторович, Л.В. Приближенные методы высшего анализа [Текст] / Л.В. Канторович, В.И. Крылов. – Л.: Физматгиз, 1962. – 708 с.

9. Прудников, А.П. Интегралы и ряды. Дополнительные главы [Текст] / А.П. Прудников, Ю.А. Брычков, О.И. Маричев. – М.: Наука, 1986. – 800 с.

*Поступила в редакцию 11.03.2015.*

*Рецензент: д-р физ.-мат. наук, проф. В.С. Проценко,  
Национальный аэрокосмический университет  
им. Н.Е. Жуковского «ХАИ», г. Харьков.*