

НАПРЯЖЕНИЯ В УПРУГОМ МАТЕРИАЛЕ СО СФЕРИЧЕСКИМИ ПОРАМИ ПОД ДЕЙСТВИЕМ ВНЕШНЕЙ НАГРУЗКИ

Введение

При проектировании изделий из пористых или композиционных материалов важными факторами являются характеристики материала, связанные с его прочностью. Любые оценки прочности материала основываются на определении напряженно-деформированного состояния, возникающего в нем под действием внешних нагрузок. Теоретические методы определения напряжений и деформаций в материале с большим числом разнородных фаз недостаточно точны, так как обычно используют приближенные модели. Низкой точностью применительно к пространственным многосвязным задачам с большим числом компонент связности отличаются и стандартные численные методы (метод конечных элементов, метод граничных элементов и др.). В связи с этим актуальной задачей для высокотехнологических областей промышленности, в частности, авиации и ракетостроения, является задача точного определения напряженно-деформированного состояния многокомпонентных материалов.

В настоящее время предлагаются разные модели напряженно-деформированного состояния пористых и композиционных материалов.

В монографии [1] разработаны методы микромеханики композиционных сред с дискретной структурой и трещинами и некоторые их приложения к конкретным материалам. Рассмотрено влияние свойств компонентов и вида структуры неоднородных сред на их эффективные (интегральные) параметры и распределение внутренних полей. Напряженно-деформированное состояние композита моделируется распределением напряжений в окрестности нескольких включений (плоская задача) или одного включения в случае зернистого композита.

В статье [2] предложена структурная модель зернистого эластомерного композита, позволившая связать его деформационное и прочностное поведение с размерами частиц дисперсной фазы, т.е. учесть масштабный фактор прочности. На основе теоретических исследований напряженно-деформированного состояния вокруг двух жестких сферических включений в упругой несжимаемой матрице установлены зависимости математического ожидания разрывного усилия от физико-механических характеристик связующего, размеров частиц и расстояния между ними. В результате предложен новый вероятностный критерий появления микроразрушения в композитной структуре в виде отслоений матрицы от частиц. С его помощью проведены модельные исследова-

ния процессов развития внутренней поврежденности в композитной системе в зависимости степени наполнения и величины включений. Построены соответствующие кривые растяжения, определены предельные разрывные макронапряжения и макродеформации.

В работе [3] предлагается алгоритм оценки свойств волокнистого композита при растяжении, основанный на процедуре В. З. Власова; дается оценка эффективных свойств эквивалентного гомогенного материала; приводится сравнение результатов расчета эффективного модуля Юнга с результатами других авторов.

В работе [4] обобщены базовые подходы, применяемые в математических моделях, и общие методы решения уравнений механики стохастических композитов. Они могут быть сведены к стохастическим уравнениям теории упругости структурно-неоднородного тела, к уравнениям теории эффективных упругих модулей, к уравнениям теории упругих смесей или к более общим уравнениям четвертого порядка. Решение стохастических уравнений теории упругости для произвольной области вызывает значительные математические трудности и может быть реализовано только приближенно. Построение уравнений теории эффективных упругих модулей связано с задачей определения интегральных модулей стохастически неоднородной среды, которая может быть решена методом возмущений, методом моментов или методом условных моментов. Однако, т.к. уравнения состояния не были строго обоснованы, эта теория не может использоваться для систематического моделирования композитных структур.

В статье [5] для прогнозирования прочностных свойств композитов рассматривается постановка нелинейных связанных краевых задач микромеханики композитов, учитывающих стадию структурного накопления микроповреждений, когда поля структурных микроповреждений являются локально-эргодическими. В целях описания структурного разрушения и прогнозирования прочностных свойств композитов существенно расширяется база определяющих соотношений: вводится новый материальный носитель – тензор повреждаемости четвертого ранга. Построены новые функционалы связанной стохастической краевой задачи, позволяющие наряду с прогнозированием упругих свойств строить расчетные поверхности прочности реальных композитов.

В статьях [6–8] методами теории аналитических функций решаются некоторые осесимметричные задачи теории упругости для системы сферических и сфероидальных полостей и включений.

В работе [9, 10] методом обобщенных аналитических функций построены решения осесимметричных задач для шара со сферической полостью и пространства с двумя сферическими полостями.

В работе [11] методами теории гармонических функций исследовано напряженное состояние в упругом пространстве с двумя осесимметрично расположенными сферическими включениями.

В работах [12–14] обобщенным методом Фурье исследуются распределения напряжений в окрестности сфероидальных полостей и включений в случае их осесимметричного расположения.

В данной работе приведено решение задачи об одноосном и двuosном растяжении упругого пространства с четырьмя сферическими полостями. Полученные результаты могут быть применены при моделировании напряженно-деформированного состояния пористого материала со сферическими порами.

Постановка задачи

Рассматривается упругое пространство Ω с четырьмя непересекающимися сферическими полостями Ω_j ($j = 1 \div 4$), центры которых расположены в вершинах квадрата со стороной a , как показано на рис. 1. Будем использовать одинаково ориентированные цилиндрические (ρ_j, φ_j, z_j) и сферические системы координат $(r_j, \theta_j, \varphi_j)$, начала которых отнесены к центрам пор O_j .

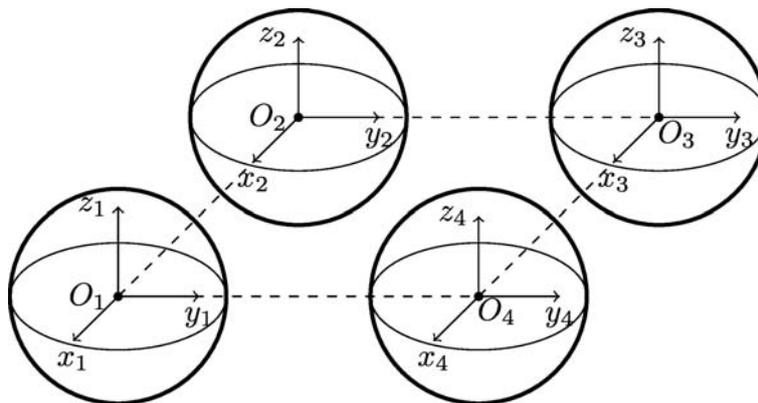


Рисунок 1 — Схематическое представление задачи

Будем считать, что на бесконечности приложены постоянные растягивающие усилия $\sigma_z^\infty = T$, $\tau_{\rho z}^\infty = \tau_{\varphi z}^\infty = 0$ (одноосное растяжение) или $\sigma_\rho^\infty = T$, $\tau_{\rho\varphi}^\infty = \tau_{\rho z}^\infty = 0$ (двухосное растяжение), а границы полостей свободны от усилий.

Уравнения поверхностей полостей Γ_j в сферических координатах имеют вид $r_j = R_j$.

Для определения напряженно-деформированного состояния в рассматриваемом теле необходимо решить краевую задачу для уравнения Ламе

$$\Delta \mathbf{U} + \frac{1}{1-2\sigma} \nabla \operatorname{div} \mathbf{U} = 0 \quad (1)$$

с граничными условиями

$$\mathbf{F}\mathbf{U}|_{\Gamma_j} = 0 \quad (2)$$

и указанными выше условиями на бесконечности. Здесь \mathbf{U} — вектор перемещений; $\mathbf{F}\mathbf{U}$ — отвечающий \mathbf{U} вектор усилий на соответствующей граничной поверхности; σ — коэффициент Пуассона.

Решение задачи

Решение задачи в области $\Omega / \bigcup_j \Omega_j$ ищется в виде

$$\mathbf{U} = \tilde{\mathbf{U}} + \mathbf{U}_0; \quad (3)$$

$$\tilde{\mathbf{U}} = \sum_{j=1}^4 \sum_{s=1}^3 \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=-n-1}^{n+1} A_{s,n,m}^{(j)} \mathbf{U}_{s,n,m}^{+(4)}(r_j, \theta_j, \varphi_j), \quad (4)$$

где $A_{s,n,m}^{(j)}$ — неизвестные коэффициенты, которые определяются из граничных условий. Перемещение \mathbf{U}_0 соответствует напряженно-деформированному состоянию на бесконечности (для одноосного и двухосного растяжения упругого пространства):

$$\mathbf{U}_0 = -\frac{1}{2} \frac{T\sigma\rho}{G(\sigma+1)} \mathbf{e}_\rho + \frac{1}{2} \frac{Tz}{G(\sigma+1)} \mathbf{e}_z; \quad (5)$$

$$\mathbf{U}_0 = -\frac{1}{2} \frac{T(\sigma-1)\rho}{G(\sigma+1)} \mathbf{e}_\rho - \frac{1}{2} \frac{T\sigma z}{G(\sigma+1)} \mathbf{e}_z, \quad (6)$$

где T — усилие на бесконечности; G — модуль сдвига; $(\mathbf{e}_\rho, \mathbf{e}_\varphi, \mathbf{e}_z)$ — орты цилиндрической системы координат.

Введем следующий набор линейно независимых частных решений уравнения Ламе для шара [4]:

$$\mathbf{U}_{1,n,m}^{\pm(4)}(r_j, \theta_j, \varphi_j) = \nabla u_{n\mp 1,m}^{\pm(4)}(r_j, \theta_j, \varphi_j); \quad (7)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{U}_{2,n,m}^{\pm(4)}(r_j, \theta_j, \varphi_j) = & \left[z_j \nabla + (4\sigma - 3) \mathbf{e}_z \right] u_{n,m}^{\pm(4)}(r_j, \theta_j, \varphi_j) - \\ & - \frac{R_j^2}{2(n\pm 1) + 1} \nabla u_{n\pm 1,m}^{\pm(4)}(r_j, \theta_j, \varphi_j); \end{aligned} \quad (8)$$

$$\mathbf{U}_{3,n,m}^{\pm(4)}(r_j, \theta_j, \varphi_j) = \operatorname{rot} \left[u_{n\mp 1,m}^{\pm(4)}(r_j, \theta_j, \varphi_j) \mathbf{e}_z \right]; \quad (9)$$

$$u_{n,m}^{+(4)}(r, \theta, \varphi) = (n-m)! \frac{1}{r^{n+1}} P_n^m(\cos \theta) e^{im\varphi};$$

$$u_{n,m}^{-(4)}(r, \theta, \varphi) = \frac{1}{(n+m)!} r^n P_n^m(\cos \theta) e^{im\varphi},$$

где $P_n^m(\cos \theta)$ - функция Лежандра 1-го рода, символам «+» («-») в вектор-функциях (7) – (9) отвечают внешние (внутренние) решения для шара.

Вектор напряжений на площадке с нормалью \mathbf{n} имеет вид

$$\mathbf{FU} = 2G \left[\frac{\sigma}{1-2\sigma} \mathbf{n} \operatorname{div} \mathbf{U} + (\mathbf{n} \cdot \nabla) \mathbf{U} + \frac{1}{2} (\mathbf{n} \times \operatorname{rot} \mathbf{U}) \right]. \quad (10)$$

Применив к формулам (10) – (12) оператор (13), на площадке с нормалью $\mathbf{n} = \mathbf{e}_{r_j}$ получим

$$\begin{aligned} \mathbf{FU}_{1,n,m}^{+(4)}(r_j, \theta_j, \varphi_j) = & -\frac{2G}{r_j} (n+1) \left[-u_{n,m-1}^{+(4)}(r_j, \theta_j, \varphi_j) \mathbf{e}_{-1} + \right. \\ & \left. + u_{n,m+1}^{+(4)}(r_j, \theta_j, \varphi_j) \mathbf{e}_1 - u_{n,m}^{+(4)}(r_j, \theta_j, \varphi_j) \mathbf{e}_0 \right], \end{aligned} \quad (11)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{FU}_{2,n,m}^{+(4)}(r_j, \theta_j, \varphi_j) = & \frac{2G}{r_j} \left\{ (n+m) \left[\frac{(n+3)(n-m+2)}{2n+3} - 2\sigma \right] \times \right. \\ & \times u_{n,m-1}^{+(4)}(r_j, \theta_j, \varphi_j) \mathbf{e}_{-1} - \\ & - (n-m) \left[\frac{(n+3)(n+m+2)}{2n+3} - 2\sigma \right] u_{n,m+1}^{+(4)}(r_j, \theta_j, \varphi_j) \mathbf{e}_1 + \\ & + \left[\frac{(n+3)(n-m+1)(n+m+1)}{2n+3} - (n+1)(2\sigma-1) \right] \times \\ & \left. \times u_{n,m}^{+(4)}(r_j, \theta_j, \varphi_j) \mathbf{e}_0 \right\}, \end{aligned} \quad (12)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{FU}_{3,n,m}^{+(4)}(r_j, \theta_j, \varphi_j) = & -\frac{2G}{r_j} \left[(n-m+2) u_{n,m-1}^{+(4)}(r_j, \theta_j, \varphi_j) \mathbf{e}_{-1} + \right. \\ & \left. + (n+m+2) u_{n,m+1}^{+(4)}(r_j, \theta_j, \varphi_j) \mathbf{e}_1 - m u_{n,m}^{+(4)}(r_j, \theta_j, \varphi_j) \mathbf{e}_0 \right], \end{aligned} \quad (13)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{FU}_{1,n,m}^{-(4)}(r_j, \theta_j, \varphi_j) = & \frac{2G}{r_j} n \left[-u_{n,m-1}^{-(4)}(r_j, \theta_j, \varphi_j) \mathbf{e}_{-1} + u_{n,m+1}^{-(4)}(r_j, \theta_j, \varphi_j) \mathbf{e}_1 + \right. \\ & \left. + u_{n,m}^{-(4)}(r_j, \theta_j, \varphi_j) \mathbf{e}_0 \right], \end{aligned} \quad (14)$$

$$\mathbf{FU}_{2,n,m}^{-(4)}(r_j, \theta_j, \varphi_j) = \frac{2G}{r_j} \left\{ -(n-m+1) \left[\frac{(n-2)(n+m-1)}{2n-1} + 2\sigma \right] \times \right.$$

$$\begin{aligned} & \times u_{n,m-1}^{-(4)}(r_j, \theta_j, \varphi_j) \mathbf{e}_{-1} + (n+m+1) \left[\frac{(n-2)(n-m-1)}{2n-1} + 2\sigma \right] \times \\ & \quad \times u_{n,m+1}^{+(4)}(r_j, \theta_j, \varphi_j) \mathbf{e}_1 + \\ & + \left[\frac{(n-2)(n-m)(n+m)}{2n-1} + n(2\sigma-1) \right] u_{n,m}^{-(4)}(r_j, \theta_j, \varphi_j) \mathbf{e}_0 \Big\}, \quad (15) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mathbf{F}U_{3,n,m}^{-(4)}(r_j, \theta_j, \varphi_j) &= \frac{2G}{r_j} \left[(n+m-1)u_{n,m-1}^{-(4)}(r_j, \theta_j, \varphi_j) \mathbf{e}_{-1} + \right. \\ & \left. + (n-m-1)u_{n,m+1}^{-(4)}(r_j, \theta_j, \varphi_j) \mathbf{e}_1 - mu_{n,m}^{-(4)}(r_j, \theta_j, \varphi_j) \mathbf{e}_0 \right]. \quad (16) \end{aligned}$$

Базис $(\mathbf{e}_{-1}, \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_0)$ связан с ортами цилиндрической системы координат следующим образом:

$$\mathbf{e}_{-1} = \frac{1}{2}(\mathbf{e}_\rho + i\mathbf{e}_\varphi) e^{i\varphi}; \quad \mathbf{e}_1 = \frac{1}{2}(\mathbf{e}_\rho - i\mathbf{e}_\varphi) e^{-i\varphi}; \quad \mathbf{e}_0 = \mathbf{e}_z. \quad (17)$$

Теоремы сложения связывают базисные решения уравнения Ламе в системах координат, совмещенных с центрами пары сферических включений. Справедливы следующие теоремы сложения [15]:

$$\begin{aligned} \mathbf{U}_{s,n,m}^{+(4)}(r_j, \theta_j, \varphi_j) &= \sum_{t=1}^3 \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{l=-k-1}^{l=k+1} (-1)^{k+l} \left\{ (-1)^s \delta_{st} \mathbf{f}_{n,m}^{(44)k,l,j,\alpha} + \delta_{s2} \delta_{t1} \times \right. \\ & \times \left[\left(\frac{R_\alpha^2}{2k+3} + \frac{R_j^2}{2n+3} \right) \mathbf{f}_{n,m}^{(44)k+2,l,j,\alpha} - z_{j\alpha} \mathbf{f}_{n,m}^{(44)k+1,l,j,\alpha} \right] \Big\} \mathbf{U}_{t,k,l}^{-(4)}(r_\alpha, \theta_\alpha, \varphi_\alpha); \quad (18) \end{aligned}$$

$$\mathbf{f}_{n,m}^{(44)k,l,j,\alpha} = u_{n+k,m-l}^{+(4)}(r_{j\alpha}, \theta_{j\alpha}, \varphi_{j\alpha}),$$

где $s = 1 \div 3$, $(r_{j\alpha}, \theta_{j\alpha}, \varphi_{j\alpha})$ – сферические координаты точки O_α в системе координат с началом O_j .

Разрешающая система уравнений

Относительно перемещения $\tilde{\mathbf{U}}$ получаем краевую задачу для уравнения (1) с граничными условиями $\mathbf{F}\tilde{\mathbf{U}}|_{\Gamma_i} = -\mathbf{F}\mathbf{U}_0|_{\Gamma_i}$.

Используя теоремы сложения (18), представим вектор перемещения $\tilde{\mathbf{U}}$ в системе координат с началом в точке O_j :

$$\tilde{\mathbf{U}} = \sum_{s=1}^3 \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=-n-1}^{n+1} \left\{ A_{s,n,m}^{(j)} \mathbf{U}_{s,n,m}^{+(4)}(r_j, \theta_j, \varphi_j) + (-1)^{n+m} \mathbf{U}_{s,n,m}^{-(4)}(r_j, \theta_j, \varphi_j) \right\} \times$$

$$\begin{aligned} & \times \sum_{\alpha \neq j} \sum_{t=1}^3 \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{l=-k-1}^{k+1} A_{t,k,l}^{(\alpha)} \left\{ (-1)^t \delta_{st} f_{k,l}^{(44)n,m,\alpha,j} + \delta_{t2} \delta_{s1} \times \right. \\ & \left. \times \left[\left(\frac{R_j^2}{2n+3} + \frac{R_\alpha^2}{2k+3} \right) f_{k,l}^{(44)n+2,m,\alpha,j} - z_{\alpha j} f_{k,l}^{(44)n+1,m,\alpha,j} \right] \right\}. \quad (19) \end{aligned}$$

Применив оператор (10) к формулам (5), (6), на площадке с нормалью $\mathbf{n} = \mathbf{e}_{r_j}$ для одноосного и двухосного растяжения получим соответственно

$$\begin{aligned} \mathbf{F}U_0 &= TP_1(\cos \theta_j) \mathbf{e}_z; \\ \mathbf{F}U_0 &= -TP_1^{(1)}(\cos \theta_j) \mathbf{e}_{\rho_j}. \end{aligned}$$

После удовлетворения граничным условиям задача сводится к бесконечной системе линейных алгебраических уравнений относительно неизвестных коэффициентов $A_{s,n,m}^{(j)}$:

$$\begin{aligned} & \sum_{s=1}^3 \left\{ A_{s,n,m}^{(j)} F_{s,n,m}^{+(r)}(R_j) + (-1)^{n+m} F_{s,n,m}^{-(r)}(R_j) \times \right. \\ & \times \sum_{\alpha \neq j} \sum_{t=1}^3 \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{l=-k-1}^{k+1} A_{t,k,l}^{(\alpha)} \left\{ (-1)^t \delta_{st} f_{k,l}^{(44)n,m,\alpha,j} + \delta_{t2} \delta_{s1} \times \right. \\ & \left. \left. \times \left[\left(\frac{R_j^2}{2n+3} + \frac{R_\alpha^2}{2k+3} \right) f_{k,l}^{(44)n+2,m,\alpha,j} - z_{\alpha j} f_{k,l}^{(44)n+1,m,\alpha,j} \right] \right\} \right\} = F_{n,m}^{(r)} \quad (19) \\ & r = -1, 0, 1; \quad n = 0, 1, 2, \dots; \quad m = -n - 1 \div n + 1, \end{aligned}$$

где $F_{n,m}^{(r)} = -T \delta_{n1} \delta_{m0} \delta_{r0}$ (для одноосного растяжения) и $F_{n,m}^{(r)} = T \delta_{n1} \delta_{m0} (\delta_{r1} - 2\delta_{r,-1})$ (для двухосного растяжения).

$$\begin{aligned} F_{1,n,m}^{+(-1)}(R) &= 2G \frac{(n+1)(n-m+1)!}{R^{n+2}}, \\ F_{1,n,m}^{+(1)}(R) &= -2G \frac{(n+1)(n-m-1)!}{R^{n+2}}; \\ F_{1,n,m}^{+(0)}(R) &= 2G \frac{(n+1)(n-m)!}{R^{n+2}}, \quad F_{3,n,m}^{+(-1)}(R) = -\frac{G}{R^{n+2}} (n-m+2)!; \\ F_{2,n,m}^{+(-1)}(R) &= \frac{2G}{R^{n+2}} (n+m) \left[\frac{(n+3)(n-m+2)}{2n+3} - 2\sigma \right] (n-m+1)!; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
F_{2,n,m}^{+(0)}(R) &= \frac{2G}{R^{n+2}}(n-m)! \times \\
&\times \left[\frac{(n-m+1)(n+m+1)(n+3)}{2n+3} - (n+1)(2\sigma-1) \right]; \\
F_{2,n,m}^{+(1)}(R) &= -\frac{2G}{R^{n+2}}(n-m) \left[\frac{(n+3)(n+m+2)}{2n+3} - 2\sigma \right] (n-m-1)!; \\
F_{3,n,m}^{+(1)}(R) &= -\frac{G}{R^{n+2}}(n+m+2)(n-m-1)!; \\
F_{3,n,m}^{+(-1)}(R) &= \frac{G}{R^{n+2}}m(n-m)!, \quad F_{1,n,m}^{+(-1)}(R) = -2GR^{n-1} \frac{n}{(n+m-1)!}; \\
F_{1,n,m}^{-(1)}(R) &= 2GR^{n-1} \frac{n}{(n+m+1)!}, \quad F_{1,n,m}^{-(0)}(R) = 2GR^{n-1} \frac{n}{(n+m)!}; \\
F_{2,n,m}^{(-1)}(R) &= -2GR^{n-1} \left[\frac{(n-2)(n+m-1)}{2n+1} + 2\sigma \right] \frac{n-m+1}{(n+m-1)!}; \\
F_{2,n,m}^{-(1)}(R) &= 2GR^{n-1} \left[\frac{(n-2)(n-m-1)}{2n-1} + 2\sigma \right] \frac{1}{(n+m)!}; \\
F_{2,n,m}^{-(0)}(R) &= 2GR^{n-1} \left[\frac{(n+m)(n-m)(n-2)}{2n-1} + n(2\sigma-1) \right] \frac{1}{(n+m)!}; \\
F_{3,n,m}^{(-1)}(R) &= GR^{n-1} \frac{1}{(n+m-2)!}, \quad F_{3,n,m}^{-(1)}(R) = GR^{n-1} \frac{n-m-1}{(n+m+1)!}; \\
F_{3,n,m}^{-(0)}(R) &= -GR^{n-1} \frac{m}{(n+m)!}.
\end{aligned}$$

Оператор системы уравнений (19) является фредгольмовым при условии непересечения граничных поверхностей [16].

Анализ результатов

Численный анализ решения задачи проведен для одинаковых сферических полостей, коэффициент Пуассона материала упругого пространства $\sigma = 0.38$. Под относительным показателем близости полостей понимаем величину a/R . Система уравнений решена методом редукции. Анализ сходимости метода редукции показал, что высокая точность достигается уже при $N = 6$.

На рис. 2 – 4 приведены графики относительных напряжений σ_x/T , σ_y/T и σ_z/T на линии O_1O_4 в зависимости от относительного расстояния между полостями при одноосном и двуосном растяже-

нии упругого пространства. При двух типах растяжения наименьшее значение напряжений σ_x / T достигаются при наиболее приближенных полостях. Для напряжений σ_y / T наблюдается обратная картина. Напряжения σ_z / T в обоих случаях имеют области концентрации в окрестности границ полостей. При этом в случае одноосного растяжения напряжения растягивающие, а двуосного — сжимающие.

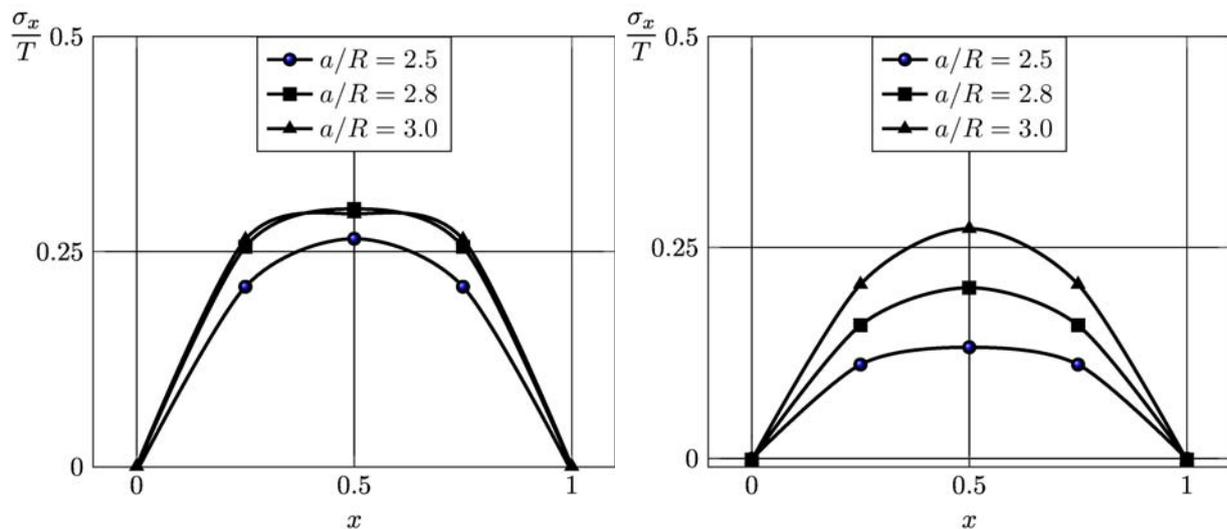


Рисунок 2 — Напряжения σ_x / T на линии O_1O_4 в зависимости от относительного расстояния между полостями при одноосном и двуосном растяжении упругого пространства

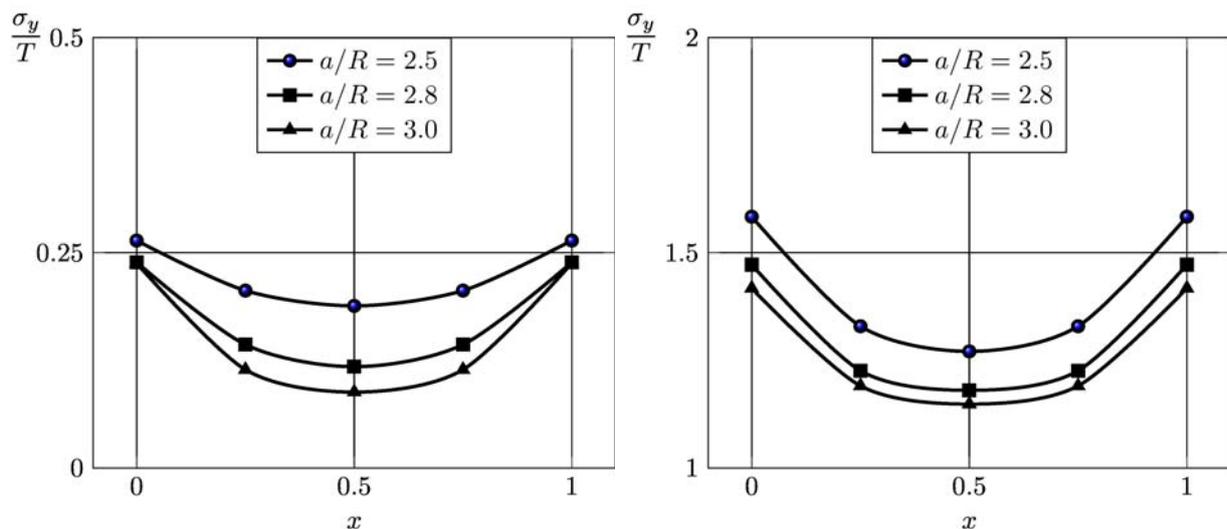


Рисунок 3 — Напряжения σ_y / T на линии O_1O_4 в зависимости от относительного расстояния между полостями при одноосном и двуосном растяжении упругого пространства

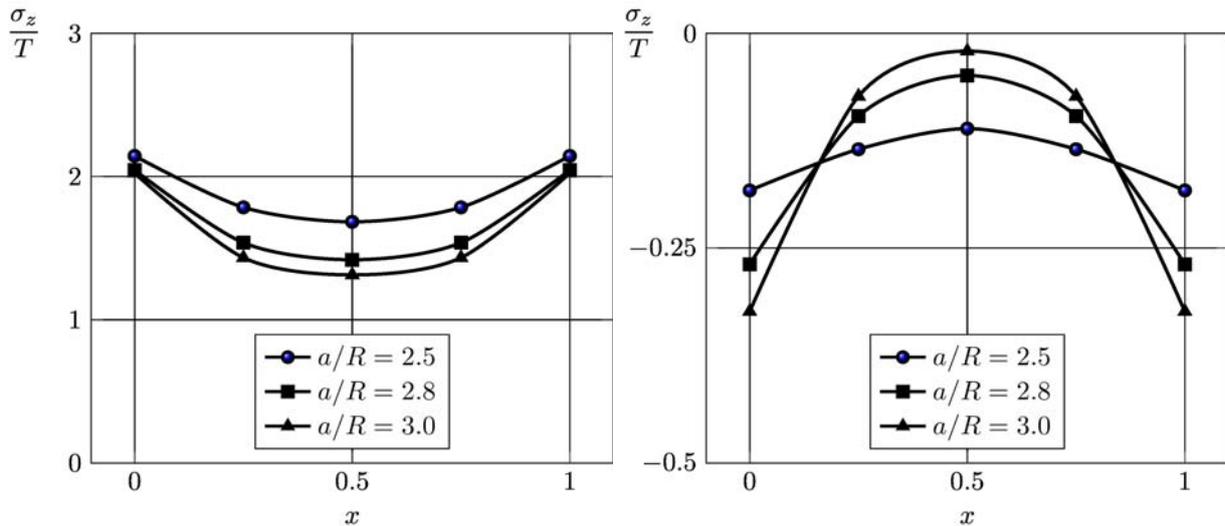


Рисунок 4 – Напряжения σ_z / T на линии O_1O_4 в зависимости от относительного расстояния между полостями при одноосном и двуосном растяжении упругого пространства

Выводы

В работе исследована задача о распределении напряжений в упругом пространстве с неосесимметрично расположенными сферическими полостями. Обобщенным методом Фурье задача сведена к бесконечной системе линейных алгебраических уравнений с экспоненциально убывающими матричными коэффициентами. Это позволяет применять при численном решении системы метод редукции.

Приведенные в работе результаты позволяют сделать вывод о высокой эффективности предложенной методики. Важно отметить, что эффективность сохраняется даже для случая большого числа граничных поверхностей в теле.

Разработанная в настоящей статье модель напряженно-деформированного состояния пористого материала со сферическими порами может использоваться для определения его интегральных упругих модулей. Модель допускает обобщение на случай регулярной периодической структуры пор в материале.

Список использованных источников

1. Ванин, Г. А. Микромеханика композиционных материалов [Текст] / Г.А. Ванин. – К.: Наук. думка. – 1985. – 304 с.
2. Гаришин, О. К. Прогнозирование прочности эластомерных зернистых композитов в зависимости от размеров частиц наполнителя [Текст] / О. К. Гаришин, Л. А. Комар // Механика композиционных материалов и конструкций. – 2003. – Т. 9, № 3. – С. 278–286.

3. Гордеев, А. В. Моделирование свойств композиционного материала, армированного короткими волокнами [Текст] / А. В. Гордеев // *Механика композиционных материалов и конструкций*. - М.: ИПМ РАН. - Т. 16, № 1. — 2010. — С. 106-116.
4. Khoroshun, L. P. Mathematical models and methods of the mechanics of stochastic composites / L. P. Khoroshun // *International Applied Mechanics*. — 2000. — V. 36, No 10.— P. 1284–1316.
5. Макарова, Е. Ю. Нелинейные многоуровневые модели механики деформирования и разрушения композитов [Текст] / Е. Ю. Макарова, Ю. В. Соколкин // *Механика композиционных материалов и конструкций*. — 2013. — Т. 19, № 3. — С. 395 – 405.
6. Вольперт, В. С. Осесимметричное напряжённое состояние пространства, содержащего систему сферических полостей или включений [Текст] / В. С. Вольперт, И. П. Олегин // *Новосиб. ин-т инж. ж.-д. транспорта*. — 1977. — 19 с. — Деп. в ВИНТИ. №3266–77.
7. Олегин, И. П. Осесимметричное напряженное состояние в трансверсально-изотропной упругой среде с двумя жесткими эллипсоидальными включениями [Текст] / И. П. Олегин // *Сибирский журнал индустриальной математики*. — 2002. — Т. V, № 1(9). — С. 127–132.
8. Олегин, И. П. Решение пространственной задачи теории упругости для трансверсально-изотропного тела, содержащего периодическую систему эллипсоидальных полостей [Текст] / И. П. Олегин // *Сибирский журнал индустриальной математики*. — 1999. — Т. II, № 1. — С. 117–122.
9. Капшивый, А. А. Осесимметричное напряженное состояние шара с неконцентрической шаровой полостью [Текст] / А. А. Капшивый, Н. П. Копыстра, Л. Н. Ломонос // *Докл. АН УССР. Сер. А*. — 1980. — №9. — С. 50–55.
10. Ломонос Л.Н. Первая основная задача об осесимметричном напряженном состоянии пространства с двумя сферическими полостями / Л.Н. Ломонос // *Мат. физика и нелинейная механика*. — 1990. - № 13. — С. 51 – 56.
11. Tsuchida, E. On the asyymmetric problem of the theory for an infinite elastic solid containing two spherical inclusions / E. Tsuchida, I. Nakahara, M. Kodama // *Bull. JSME*. — 1980. — V. 23, No 181. — P. 1072–1080.
12. Николаев, А. Г. Математическая модель напряженно-деформированного состояния пористого материала [Текст] / А. Г. Николаев, Е. А. Танчик // *Вопросы проектирования и производства конструкций летательных аппаратов: сб. науч. тр. Нац. аэрокосм. ун-та им. Н. Е. Жуковского «ХАИ»*. — 2009. — Т. 2 (58). — С. 48–58.
13. Николаев, А. Г. Развитие локальной модели напряженного состояния пористого материала [Текст] / А. Г. Николаев, Е. А. Танчик // *Авиационно-космическая техника и технология*. — 2013. — 1(98). — С. 14–18.

14. Николаев, А. Г. Локальная математическая модель зернистого композиционного материала [Текст] / А. Г. Николаев, Е. А. Танчик // Вестн. Харьк. нац. ун-та им. В. Н. Каразина. Сер. Математика, прикладная математика и механика. — 2010. — Т. 922. — С. 4—19.

15. Николаев, А. Г. Теоремы сложения решений уравнения Ламе. — Х.: Харьк. авиац. ин-т, 1993. — 109 с. — Деп. в ГНТБ Украины 21.06.93, № 1178 — Ук 93.

16. Николаев, А. Г. Обоснование обобщенного метода Фурье в основных краевых задачах теории упругости для некоторых пространственных канонических областей [Текст] / А. Г. Николаев // Доповіді НАН України. — 1998. — Т. 2. — С. 78—83.

Поступила в редакцию 20.05.2014.

*Рецензент: д-р техн. наук, проф. Я. С. Карпов,
Национальный аэрокосмический университет
им. Н.Е. Жуковского «ХАИ», г. Харьков.*