

СТАЦИОНАРНАЯ ЗАДАЧА ТЕПЛОПРОВОДНОСТИ В ТРЕХМЕРНОЙ ПОСТАНОВКЕ ДЛЯ МНОГОСЛОЙНЫХ ПЛАСТИН СЛОЖНОЙ ФОРМЫ

Анализ литературных источников показывает, что достаточно полно изучены вопросы теплопроводности многослойных пластин, имеющих каноническую форму в плане, на наружных поверхностях которых осуществляется конвективный теплообмен [1, 2]. Для пластин неканонической формы в основном применяются метод конечного элемента (МКЭ) и R-функции [3, 4]. Как правило, внутренние источники тепла в рассматриваемых объектах отсутствуют.

Поэтому развитие методов расчета температурных полей в многослойных пластинах, имеющих сложную форму в плане, при конвективном теплообмене на наружных поверхностях и наличии распределенных пленочных межслойных источников тепла представляет собой актуальную задачу.

В публикациях [5 – 7] подобные задачи решены на основе двумерной теории. В данной работе предлагается подход, в основе которого лежит трехмерная теория.

Рассматривается многослойная пластина, собранная из l слоев постоянной толщины h_i , отнесенная к декартовой системе координат, которая связана с наружной поверхностью первого слоя (рис. 1).

На координатной плоскости пластина занимает область Ω , ограниченную контуром $L: x_L = x(s), y_L = y(s)$. На внешних S_0, S_I и боковой $\left(S_L = \sum_{i=1}^l S_L^i \right)$ поверхностях пластины происходит конвективный теплообмен.

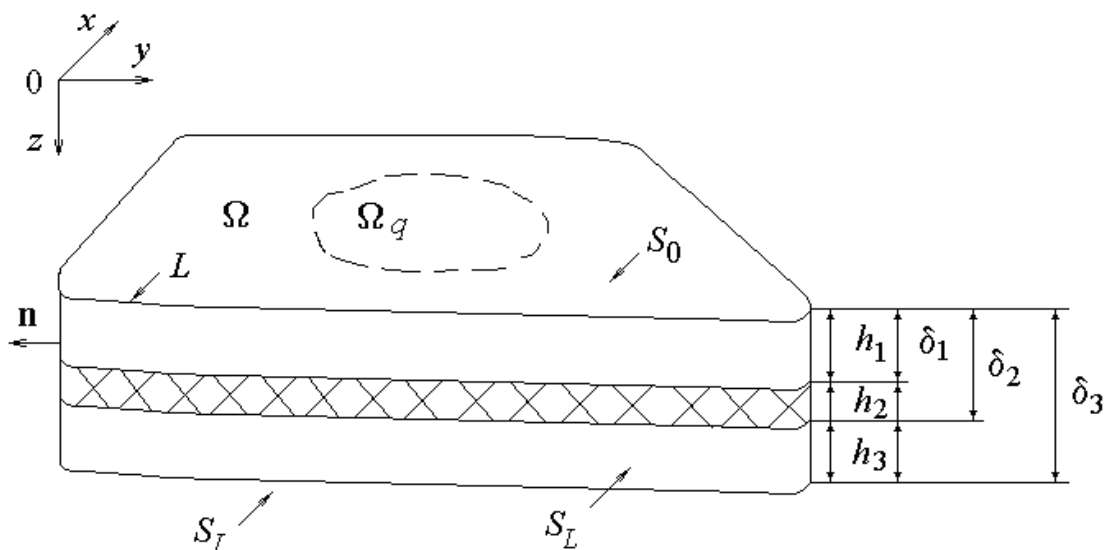


Рисунок 1 – Многослойная пластина

Распределение температуры в слоях пластины определяется:
– уравнением

$$\Delta T^i = -\frac{Q^i}{k_i}, \Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}, (x, y) \in \Omega, \delta_{i-1} \leq z \leq \delta_i, \quad (1)$$

где i – номер слоя ($i = \overline{1, I}$); $\delta_i = \sum_{j=1}^i h_j$, h_j – толщина j -го слоя; T^i – тем-

пература i -го слоя; Q^i – внутренний источник тепла i -го слоя; k_i – коэффициент теплопроводности материала i -го слоя;

– граничными условиями на боковой поверхности

$$\frac{\partial T^i}{\partial n} + \frac{H_L^i}{k_i} (T^i - T_L^i) = 0, (x, y, z) \in S_L^i, i = \overline{1, I}, \quad (2)$$

где T_L^i – температура на боковой поверхности i -го слоя; H_L^i – коэффициент конвективного теплообмена на боковой поверхности i -го слоя;

– условиями конвективного теплообмена на верхней и нижней поверхностях пластины

$$-\frac{\partial T^1}{\partial z} + \frac{H_1}{k_1} (T^1 - T_\infty^1) = 0, z = 0; \frac{\partial T^I}{\partial z} + \frac{H_I}{k_I} (T^I - T_\infty^I) = 0, z = \delta_I, \quad (3)$$

где T_∞^1 и T_∞^I – температура среды на границе с первым и I -м слоем; H_1 и H_I – коэффициенты конвективного теплообмена на наружной и внутренней поверхностях пакета соответственно.

Условия равенства потоков тепла и температур на границах контакта соседних слоев с учетом возможных тепловых воздействий на поверхностях слоев запишем как

$$k_i \frac{\partial T^i}{\partial z} + k_{i+1} \frac{\partial T^{i+1}}{\partial z} - q_i = 0, T^i = T^{i+1}, z = \delta_i, \quad (4)$$

$$\text{где } q_i = \begin{cases} q_i^0, & x_1 \leq x \leq x_2, y_1 \leq y \leq y_2, \\ 0, & 0 \leq x < x_1, x_2 < x \leq A, 0 \leq y < y_1, y_2 < y \leq B, \end{cases}$$

q_i^0 – тепловой поток, возникающий от действия пленочного источника тепла, расположенного на границе контакта соседних слоев.

Производные искомой функции по поперечной координате z , входящие в уравнения (1), а также условия (3) и (4), заменим их конечно-разностным представлением. Для этого используем симметричные разности [8]

$$\frac{\partial T_r^i}{\partial z} = \frac{T_{r+1}^i - T_{r-1}^i}{2\Delta_{h_i}}, \quad \frac{\partial^2 T_r^i}{\partial z^2} = \frac{T_{r+1}^i - 2T_r^i + T_{r-1}^i}{\Delta_{h_i}^2},$$

где $\Delta_{h_i} = \frac{h_i}{r_i}$ – шаг сетки; $r_i + 1$ – количество узлов в i -м слое; T_r^i – значение искомой функции в r -м узле i -го слоя.

В результате система уравнений (1) принимает вид

$$T_{r-1}^i - \left(2 + \Delta_{h_i}^2 \left(\frac{d^2}{x^2} + \frac{d^2}{y^2} \right) \right) T_r^i + T_{r+1}^i = - \frac{\Delta_{h_i}^2}{k_i} Q_r^i. \quad (5)$$

Условия конвективного теплообмена на верхней и нижней поверхностях пластины (3) и условия на границе контакта соседних слоев (4) имеет вид

$$-\left(\frac{T_1^1 - T_{-1}^1}{2\Delta_{h_1}} \right) + \frac{H_1}{k_1} (T_0^1 - T_\infty^1) = 0, \quad z = 0;$$

$$\left(\frac{T_{r_i+1}^I - T_{r_i-1}^I}{2\Delta_{h_i}} \right) + \frac{H_I}{k_I} (T_{r_i}^I - T_\infty^I) = 0, \quad z = \delta_I; \quad (6)$$

$$k_i \left(\frac{T_{r_i+1}^i - T_{r_i-1}^i}{2\Delta_{h_i}} \right) + k_{i+1} \left(\frac{T_1^{i+1} - T_{-1}^{i+1}}{2\Delta_{h_{i+1}}} \right) - q_i = 0, \quad T^i = T^{i+1}, \quad z = \delta_i. \quad (7)$$

Условия (6) и (7) позволяют исключить из системы (5) значения искомых функций в узловых точках с номерами $r = -1$ и $r = r_i + 1$ в i -м слое ($i = \overline{1, I}$), а также с номерами $r = 0$ (во всех слоях, кроме 1-го).

В результате получаем систему уравнений вида

$$[A]\mathbf{T} = \mathbf{B} + [C]\mathbf{Q}. \quad (8)$$

Для решения системы (8) применяют подход, аналогичный методу упругого погружения [9]. Исходная многослойная пластина произвольной формы в плане погружается во вспомогательную охватывающую многослойную пластину с той же композицией слоев. Форма охватывающей пластины выбирается таким образом, чтобы можно было получить простое аналитическое решение. В настоящей работе роль охватывающей пластины выполняет прямоугольная пластина с нулевыми условиями на контуре (рис. 2).

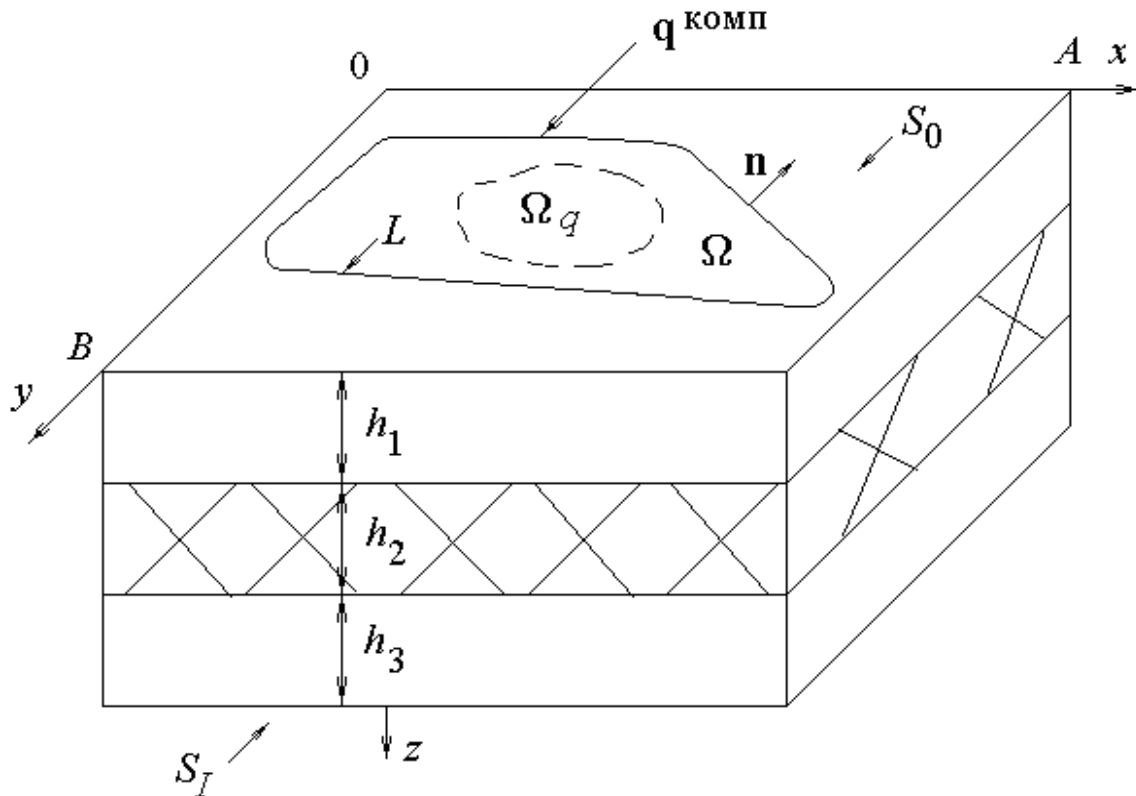


Рисунок 2 – Вспомогательная пластина

Условия конвективного теплообмена на верхней и нижней поверхностях вспомогательной пластины совпадают с условиями теплообмена на поверхностях исходной пластины. Чтобы обеспечить выполнение реальных граничных условий, к вспомогательной пластине в каждой узловой точке по толщине, вдоль следа границы L , прилагаются дополнительные компенсирующие источники $q_{ir}^{комп}(x, y)$, $(x, y) \in L$, которые входят в систему уравнений теплопроводности (8) в виде

$$q_r^i(x, y) = \int_0^{s^*} q_{ir}^{комп}(x_L, y_L) \delta(x - x_L, y - y_L) ds, \quad r = 0, 1, 2,$$

где $\delta(x - x_L, y - y_L)$ – двумерная δ -функция Дирака; s^* – длина контура L .

Удовлетворение граничным условиям на следе контура L приводит к системе интегральных уравнений для определения распределений компенсирующих источников

$$\mathbf{B}^L \mathbf{T} [q^{комп}(x, y)] = 0, \quad x, y \in L. \quad (9)$$

Далее $T_r^i(x, y)$ и $q_r^i(x, y)$ разлагаются в тригонометрические ряды по функциям, удовлетворяющим граничным условиям на границе охватывающей прямоугольной пластины,

$$T_r^i(x, y) = \sum_{m=1}^M \sum_{n=1}^N T_{mnr}^i \sin \frac{m\pi x}{A} \sin \frac{n\pi y}{B},$$

$$q_r^i(x, y) = \sum_{m=1}^M \sum_{n=1}^N q_{mnr}^i \sin \frac{m\pi x}{A} \sin \frac{n\pi y}{B},$$

где A и B – длины сторон охватывающей прямоугольной пластины.

Кроме того, функции T_r^i и q_r^i , входящие в граничные условия исходной пластины, разлагаются в ряд вдоль следа контура L [10-12]

$$T_r^i(s) = \sum_{\mu=0}^{\mu^*} \sum_{\alpha=1,2} T_{\alpha\mu r}^i d_{\alpha\mu}(s); \quad q_r^i(s) = \sum_{\mu=0}^{\mu^*} \sum_{\alpha=1,2} q_{\alpha\mu r}^i d_{\alpha\mu}(s),$$

где

$$d_{1\mu} = \sin[\mu\gamma(s)], \quad d_{2\mu} = \cos[\mu\gamma(s)]; \quad \gamma(s) = \frac{2\pi \int_0^s d\tilde{s}}{\int_0^{s^*} d\tilde{s}}, \quad 0 \leq \gamma(s) \leq 2\pi.$$

В результате преобразований система интегральных уравнений (9) сводится к системе линейных алгебраических уравнений относительно коэффициентов разложения в ряд функций компенсирующих источников $q_{\alpha\mu r}^i$.

Проведено сравнение результатов расчета на основе предлагаемого подхода с результатами, полученными в работе [1] с помощью метода конечных элементов и на основе двухмерной теории. В этой работе рассмотрена квадратная пластина.

Исходные данные: количество слоев $l = 5$; линейные размеры пластины $l_1 = l_2 = 0,9$ м; толщина слоев $h_1 = 0,005$ м, $h_2 = 0,003$ м, $h_3 = 0,015$ м, $h_4 = 0,002$ м, $h_5 = 0,020$ м.; коэффициенты теплопроводности материала слоев $k_i = 1,60$ Вт/(м·К) ($i = 1, 3, 5$); $k_i = 0,17$ Вт/(м·К) ($i = 2, 4$); коэффициенты конвективного теплообмена $H_1 = 80$ Вт/(м²·К), $H_l = 25$ Вт/(м²·К); температуры внешней среды $T_{\infty}^1 = 257$ К, $T_{\infty}^l = 293$ К.

На рис. 3 показано распределение температуры по толщине пяти-слойной пластины в средней точке.

Результаты расчета изображены сплошной линией, результаты, полученные методом конечных элементов – штриховой линией, на основе двухмерной теории – ромбами.

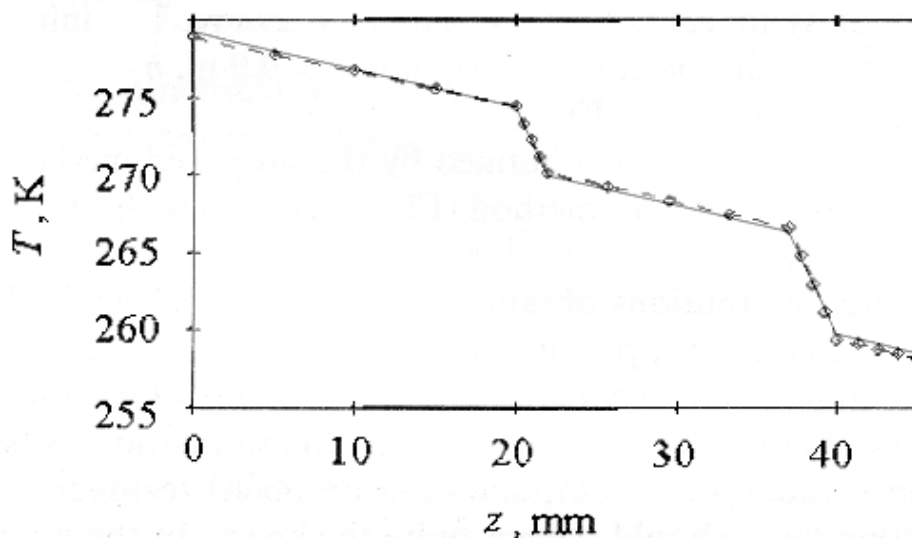


Рисунок 3 – Распределение температуры по толщине пятислойной пластины

Далее, рассмотрим тепловое состояние пятислойной пластины, расчетная схема которой приведена на рис. 4. Расположение источника тепла показано на рисунке штриховой линией.

Пластина имеет следующие геометрические и теплофизические характеристики: количество слоев $l = 5$; размеры, показанные на рис. 4, $l_1 = 0,95$ м, $l_2 = 0,55$ м, $l_3 = 0,89$ м, $l_4 = 0,46$ м, $R_1 = 0,15$ м, $R_2 = 0,15$ м, $R_3 = 0,17$ м, $R_4 = 0,16$ м; толщины слоев $h_1 = 0,005$ м, $h_2 = 0,003$ м, $h_3 = 0,01$ м, $h_4 = 0,002$ м, $h_5 = 0,012$ м; коэффициенты теплопроводности материала слоев $k_i = 1,61$ Вт/(м·°C) ($i = 1, 3, 5$); $k_i = 0,17$ Вт/(м·°C) ($i = 2, 4$); коэффициенты конвективного теплообмена $H_1 = 90$ Вт/(м²·°C), $H_5 = 40$ Вт/(м²·°C); температуры внешней среды: $T_{\infty}^1 = -20$ °C, $T_{\infty}^5 = 20$ °C.

Мощность пленочного источника тепла, расположенного между первым и вторым слоями: $q_1 = 4000$ Вт/м², а его размеры (см. рис. 4) – $a = 1$ м, $b = 0,6$ м.

На контуре исходной пластины $T_L^i = 0$.

Ниже, на рис. 4, показано распределение температур по толщине пластины в сечении А – А, обозначенном на расчетной схеме жирной штриховой линией.

На рис. 5–7 представлены температурные поля на наружных поверхностях пластины и границе контакта 1-го и 2-го слоев.

На наружной поверхности первого слоя (рис. 5) и поверхности, содержащей источник тепла (рис. 6), наблюдается резкое изменение температуры вблизи края области, занятой тепловыделяющей пленкой.

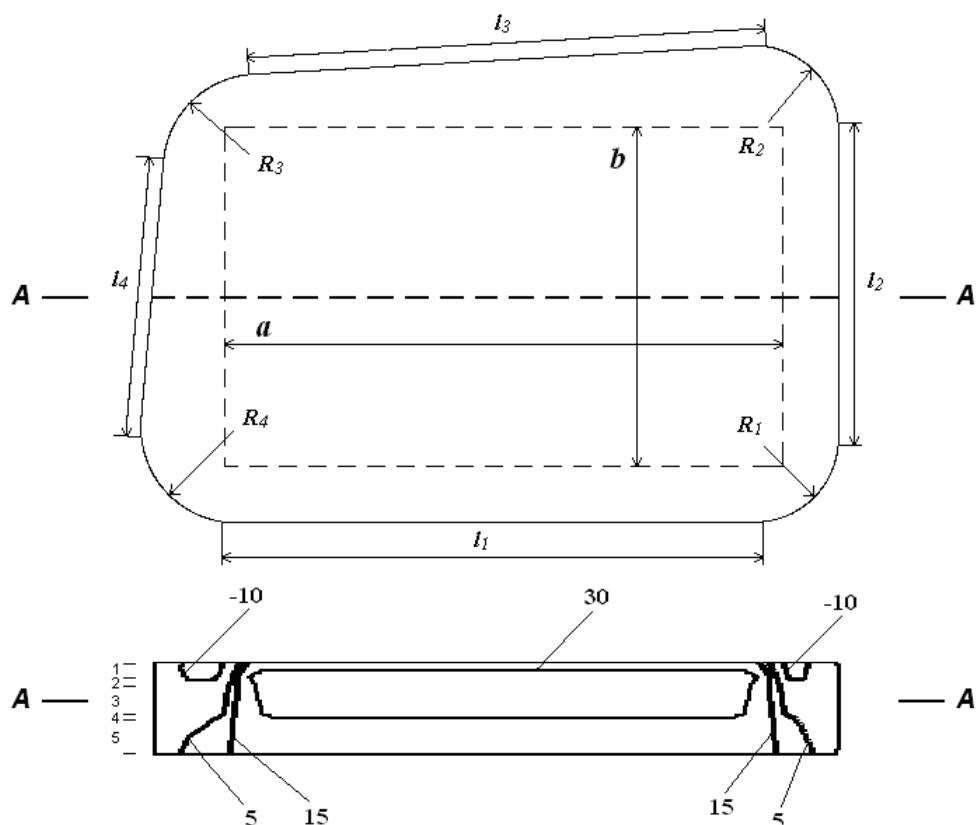


Рисунок 4 – Расчетная схема и распределение температуры по толщине пластины в сечении А – А

Такие перепады могут приводить к значительным температурным напряжениям в слоях пластины. На наружной поверхности пятого слоя (рис. 7) температура принимает только положительные значения.

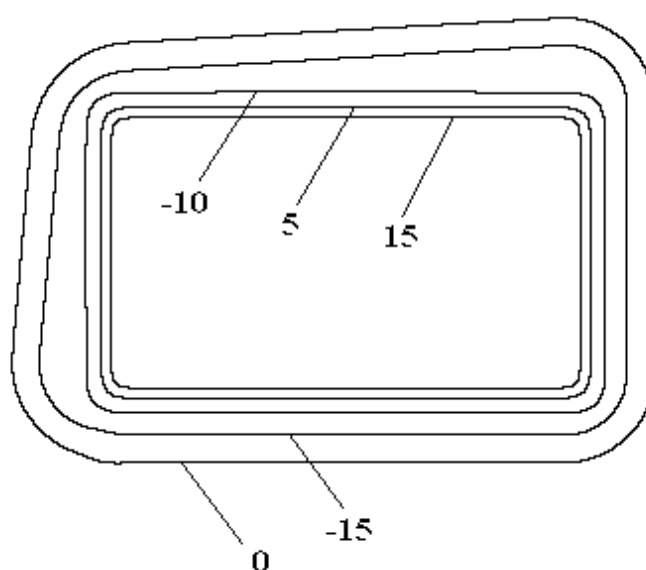


Рисунок 5 – Распределение температуры на поверхности S_1

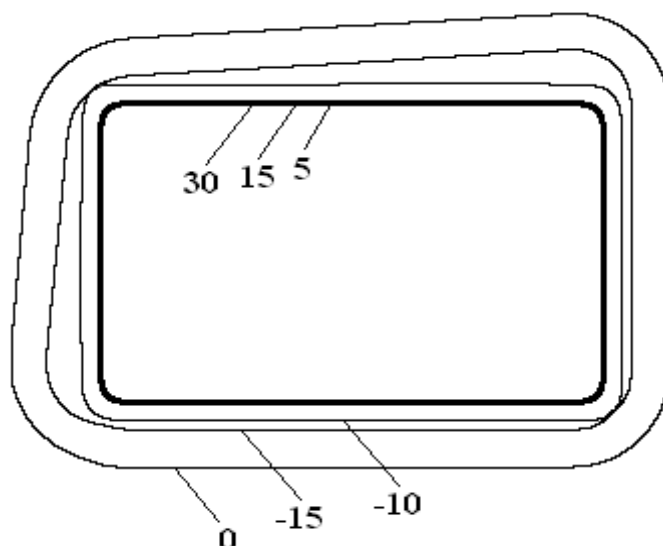


Рисунок 6 – Распределение температуры на поверхности S_2 (поверхность с источником тепла)

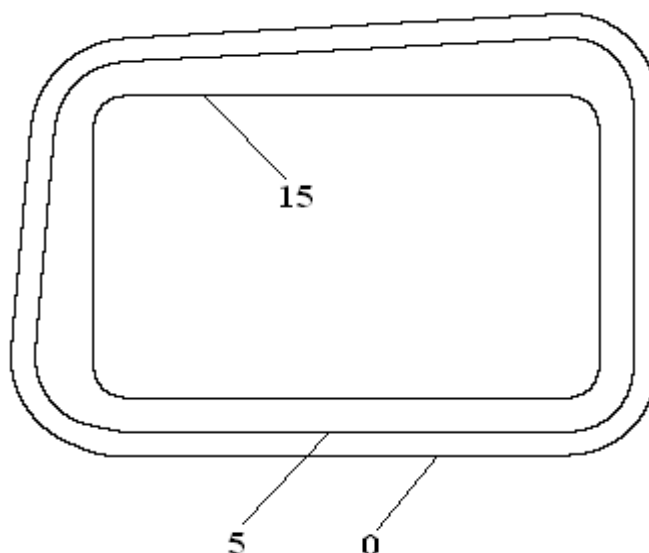


Рисунок 7 – Распределение температуры на поверхности S_5

Разработан метод решения задач стационарной теплопроводности в трехмерной постановке для многослойных пластин, позволяющий описать тепловое состояние пластин неканонической формы в плане.

Сравнение с результатами, приведенными в работе [1], подтверждает достоверность результатов, полученных на основе предлагаемого подхода, а расчеты, проведенные для пластины, изображенной на рис. 4, демонстрируют возможности метода.

Предложенный подход может быть применен при проектировании систем обогрева многослойного остекления различных транспортных средств.

Список использованных источников

1. Kantor, B.Ya. Analysis of non-stationary temperature fields in laminated strips and plates [Text] / B.Ya. Kantor, N.V. Smetankina, A.N. Shupikov // Int. J. Solids and Structures. – 2001. – Vol. 38. – P. 8673 – 8684.
2. Болотин, В.В. Механика многослойных конструкций [Текст] / Ю.Н. Новичков, В.В. Болотин. – М.: Машиностроение, 1980. – 375 с.
3. Сахаров, А.С. Метод конечных элементов в механике твердых тел [Текст] / А.С. Сахаров; под общ. ред. А.С. Сахарова и И. Альтенбаха. – К.: Вища шк., 1982. – 480 с.
4. Рвачев, В.Л. Расчет температурного поля кусочно-однородных тел сложной формы [Текст] / В.Л. Рвачев, А.П. Слесаренко, М.М. Литвин // Теплофизика и теплотехника. – 1977. – Вып. 32. – С. 18 – 22.
5. Сметанкіна, Н.В. Розрахунок температурних полів у багат шарових пластинах складної форми [Текст] / Н.В. Сметанкіна, Є.В. Свет // Машинознавство. – 2003. – № 4. – С. 8 – 12.
6. Сметанкина, Н.В. Задача стационарной теплопроводности многослойных пластин сложной формы в плане [Текст] / Н.В. Сметанкина, Е.В. Свет, А.Н. Шупиков // Пробл. машиностроения. – 2004. – Т. 7, № 3. – С. 25 – 31.
7. Smetankina, N.V. Nonstationary heat conduction in complex-shape laminated plates [Text] / N.V. Smetankina, A.N. Shupikov, Ye.V. Svet // Trans. ASME. J. of Heat Transfer. – March, 2007. – Vol. 129. – P. 335–341.
8. Бахвалов, Н.С. Численные методы [Текст] / Н.С. Бахвалов. – М.: Наука, 1975. – 632 с.
9. Нестационарные колебания многослойных пластин и оболочек и их оптимизация: науч. изд. [Текст] / А.Н. Шупиков, Я.П. Бузько, Н.В. Сметанкина, С.В. Угримов. – Х.: Изд. ХНЭУ, 2004. – 252 с.
10. Zielinski A.P. On curvilinear distribution expressed by double Fourier series [Text] / A.P. Zielinski // J. Appl. Math. and Phys. – 1980. – Vol. 31. – P. 717 – 729.
11. Zielinski A.P. Metoda trygonometrycznych szeregów określonych na konture w zastosowaniu do płyt o brzegu swobodnym i swobodnie podpartym [Text] / A.P. Zielinski // Rozpr. inż. – 1982. – Vol. 30, № 2. – P. 151–165.
12. Zielinski A.P. A contour series method applied to shells [Text] / A.P. Zielinski // Thin-Walled Struct. – 1985. – N 3. – P. 217 – 229.

Поступила в редакцию 02.09.2013.

*Рецензент: канд. техн. наук, проф. В.В. Кириченко,
Национальный аэрокосмический университет
им. Н.Е. Жуковского «ХАИ», г. Харьков.*