

ВПЛИВ КОЕФІЦІЄНТІВ ПУАССОНА ШАРІВ НА НАПРУЖЕНИЙ СТАН З'ЄДНАННЯ

Введення

У деяких випадках при розрахунках напруженого стану з'єднання необхідно враховувати деформації й переміщення в площині з'єднання, які зумовлені коефіцієнтами Пуассона деталей, що з'єднуються. Приклади таких конструкцій наведено роботах [1, 2]. Побудова аналітичного розв'язку задачі про двовимірний напружений стан з'єднання в загальній постановці вважається автором надзвичайно складною проблемою, оскільки навіть для одного шару розв'язок плоскої задачі теорії пружності має достатньо громіздкий вигляд [3]. У зв'язку із складністю проблеми для розв'язання поставленої задачі було запропоновано декілька наближених підходів. В основі яких лежить умова рівномірності прикладеного до сторін з'єднання навантаження. Авторами роботи [4] було запропоновано вважати дотичні напруження в шарах, що з'єднуються, постійними в межах з'єднання. Ця гіпотеза дозволяє проігнорувати похідними від дотичних напружень у рівняннях рівноваги й звести задачу до розв'язання системи двох диференціальних рівнянь у частинних похідних відносно нормальних напружень в одному шарі. Загальний розв'язок цієї системи в роботі [4] не отримано, а запропоновано спрощений підхід. Граничним випадком цієї методики є квазідвовимірна методика [5], яка полягає в послідовному розв'язку одномірних рівнянь рівноваги в поздовжньому й поперечному напрямках. У її основі лежить допущення про рівність нулю коефіцієнтів Пуассона несучих шарів у поперечному напрямку.

У роботі [6] розв'язок системи диференціальних рівнянь, які отримані у роботі [4], подано у вигляді подвійних рядів Фур'є. Ця методика також була застосована в роботах [7, 8] для розв'язання аналогічних задач. Необхідно зазначити, що методика розкладання в подвійний ряд Фур'є достатньо громіздка і вводиться у вказаних роботах без строгого математичного обґрунтування.

У даній роботі отримано строгий аналітичний розв'язок задачі (згідно з наближеною теорією), який побудовано за допомогою методу відокремлення змінних і який має вигляд ряду Фур'є за однією координатою.

1. Постановка задачі

Розглянемо дві склеєні прямокутні пластинки $D = \{(x, y) \in [0, a] \times [0, b]\}$, які мають товщину відповідно δ_1 і δ_2 , до бічних сторін яких прикладено нормальні зусилля (рис. 1).

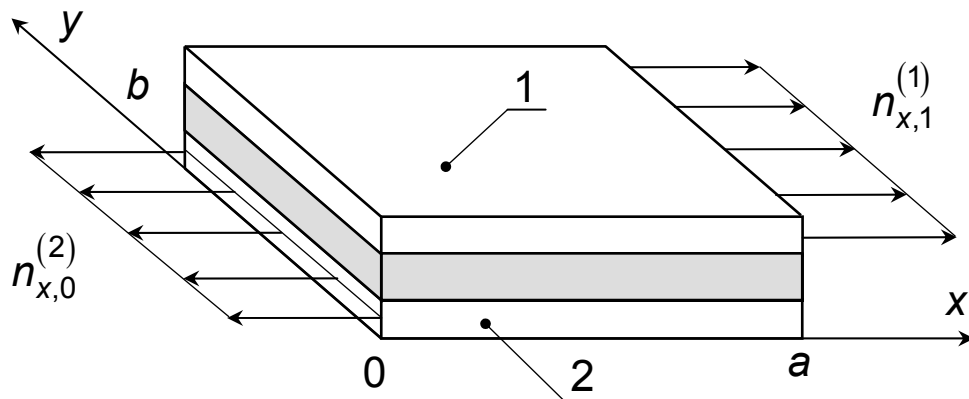


Рисунок 1 – Схема з'єднання

Розв'язання задачі базується на таких гіпотезах:

- клейовий прошарок працює тільки на зсув;
- напруження рівномірно розподілені по товщині шарів;
- напрями ортотропії шарів збігаються з напрямками координатних осей;
- ефекти, пов'язані з вигином, не враховуються;
- дотичні напруження в шарах, що з'єднуються, вважаються постійними, тобто похідні від них дорівнюють нулю.

2. Побудова розв'язку

Рівняння рівноваги диференціальних елементів шарів мають вигляд [4 - 6]:

$$\begin{aligned} \tau_x + \frac{\partial N_x^{(1)}}{\partial x} + \frac{\partial q^{(1)}}{\partial y} &= 0; \quad \tau_y + \frac{\partial N_y^{(1)}}{\partial y} + \frac{\partial q^{(1)}}{\partial x} = 0; \\ -\tau_x + \frac{\partial N_x^{(2)}}{\partial x} + \frac{\partial q^{(2)}}{\partial y} &= 0; \quad -\tau_y + \frac{\partial N_y^{(2)}}{\partial y} + \frac{\partial q^{(2)}}{\partial x} = 0, \end{aligned}$$

де τ_x, τ_y - дотичні напруження в клейовому прошарку в напрямках x, y ; $N_x^{(k)}, N_y^{(k)}$ - нормальні зусилля в шарі k ($k = 1, 2$) у відповідному напрямку ($N_x^{(k)} = \delta_k \sigma_{xx}^{(k)}, N_y^{(k)} = \delta_k \sigma_{yy}^{(k)}$); $q^{(k)}$ - дотичні зусилля в k -му шарі ($q^{(k)} = \delta_k \tau_{xy}^{(k)}$).

Відповідно до прийнятої вище гіпотези про рівномірність дотичних зусиль у шарах [4 - 6] рівняння рівноваги набувають вигляду

$$\tau_x + \frac{\partial N_x^{(1)}}{\partial x} = 0, \quad \tau_y + \frac{\partial N_y^{(1)}}{\partial y} = 0, \quad \tau_x - \frac{\partial N_x^{(2)}}{\partial x} = 0, \quad \tau_y - \frac{\partial N_y^{(2)}}{\partial y} = 0. \quad (1)$$

Граничні умови

$$\begin{aligned} N_x^{(k)} \big|_{x=0} &= n_{x,0}^{(k)}; & N_x^{(k)} \big|_{x=a} &= n_{x,1}^{(k)}; \\ N_y^{(k)} \big|_{y=0} &= n_{y,0}^{(k)}; & N_y^{(k)} \big|_{y=b} &= n_{y,1}^{(k)} \end{aligned} \quad (2)$$

повинні задовольняти умовам рівноваги з'єднання

$$\begin{aligned} N_x^{(1)} + N_x^{(2)} &= n_{x,0}^{(1)} + n_{x,0}^{(2)} = n_{x,1}^{(1)} + n_{x,1}^{(2)} = F_x, \\ N_y^{(1)} + N_y^{(2)} &= n_{y,0}^{(1)} + n_{y,0}^{(2)} = n_{y,1}^{(1)} + n_{y,1}^{(2)} = F_y. \end{aligned} \quad (3)$$

Напруження в клейового прошарку пропорційні різниці переміщень шарів:

$$\tau_x = \frac{G_0}{\delta_0} (U_x^{(2)} - U_x^{(1)}); \quad \tau_y = \frac{G_0}{\delta_0} (U_y^{(2)} - U_y^{(1)}), \quad (4)$$

де $U_x^{(k)}, U_y^{(k)}$ - переміщення у відповідному напрямку k -го шару; G_0 , δ_0 - модуль зсуву і товщина клейового прошарку.

Узагальнений закон Гука для шарів, що з'єднуються, має вигляд

$$\varepsilon_x^{(k)} = \frac{N_x^{(k)}}{\delta_k E_x^{(k)}} - \frac{\mu_{xy}^{(k)} N_y^{(k)}}{\delta_k E_y^{(k)}}; \quad \varepsilon_y^{(k)} = \frac{N_y^{(k)}}{\delta_k E_y^{(k)}} - \frac{\mu_{yx}^{(k)} N_x^{(k)}}{\delta_k E_x^{(k)}}, \quad (5)$$

де $E_x^{(k)}, E_y^{(k)}, \mu_{xy}^{(k)}, \mu_{yx}^{(k)}$ - модулі пружності й коефіцієнти Пуассона.

Диференціювання перших двох рівнянь (1) і залежностей (4) і застосування співвідношень Коші $\varepsilon_x^{(k)} = \partial U_x^{(k)} / \partial x$ й $\varepsilon_y^{(k)} = \partial U_y^{(k)} / \partial y$, закону Гука (5) і умов рівноваги з'єднання (3) для виключення зусиль у другому шарі приводить до системи диференціальних рівнянь відносно зусиль у першому шарі [4, 6]:

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 N_x^{(1)}}{\partial x^2} - c_{11} N_x^{(1)} + c_{12} N_y^{(1)} + c_{13} = 0, \\ \frac{\partial^2 N_y^{(1)}}{\partial y^2} + c_{21} N_x^{(1)} - c_{22} N_y^{(1)} + c_{23} = 0. \end{cases} \quad (6)$$

Коефіцієнти системи мають вигляд

$$p_0 = \frac{G_0}{\delta_0}; \quad c_{11} = \frac{p_0}{\delta_1 E_x^{(1)}} + \frac{p_0}{\delta_2 E_x^{(2)}}; \quad c_{12} = \frac{\mu_{xy}^{(1)} p_0}{\delta_1 E_y^{(1)}} + \frac{\mu_{xy}^{(2)} p_0}{\delta_2 E_y^{(2)}};$$

$$c_{21} = \frac{\mu_{yx}^{(1)} p_0}{\delta_1 E_x^{(1)}} + \frac{\mu_{yx}^{(2)} p_0}{\delta_2 E_x^{(2)}}; \quad c_{22} = \frac{p_0}{\delta_1 E_y^{(1)}} + \frac{p_0}{\delta_2 E_y^{(2)}};$$

$$c_{13} = p_0 \left(\frac{F_x}{\delta_2 E_x^{(2)}} - \frac{\mu_{xy}^{(2)} F_y}{\delta_2 E_y^{(2)}} \right); \quad c_{23} = p_0 \left(\frac{F_y}{\delta_2 E_y^{(2)}} - \frac{\mu_{yx}^{(2)} F_x}{\delta_2 E_x^{(2)}} \right).$$

На бічних сторонах пластинки поперечні зусилля задано крайовими умовами (2). Підставивши їх у рівняння системи (6), одержимо рівняння, що описують зусилля в першому шарі уздовж бічних сторін, при $x = 0$, $x = a$ і $y = 0$ й $y = b$:

$$\frac{\partial^2 B_{x,j}}{\partial x^2} - c_{11} B_{x,j} + c_{13} + a_{12} n_{y,j}^{(1)} = 0;$$

$$\frac{\partial^2 B_{y,j}}{\partial y^2} - c_{22} B_{y,j} + c_{23} + c_{21} n_{x,j}^{(1)} = 0,$$
(7)

де $j = 0, 1$; для зусиль уздовж границь уведено позначення $B_{x,0} = N_x^{(1)} \Big|_{y=0}$, $B_{x,1} = N_x^{(1)} \Big|_{y=b}$, $B_{y,0} = N_y^{(1)} \Big|_{x=0}$, $B_{y,1} = N_y^{(1)} \Big|_{x=a}$.

Розв'язки рівнянь (6) мають вигляд

$$B_{x,j}(x) = S_{1,j} \sinh(\sqrt{c_{11}}x) + S_{2,j} \cosh(\sqrt{c_{11}}x) + \frac{c_{12} n_{y,j}^{(1)} + c_{13}}{c_{11}};$$

$$B_{y,j}(y) = S_{3,j} \sinh(\sqrt{c_{22}}y) + S_{4,j} \cosh(\sqrt{c_{22}}y) + \frac{c_{21} n_{x,j}^{(1)} + c_{23}}{c_{22}}.$$
(8)

Константи $S_{i,j}$ знаходимо з задоволення крайових умов (2). Функції (8) є крайовими умовами для зусиль на бічних сторонах пластинки сумісно з умовами (2).

Виключивши одну з невідомих у системі (6), одержимо рівняння

$$\frac{\partial^4 N_x^{(1)}}{\partial x^2 \partial y^2} - A_1 \frac{\partial^2 N_x^{(1)}}{\partial x^2} - A_2 \frac{\partial^2 N_x^{(1)}}{\partial y^2} + A_3 N_x^{(1)} = A_4;$$
(9)

$$\frac{\partial^4 N_y^{(1)}}{\partial x^2 \partial y^2} - B_1 \frac{\partial^2 N_y^{(1)}}{\partial x^2} - B_2 \frac{\partial^2 N_y^{(1)}}{\partial y^2} + B_3 N_y^{(1)} = B_4,$$
(10)

де $A_1 = c_{22}$; $A_2 = c_{11}$; $A_3 = c_{22}c_{11} - c_{21}c_{12}$; $A_4 = c_{22}c_{13} + c_{12}c_{23}$;

$$B_1 = c_{22}; B_2 = c_{11}; B_3 = c_{22}c_{11} - c_{12}c_{21}; B_4 = c_{11}c_{23} + c_{21}c_{13}.$$

Розглянемо, наприклад, побудову розв'язку рівняння (9). Крайові умови (2) на границях $x = 0$ і $x = a$ і рівняння (9) неоднорідні. Для виключення цього поздовжні зусилля подамо у вигляді суми

$$N_x^{(1)} = R(x) + N(x, y), \quad (11)$$

де функція $R(x)$ задовольняє відповідні крайові умови (2), а $N(x, y)$ на границях $x = 0$ і $x = a$ має однорідні крайові умови.

Підставляя вираз (11) у рівняння (9), одержуємо рівняння

$$-A_1 \frac{d^2 R}{dx^2} + A_3 R = A_4; \quad (12)$$

$$\frac{\partial^4 N}{\partial x^2 \partial y^2} - A_1 \frac{\partial^2 N}{\partial x^2} - A_2 \frac{\partial^2 N}{\partial y^2} + A_3 N = 0. \quad (13)$$

Розв'язок рівняння (12) має вигляд

$$R(x) = V_1 \sinh\left(\sqrt{\frac{A_3}{A_1}} x\right) + V_2 \cosh\left(\sqrt{\frac{A_3}{A_1}} x\right) + \frac{A_4}{A_3}. \quad (14)$$

Константи V_1 і V_2 визначаються з відповідних крайових умов (2). Потрібно відзначити, що функція (13) була запропонована в роботі [4] як наближений розв'язок системи (5).

Оскільки неоднорідні крайові умови (2) при $x = 0$ і $x = a$ задовольняються за допомогою функції (14), то відповідні крайові умови для $N(x, y)$ є однорідними. Це дозволяє застосувати для розв'язання (13) метод відокремлення змінних. Розв'язок шукаємо у вигляді добутку $N = Y(y)X(x)$. Відокремивши змінні, маємо систему

$$\frac{d^2 X}{dx^2} + \lambda^2 X = 0, \quad \left(A_2 + \lambda^2\right) \frac{d^2 Y}{dy^2} - \left(A_3 + \lambda^2 A_1\right) Y = 0.$$

Розв'язок першого рівняння має вигляд

$$X(x) = C_1 \sin \lambda x + C_2 \cos \lambda x.$$

Оскільки крайові умови для $N(x, y)$ на сторонах $x = 0$ і $x = a$ однорідні, отже, вони однорідні й для $X(x)$. Функція $X(x)$ задовольняє крайові умови і тотожно не дорівнює нулю, тільки якщо

$\lambda_n = \frac{\pi n}{a}$ і $C_2 = 0$. Для визначеності припустимо $C_1 = 1$. Розв'язок другого рівняння системи має вигляд

$$Y(y) = C_3 \sinh(\mu_n y) + C_4 \cosh(\mu_n y), \quad \mu_n = \sqrt{\frac{A_3 a^2 + \pi^2 n^2 A_1}{A_2 a^2 + \pi^2 n^2}}.$$

Склавши суму по n й підставивши отримані результати в (11), матимемо розклад продовжних зусиль у ряд Фур'є

$$N_x^{(1)} = R(x) + \sum_{n=1}^{\infty} \sin \frac{\pi n x}{a} \cdot [C_{3,n} \sinh(\mu_n y) + C_{4,n} \cosh(\mu_n y)]. \quad (15)$$

Задовольнивши крайові умови (7) на сторонах $y = 0$ і $y = b$, одержимо рівняння

$$\sum_{n=1}^{\infty} C_{4,n} \sin \frac{\pi n x}{a} = B_{x,0}(x) - R(x);$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \sin \frac{\pi n x}{a} [C_{3,n} \sinh(\mu_n b) + C_{4,n} \cosh(\mu_n b)] = B_{x,1}(x) - R(x).$$

Використовуючи повноту й ортогональність системи функцій $\sin \frac{\pi n x}{a}$ на відрізку $(0; a)$, знаходимо вирази для коефіцієнтів

$$C_{4,n} = \frac{2}{a} \int_0^a (B_{x,0}(x) - R(x)) \sin \frac{\pi n x}{a} dx;$$

$$C_{3,n} = \frac{\frac{2}{a} \int_0^a (B_{x,1}(x) - R(x)) \sin \frac{\pi n x}{a} dx - C_{4,n} \cosh(\mu_n b)}{\sinh(\mu_n b)}.$$

Рівняння (10) відносно зусиль $N_y^{(1)}$ розв'язується аналогічним чином. Зусилля $N_y^{(1)}$ можна подати у вигляді, аналогічному (15).

$$N_y^{(1)} = T(y) + \sum_{n=1}^{\infty} \sin \frac{\pi n y}{b} \cdot [C_{5,n} \sinh(v_n y) + C_{6,n} \cosh(v_n y)], \quad (16)$$

де $T(y) = V_3 \sinh\left(\sqrt{\frac{B_3}{B_2}} y\right) + V_4 \cosh\left(\sqrt{\frac{B_3}{B_2}} y\right) + \frac{B_4}{B_3}$; константи V_3 і V_4 знаходяться із відповідних крайових умов (2). У свою чергу

$$v_n = \sqrt{\frac{B_3 b^2 + \pi^2 n^2 B_2}{B_1 b^2 + \pi^2 n^2}}; \quad C_{6,n} = \frac{2}{b} \int_0^b (B_{y,0}(y) - T(y)) \sin \frac{\pi n y}{b} dy;$$

$$C_{5,n} = \frac{\frac{2}{b} \int_0^b (B_{y,1} - T) \sin \frac{\pi n y}{b} dy - C_{6,n} \cosh(v_n a)}{\sinh(v_n a)}.$$

Можна показати, що коефіцієнти рядів Фур'є (15) і (16) зменшуються пропорційно n^{-3} .

Зусилля у другому шарі знаходимо із співвідношень (3). Напруження у клейовому шарі – за допомогою формул (1).

3. Приклади розрахунків

Розглянемо напружений стан з'єднання, параметри якого беремо з роботи [6]: $L_x = L_y = 10$ мм; $\delta_1 = 1$ мм; $\delta_2 = 0,5$ мм; $\delta_0 = 0,15$ мм; $G_0 = 4,2$ ГПа. Перший шар виготовлено з вуглепластика з напрямком армування уздовж осі x ($E_x^{(1)} = 181$ ГПа; $E_y^{(1)} = 10$ ГПа; $\mu_{yx}^{(1)} = 0,28$), другий шар виконано з алюмінію ($E_x^{(2)} = E_y^{(2)} = 72$ ГПа; $\mu_{xy}^{(2)} = 0,32$).

Розтягувальне навантаження передається від одного шару до іншого, вуглепластик навантажений уздовж волокон. Крайові умови мають вигляд

$$N_x^{(1)}|_{x=0} = N_x^{(2)}|_{x=a} = 150 \text{ кН/м}, N_x^{(2)}|_{x=0} = N_x^{(1)}|_{x=a} = 0,$$

$$N_y^{(k)}|_{y=0} = N_y^{(k)}|_{y=b} = 0, \quad k = 1, 2.$$

Графіки зусиль у першому шарі й напружень у клейовому шарі наведено на рис. 2.

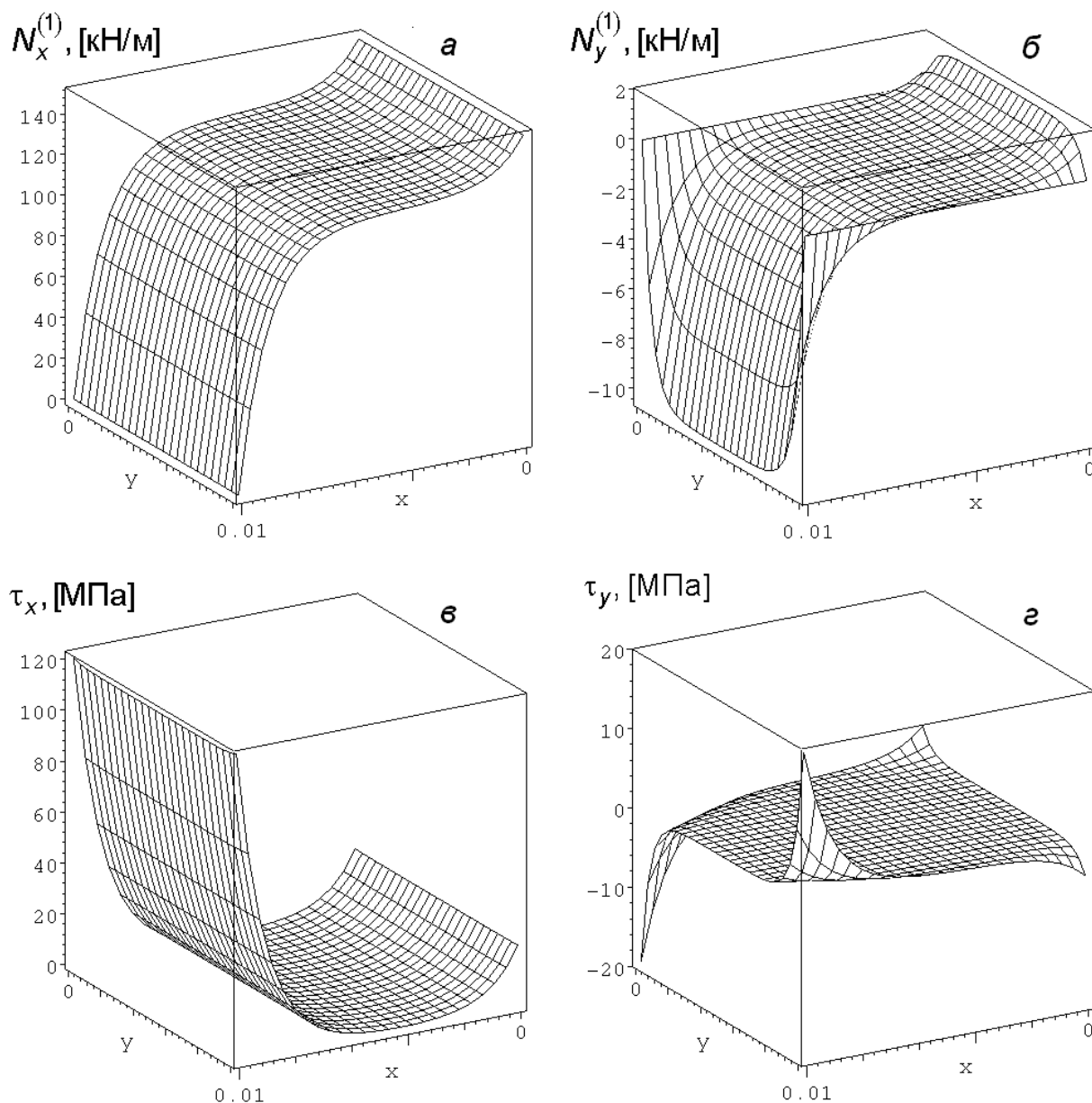


Рисунок 2 – Нормальні зусилля в першому шарі (а), (б) і дотичні напруження в клейовому шарі (в), (г)

Другий розрахунковий випадок – навантаження передається від металевого шару до вуглепластика, і прикладене ортогонально до напрямку армування. Крайові умови

$$N_y^{(1)} \Big|_{y=0} = N_y^{(2)} \Big|_{y=b} = 150 \text{ кН/м}; \quad N_y^{(2)} \Big|_{y=0} = N_y^{(1)} \Big|_{y=b} = 0;$$

$$N_x^{(k)} \Big|_{x=0} = N_x^{(k)} \Big|_{x=a} = 0, \quad k = 1, 2.$$

Графіки зусиль у першому шарі (у вуглепластика) і напружень у клейовому прошарку наведено на рис. 3.

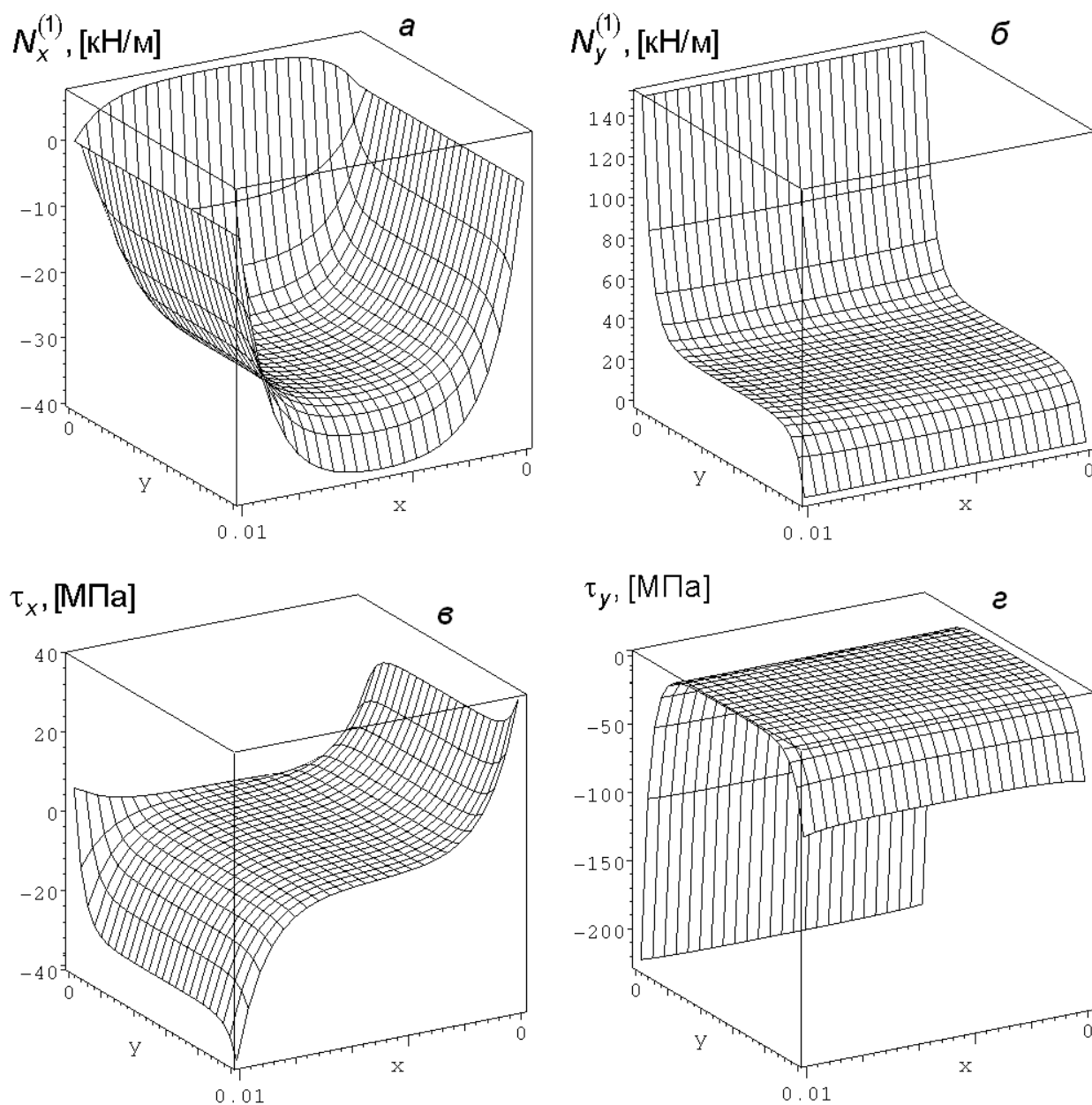


Рисунок 3 – Нормальні зусилля в першому шарі (а), (б) і дотичні напруження в клейовому прошарку (в), (г)

4. Аналіз результатів розрахунків

Із графіка, наведеного на рис. 2, б видно, що при навантаженні уздовж осі x поперечні зусилля $N_y^{(1)}$, зумовлені коефіцієнтами Пуассона шарів, є відносно невеликими порівнянно із зусиллями $N_x^{(1)}$. Розподіл останніх показано на рис. 2 а. Зусилля $N_y^{(1)}$ значно відрізняються на кінцях з'єднання $x = 0$ і $x = a$, і це пов'язано з тим, що коефіцієнти Пуассона шарів розрізняються. Максимальні значення напружень у поперечному напрямку в шарах у цьому випадку

досягають 20% від поздовжніх напружень.

Напруження τ_y (рис. 2 d), як і зусилля $N_y^{(1)}$, максимальні з тієї сторони пластинки, де навантаження прикладене до алюмінієвого шару, а не до вуглепластика, оскільки алюміній має більший коефіцієнт Пуассона. Ці напруження в даному розрахунковому випадку також досягають величини близько 20% від максимальних напружень у поздовжньому напрямку τ_x .

Якщо навантаження прикладено у поперечному напрямку, уздовж осі y , то напружений стан з'єднання змінюється (рис. 3). Максимальні поперечні зусилля ($N_x^{(1)}$), які спричиняються при цьому, у кілька разів більші, ніж у першому розрахунковому випадку. Це обумовлено високою жорсткістю вуглепластика по осі x – уздовж напрямку армування. Уздовж осі y алюмінієвий шар має більшу жорсткість, ніж вуглепластик, і внаслідок цього на більшій частині з'єднання маємо $N_y^{(2)} > N_y^{(1)}$, що є причиною того, що на більшій частині з'єднання $N_x^{(1)} < 0$, за винятком малої зони в околі $y = 0$, де навантаження прикладене до вуглепластика.

Висновки

Побудовано аналітичний розв'язок задачі з визначення напруженого стану клейового з'єднання в наближеній двовимірній постановці в прямокутній області. Використовується двовимірне узагальнення моделі Фолькерсена й умова малості похідних від дотичних напружень у шарах, що з'єднуються. Остання обставина накладає обмеження на крайові умови на бічних сторонах пластинки – нормальні напруження повинні бути постійними уздовж сторін, а дотичні – дорівнювати нулю. Розв'язок будується за допомогою методу відокремлення змінних у вигляді ряду Фур'є за однією з координат. Запропонований метод має гарну збіжність, що дозволяє його розвинути на розв'язок задач проектування й оптимізації. Метод може бути узагальнено на термопружні задачі.

Список використаних джерел

1. Kim, H. Stress analysis of adhesively-bonded joints under in-plane shear loading [Text] / H. Kim, K.T. Kedward // J. of Adhesion. – 2001. – Vol 76, P. 1 – 36.
2. Kim, H. Characteristics of In- Plane Shear Loaded Adhesive Lap Joints: Experiments and Analysis [Text] / H. Kim, J. Lee. – FAA Final Report, DOT/FAA/AR-03/21, 2003.
3. Vihak, V. Exact solution of the plane problem of elasticity in a rectangular region [Text] / V. Vihak, Y. Tokovyi, A. Rychahivskyy // J. of Computational and Applied Mechanics. – 2002. – Vol. 3, No. 2., P. 193 – 206.
4. Adams, R.D. Effect of Poisson's ratio strains in adherends on stresses of an idealized lap joint [Text] / R.D. Adams, N.A. Peppiatt // J. of Strain Analysis. – 1973. – Vol. 8 (2), P. 134 – 139.
5. Карпов, Я.С. Соединения деталей и агрегатов из композиционных материалов [Текст] / Я.С. Карпов,. – Х.: Нац. аэрокосм. ун-т "Харьк. авиац. ин-т", 2006. – 359 с.
6. Mathias, J.D. On the bidirectional stress distribution in rectangular bonded composite patches / J.D. Mathias, M. Grédiac, X. Balandraud // Int. J. of Solids and Structures. – 2006. – Vol. 43, P. 6921 – 6947.
7. Deheeger, A.A closed-form solution for the thermal stress distribution in rectangular metal/composite bonded joints / A. Deheeger, J.D. Mathias, M. Grédiac // Int. J. of Adhesion & Adhesives. – 2009. – Vol. 29, P. 515 – 524.
8. Randrianalisoa, J. On the thermomechanical behavior of two-dimensional foam/metal joints with shear-deformable adherends – Parametric study / J. Randrianalisoa, R. Dendievel, Y. Bréchet // Composites: Part B. – 2011. – Vol. 42, P. 2055 – 2066.
9. Three dimensional stress analysis of a composite patch using stress functions / H.S. Kima, M. Cho, J. Lee, Antoine Deheeger, J.D. Mathias, M. Grédiac // Int. J. of Mechanical Sciences. – 2010. – Vol. 52, P. 1646 – 1659.

Поступила в редакцию 15.03.2013.

*Рецензент: д-р физ.-мат. наук, проф. А.Г. Николаев,
Национальный аэрокосмический университет
им. Н.Е. Жуковского «ХАИ», г. Харьков.*