

ОПТИМАЛЬНЫЕ СХЕМЫ АРМИРОВАНИЯ В ЗАДАЧАХ О ПРОЧНОСТИ СЛОИСТЫХ КОМПОЗИЦИОННЫХ МАТЕРИАЛОВ

Несущая способность тонкостенных композитных конструкций существенно зависит от выбора толщины и ориентации слоев в пакете, а также последовательности (или порядка) укладки слоев, т.е. их относительного расположения в пакете. Однако при решении некоторых проблем оптимального армирования можно пренебречь влиянием того или иного структурного параметра на предельно допускаемую нагрузку путем соответствующей формулировки задачи оптимизации. Например, проектирование трехслойных конструкций можно вести по принципу разделения функций составляющих элементов: толщину и направления укладки несущих композитных слоев находить из условий прочности, а высоту заполнителя и другие его параметры – из соображений устойчивости и жесткости [1]. Такой подход основывается на предположении о незначительном влиянии последовательности укладки монослоев на общую изгибную жесткость панели или оболочки. На тех же допущениях строится решение большого класса задач оптимизации структуры КМ тонкостенных элементов, находящихся в условиях плоского напряженного состояния. Поэтому известный практический интерес представляет анализ фундаментальной проблемы оптимального армирования КМ «в точке». Такая постановка задачи предусматривает поиск количества слоев n , их толщины δ_k и углов укладки φ_k , обеспечивающих минимум массы

$$\delta_{\Sigma} = \sum_{k=1}^n \delta_k \rightarrow \min \quad (1)$$

и удовлетворяющих условиям прочности. Если в качестве таковых рассматривать критерий $\sigma_{\text{ср}} - \sigma_{\text{ср}}$, то с учетом структурного параметра η , введенного в работе [2], эти ограничения можно выразить через функцию прочности $(\Phi_{\text{пр}})_k$ k -го слоя:

$$1 - (\Phi_{\text{пр}})_k \geq 0, \quad k = 1, 2, \dots, n, \quad (2)$$

$$\text{где } (\Phi_{\text{пр}})_k = \frac{1}{4} \bar{A} \eta_k^2 + \frac{1}{2} \bar{B} \eta_k + \bar{C}; \quad (3)$$

$$\bar{A} = p_1 - 4p_4; \quad \bar{B} = p_2 + p_3 \varepsilon; \quad \bar{C} = p_4 \gamma_0^2 + \frac{2p_5 + p_6 \varepsilon}{4} \varepsilon;$$

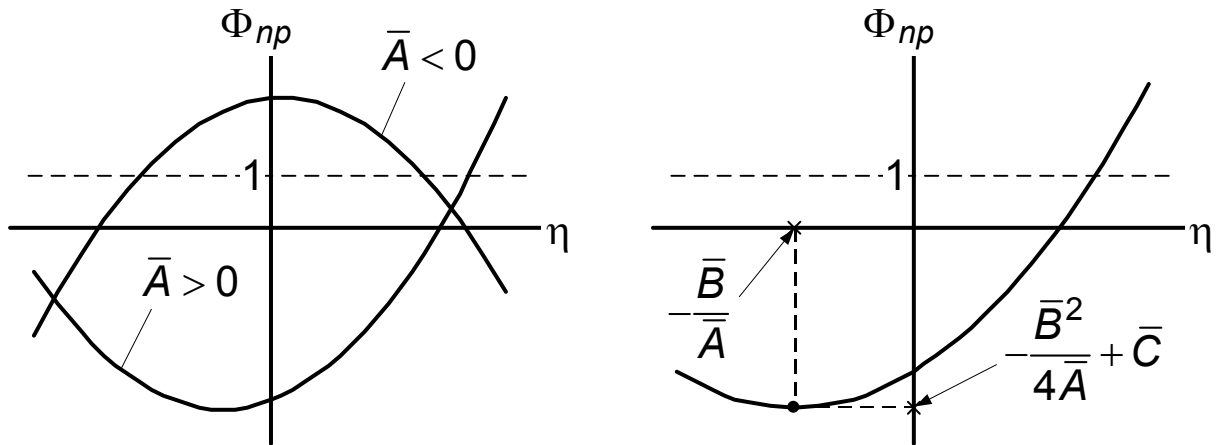
$$\varepsilon = \varepsilon_x + \varepsilon_y; \quad \gamma_0^2 = \gamma_{xy}^2 + (\varepsilon_x - \varepsilon_y)^2;$$

$$\eta_k = \eta(\varphi_k) = \gamma_{xy} \sin 2\varphi_k + (\varepsilon_x - \varepsilon_y) \cos 2\varphi_k;$$

p_i – коэффициенты, которые вычисляются по упругим и прочностным свойствам элементарного слоя КМ. Зависимости для их расчета ввиду громоздкой формы здесь не приводятся;

$\varepsilon_x, \varepsilon_y, \gamma_{xy}$ – деформации пакета в плоскости укладки слоев, связанные физическими соотношениями с внешними усилиями (см., например, [1]).

Как установлено в [2], количество равнопрочных слоев в пакете (т.е. слоев, характеризующихся одинаковой прочностью) в самом общем случае не превышает четырех. Ниже на рисунке показаны типичные зависимости функции Φ_{np} от параметра η (отметим, что, исходя из физических соображений [2], допустимым интервалом изменения η является $[-\gamma_o; \gamma_o]$).



Характер зависимости $\Phi_{np}(\eta)$

В работе [3] получены необходимые условия оптимальности структуры КМ при ограничениях (2):

$$\left. \begin{aligned} 1 - \sum_{t=1}^n \theta_t \left(\Omega_1^{(t)} \frac{\partial \varepsilon_x}{\partial \delta_1} + \Omega_2^{(t)} \frac{\partial \varepsilon_y}{\partial \delta_1} + \Omega_3^{(t)} \frac{\partial \gamma_{xy}}{\partial \delta_1} \right) &= 0; \\ \left[\bar{M}_{np} + \frac{\bar{N}_{np}}{2} (\cos 2\varphi_k + \cos 2\varphi_{k-1}) \right] \times \\ \times (\cos 2\varphi_k - \cos 2\varphi_{k-1}) &= 0, \quad k = 2, 3, \dots, n; \end{aligned} \right\} \quad (4)$$

$$\begin{aligned} \delta_k \sin 2\varphi_k (\bar{M}_{np} + \bar{N}_{np} \cos 2\varphi_k) + \\ + \theta_k (\bar{A}\eta_k + \bar{B})\gamma_{12k} &= 0, \quad k = 1, 2, \dots, n; \end{aligned} \quad (5)$$

$$\theta_k [1 - (\Phi_{np})_k] = 0, \quad k = 1, 2, \dots, n, \quad (6)$$

где θ_k – неизвестный множитель, на который накладываются требования неотрицательности: $\theta_k \geq 0$, причем если в k -м слое есть резерв несущей способности, т.е. $(\Phi_{np})_k < 1$, то $\theta_k = 0$. В противном случае, когда критерий (2) выполняется в виде строгого равенства, множитель $\theta_k > 0$;

$\Omega_1^{(t)}, \Omega_2^{(t)}, \Omega_3^{(t)}, \bar{M}_{np}, \bar{N}_{np}$ – коэффициенты, которые зависят от механических характеристик монослоя КМ, структуры пакета и внешней нагрузки [3]. Выражения для расчета этих коэффициентов можно найти в [3] (ввиду громоздкой формы здесь они не приводятся).

Соотношения (4) – (6) являются трансцендентными, однако они допускают качественную оценку вероятных оптимумов, в частности определение типа рациональной по прочности структуры КМ.

Рассмотрим тривиальный случай, когда $\bar{M}_{np} = \bar{N}_{np} = 0$. В уравнениях (4) сохраняется только первое равенство, а остальные удовлетворяются тождественно. Система (5) сводится к виду

$$\theta_k (\bar{A}\eta_k + \bar{B})\gamma_{12k} = 0, \quad k = 1, 2, \dots, n, \quad (7)$$

откуда следуют три возможных решения:

$$\theta_k = 0; \quad \eta_k = -\bar{B}/\bar{A}; \quad \gamma_{12k} = 0. \quad (8)$$

Первый вариант, $\theta_k = 0$, соответствует слоям, в которых условия прочности удовлетворяются с некоторым запасом. Последние два возможных решения (8) относятся к слоям, в которых критерий (2) выполняется в виде строгого равенства. Точка $\eta_k = -\bar{B}/\bar{A}$ указывает экстремум функции $\Phi_{np}(\eta)$ (минимум или максимум) и задает два равнопрочных слоя [2]:

$$\varphi_{1,2} = \varphi_0 \pm \frac{1}{2} \arccos \left(-\frac{\bar{B}}{\gamma_0 \bar{A}} \right), \quad (9)$$

где $\varphi_0 = \frac{1}{2} \arctg \left(\frac{\gamma_{xy}}{\varepsilon_x - \varepsilon_y} \right)$.

Аналогично условие отсутствия касательных напряжений, $\gamma_{12k} = 0$ (или $|\eta_k| = \gamma_0$), также выполняется только для двух слоев [2]:

$$\varphi_3 = \varphi_0; \quad \varphi_4 = \varphi_0 \pm \pi/2, \quad (10)$$

где знак «+» выбирают при $\varphi_0 < 0$, а знак «–» – в случае $\varphi_0 > 0$.

Кривая $\Phi_{np}(\eta)$ представляет собой геометрическое точек η_k для любой известной структуры КМ. Поэтому простой анализ графиков, приведенных на рисунке, показывает, что четыре слоя, углы укладки кото-

рых определяются соотношениями (9) и (10), не могут являться равнопрочными одновременно (в составе одного пакета). Кроме того, тривиальное решение $\bar{M}_{np} = \bar{N}_{np} = 0$ нельзя рассматривать как оптимальное, так как при этом для остальных слоев в пакете условия прочности либо не выполняются, либо заведомо гарантируются такие запасы по несущей способности, что углы укладки могут быть выбраны произвольно.

Рассмотрим систему равенств (4). Из нее следует, что при $k = 2, 3, \dots, n$ последние $(n-1)$ уравнений имеют два возможных решения:

$$\cos 2\varphi_k = \cos 2\varphi_{k-1}; \quad (11)$$

$$(\bar{M}_{np} + \bar{N}_{np} \cos 2\varphi_k) + (\bar{M}_{np} + \bar{N}_{np} \cos 2\varphi_{k-1}) = 0. \quad (12)$$

Согласно критерию (11) углы укладки в слоях с первого по k -й одинаковы, т.е.

$$\varphi_1 = \varphi_2 = \varphi_3 = \dots = \varphi_k, \quad \text{или}$$

$$\varphi_1 = \varphi_2 = \varphi_3 = \dots = \varphi_k = \pi/4.$$

Ограничения (12) эквивалентны правилу чередования слоев

$$\varphi_1 = \varphi_3 = \varphi_5 = \dots; \quad \varphi_2 = \varphi_4 = \varphi_6 = \dots$$

и при нулевом коэффициенте $\bar{M}_{np}$ соответствуют пакету $[0^\circ/90^\circ]$. Тождество $\bar{M}_{np} = 0$ наблюдается, например, когда $E_1 = E_2$, что обычно свойственно композитам на основе тканых армирующих материалов [3]. Таким образом, выполнение равенств (11), (12) означает в общем случае оптимальность структур $[\pm\varphi]$ или $[\pm\varphi_1/\pm\varphi_2]$.

Учитывая сформулированные в работе [2] выводы о максимальном количестве равнопрочных слоев, в соотношениях (5) не более четырех коэффициентов θ_k являются положительными числами, а остальные – равны нулю. Тогда углы укладки слоев, которые характеризуются запасом прочности ($\theta_k = 0$), должны удовлетворять уравнению

$$\delta_k \sin 2\varphi_k (\bar{M}_{np} + \bar{N}_{np} \cos 2\varphi_k) = 0, \quad (13)$$

которое имеет три варианта решения

$$\delta_k = 0; \quad (14)$$

$$\sin 2\varphi_k = 0; \quad (15)$$

$$\bar{M}_{np} + \bar{N}_{np} \cos 2\varphi_k = 0. \quad (16)$$

Равенство (14) равнозначно вырождению слоев с ориентацией $\pm\varphi_k$. Из (15) и (16) находим

$$\varphi_k = 0; \quad \varphi_k = \pi/2 \quad \text{или} \quad \varphi_k = \varphi^* = \pm \frac{1}{2} \arccos \frac{\bar{M}_{np}}{\bar{N}_{np}},$$

т.е. слои с резервом несущей способности укладываются в направлениях 0° , 90° или $\pm\varphi^*$.

Таким образом, исходя из общего анализа условий (4) – (6), можно сделать вывод о наличии двух возможных оптимальных решений: структуры $[\pm\varphi_1/\pm\varphi_2]$ (включая ее частные варианты $[\pm\varphi]$, $[0^\circ/\pm\varphi]$, $[90^\circ/\pm\varphi]$, $[0^\circ/90^\circ]$) или $[0^\circ/90^\circ/\pm\varphi]$.

Для проверки этих теоретических положений в работе выполнен ряд численных экспериментов, в которых варьировалась внешняя нагрузка и используемый материал монослоя. Исследовалась структура $[\pm\varphi_1/\pm\varphi_2/\pm\varphi_3/\pm\varphi_4]$, оптимальные параметры которой устанавливались методом прямого перебора. Результаты расчетов подтверждают сформулированные выводы о классах рациональных по прочности схем укладки слоистых КМ. Во всех исследованных случаях нагружения оптимальной оказывалась структура $[\pm\varphi_1/\pm\varphi_2]$ или пакет $[0^\circ/90^\circ/\pm\varphi]$. Кроме того, в точке оптимума пакет слоев $[\pm\varphi_1/\pm\varphi_2]$ нередко сводится к структурам вида $[\pm\varphi]$, $[0^\circ/\pm\varphi]$, $[90^\circ/\pm\varphi]$, $[0^\circ/90^\circ]$ (особенно часто у материалов с коэффициентом $\bar{A} > 0$). А если это не так, разница в массе между схемами $[\pm\varphi_1/\pm\varphi_2]$ и $[0^\circ/90^\circ/\pm\varphi]$ не превышает 7%.

Список использованных источников

1. Карпов, Я.С. Проектирование деталей и агрегатов из композитов [Текст]: учеб. / Я.С. Карпов. – Х.: Нац. аэрокосм. ун-т «Харьк. авиац. ин-т», 2010. – 768 с.
2. Гагауз, П.М. О равнопрочных и равнонапряженных структурах композиционных материалов [Текст] / П.М. Гагауз // Вопросы проектирования и производства конструкций летательных аппаратов: сб. науч. тр. Нац. аэрокосм. ун-та им. Н.Е. Жуковского «ХАИ». – Вып. 2(70). – Х., 2012. – С. 42 – 51.
3. Гагауз, П.М. Необходимые условия оптимальности структуры композиционного материала в континуальной постановке задачи оптимального армирования при ограничениях по прочности [Текст] / П.М. Гагауз // Вопросы проектирования и производства конструкций летательных аппаратов: сб. науч. тр. Нац. аэрокосм. ун-та им. Н.Е. Жуковского «ХАИ». – Вып. 3(71). – Х., 2012. – С. 23 – 29.

Поступила в редакцию 17.12.2012.

Рецензент: д-р техн. наук, проф. Я.С. Карпов, Национальный аэрокосмический университет им. Н.Е. Жуковского «ХАИ», г. Харьков.