УДК 629.7.023

П.М. Гагауз, канд. техн. наук

НЕОБХОДИМЫЕ УСЛОВИЯ ОПТИМАЛЬНОСТИ СТРУКТУРЫ КОМПОЗИЦИОННОГО МАТЕРИАЛА В КОНТИНУАЛЬНОЙ ПОСТАНОВКЕ ЗАДАЧИ ОПТИМАЛЬНОГО АРМИРОВАНИЯ ПРИ ОГРАНИЧЕНИЯХ ПО ПРОЧНОСТИ

Опыт применения композитных конструкций показал, что наилучшие результаты дает творческий подход к их проектированию, когда учитываются основные, специфические черты композиционных материалов (КМ). Во-первых, они не являются материалами в классическом, общепринятом смысле этого слова – получение непосредственно самого композита и изготовление из него детали совмещены во времени и представляют собой единый технологический процесс. Во-вторых, большинству КМ присуща ярко выраженная анизотропия механических характеристик. Такие особенности позволяют на этапе эскизного проектирования в широких пределах изменять свойства материала и целенаправленно модифицировать их в соответствии с назначением и условиями эксплуатации разрабатываемого изделия. Этого добиваются варьированием структуры композита, т.е. выбором количества слоев, их толщины, углов укладки и взаиморасположения в пакете.

В настоящее время при формулировке проблем оптимального армирования композитных конструкций одинаково широко используют два различных подхода. Согласно первому подходу проектные переменные считаются величинами непрерывными, что позволяет строить решение таких задач на использовании аппарата дифференциального и вариационного исчислений и даже получать в некоторых частных случаях аналитические зависимости, как в [1]. Примеры оптимизации структуры КМ в такой континуальной постановке можно найти в [2, 3]. У найденного таким образом решения толщины слоев затем округляются до значений, кратных толщине монослоя. Если такое округление для однородных структур КМ вполне логично, то для неоднородных по углу укладки пакетов может привести к потере части локальных оптимумов или даже к неоптимальному результату. Поэтому более естественной (особенно в рамках модели слоистого КМ) и целесообразной альтернативой следует признать такие методы оптимизации, когда учитываются не только дискретный характер толщин, но и ограничения на углы укладки, которые могут иметь место в силу технологических особенностей оборудования. Вместе с тем это не исключает возможность синтеза этих двух подходов для достижения наилучшего результата [4]. Например, один из методов целочисленного программирования – метод ветвей и границ – представляет собой эффективную процедуру перебора всех допустимых комбинаций целочисленных значений, которые находят округлением решения, полученного в континуальной постановке [5].

Часто в формулировке проблем оптимального армирования используют дополнительные конструктивные, эвристические критерии оптимальности (равнопрочности, равнонапряженности, равноустойчивости и т.д.), что позволяет существенно упростить решение задачи [6, 7]. В частности, требования равнонапряженности слоев позволяют рассматривать условия оптимальности структуры КМ без привлечения критериев прочности материала [8] (однако при этом не получается однозначно связать предельные нагрузки с прочностью пакета слоев).

Строгого соответствия таких частных критериев условию минимума массы в общем случае установить не удается [9], поэтому их применение основывается, как правило, на опыте проектирования и интуитивном представлении о поведении материала и конструкции под нагрузкой. Например, хорошо известно, что максимальной жесткостью и прочностью при чистом сдвиге обладают перекрестно армированные КМ с укладкой $[\pm 45°]$. Учитывая, что многим КМ свойственно различие в пределах прочности на растяжение и сжатие (часто – значительное), слои с армированием $+45°$ и $-45°$ будут неэквивалентны в плане напряженного состояния.

В данной работе задача оптимизации структуры КМ «в точке» рассматривается в общей постановке, когда необходимо минимизировать массу композитной конструкции, т.е. толщину пакета

$$\delta_\Sigma = \sum_{k=1}^{n} \delta_k \to min\,, \tag{1}$$

и обеспечить удовлетворение условий прочности

$$1-\left(\Phi_{np}\right)_k \geq 0\,, \qquad k=1,2,...,n\,. \tag{2}$$

Будем считать, что толщина δ_k и угол укладки φ_k k-го слоя являются непрерывными переменными, а область поиска оптимальных решений ограничим только ортотропными структурами, в которых армирующий материал, матрица и их объемное содержание в композите не изменяются по толщине. Тогда в соотношениях (1) и (2) значение n равно общему количеству различных траекторий армирования $\pm\varphi_k$, а величина $\left(\Phi_{np}\right)_k$ представляет собой функцию напряжений в k-м слое пакета, вид которой определяется используемой теорией прочности анизотропного материала.

В качестве критерия прочности воспользуемся критерием Цая – Ву. С учетом структурного параметра, введенного в работе [10],

$$\left(\Phi_{np}\right)_k = \frac{1}{4}\bar{A}\eta_k^2 + \frac{1}{2}\bar{B}\eta_k + \bar{C}\,, \tag{3}$$

где $$\bar{A} = p_1 - 4p_4\,; \quad \bar{B} = p_2 + p_3\varepsilon\,; \quad \bar{C} = p_4\gamma_o^2 + \frac{2p_5 + p_6\varepsilon}{4}\varepsilon\,; \tag{4}$$

$$\varepsilon = \varepsilon_x + \varepsilon_y ; \quad \gamma_o^2 = \gamma_{xy}^2 + \left(\varepsilon_x - \varepsilon_y\right)^2 ; \tag{5}$$

$$\eta_k = \eta\left(\varphi_k\right) = \gamma_{xy} sin2\varphi_k + \left(\varepsilon_x - \varepsilon_y\right) cos2\varphi_k . \tag{6}$$

Коэффициенты p_i, фигурирующие в равенствах (4), вычисляются по упругим и прочностным свойствам монослоя. Формулы для их расчета ввиду громоздкости здесь не приводятся.

Деформации пакета ε_x, ε_y, γ_{xy} в плоскости укладки слоев связаны с внешними усилиями N_x, N_y, q_{xy} физическим законом:

$$\varepsilon_x = \frac{N_x B_{22} - N_y B_{12}}{B_{11} B_{22} - B_{12}^2};$$

$$\varepsilon_y = \frac{N_y B_{11} - N_x B_{12}}{B_{11} B_{22} - B_{12}^2}; \tag{7}$$

$$\gamma_{xy} = \frac{q_{xy}}{B_{33}}.$$

Коэффициенты жесткости слоистого материала B_{ij}:

$$B_{ij} = \sum_{k=1}^{n} \delta_k b_{ij}\left(\varphi_k\right), \qquad ij = 11,22,33,12, \tag{8}$$

где $b_{11}(\varphi) = \bar{E}_1 - \bar{R} sin^2\varphi - \bar{S} sin^2\varphi cos^2\varphi ;$

$$b_{22}(\varphi) = \bar{E}_2 + \bar{R} sin^2\varphi - \bar{S} sin^2\varphi cos^2\varphi ;$$

$$b_{33}(\varphi) = G_{12} + \bar{S} sin^2\varphi cos^2\varphi ; \tag{9}$$

$$b_{12}(\varphi) = \bar{E}_2\mu_{12} + \bar{S} sin^2\varphi cos^2\varphi ;$$

$$\bar{R} = \bar{E}_1 - \bar{E}_2 ; \quad \bar{S} = \bar{E}_1 + \bar{E}_2 - 2\bar{E}_2\mu_{12} - 4G_{12} ;$$

$$\bar{E}_{1,2} = \frac{E_{1,2}}{1 - \mu_{12}\mu_{21}};$$

E_1, E_2, G_{12}, μ_{12}, μ_{21} – упругие свойства монослоя КМ.

Воспользуемся теоремами Куна – Таккера [5] и составим расширенный функционал для задачи (1), (2):

$$\Lambda = \sum_{k=1}^{n} \delta_k + \sum_{k=1}^{n} \theta_k \left[1 - \left(\Phi_{np}\right)_k\right], \tag{10}$$

где θ_k – неизвестный множитель, на который накладываются требования неотрицательности: $\theta_k \geq 0$.

Сформулируем условия Куна – Таккера:

$$1-\sum_{t=1}^{n}\theta_t\frac{\partial(\Phi_{np})_t}{\partial\delta_k}=0,\qquad k=1,2,...,n; \tag{11}$$

$$\sum_{t=1}^{n}\theta_t\frac{\partial(\Phi_{np})_t}{\partial\varphi_k}=0,\qquad k=1,2,...,n; \tag{12}$$

$$\theta_k\left[1-(\Phi_{np})_k\right]=0,\qquad k=1,2,...,n. \tag{13}$$

Параметр θ_k, входящий в соотношения (10) – (13), имеет простой физический смысл. Если $\theta_k=0$, то в k-м слое есть резерв несущей способности, т.е. $(\Phi_{np})_k<1$. В противном случае, когда $\theta_k>0$, критерий прочности (2) выполняется в виде строгого равенства: $(\Phi_{np})_k=1$.

Анализ зависимостей (11) – (13) показывает, что как минимум один из коэффициентов θ_k должен быть ненулевым. Это подтверждает тот факт, что в подобных задачах оптимум лежит на границе допустимой области, т.е. запас прочности отсутствует.

Преобразуем систему уравнений (11): из второго равенства вычтем первое, из третьего – второе и т.д.:

$$\begin{gathered}1-\sum_{t=1}^{n}\theta_t\frac{\partial(\Phi_{np})_t}{\partial\delta_1}=0;\\ \sum_{t=1}^{n}\theta_t\left[\frac{\partial(\Phi_{np})_t}{\partial\delta_k}-\frac{\partial(\Phi_{np})_t}{\partial\delta_{k-1}}\right]=0,\quad k=2,3,...,n.\end{gathered} \tag{14}$$

По правилу дифференцирования сложных функций в выражениях (12) и (14)

$$\begin{gathered}\frac{\partial(\Phi_{np})_t}{\partial\delta_k}=\Omega_1^{(t)}\frac{\partial\varepsilon_x}{\partial\delta_k}+\Omega_2^{(t)}\frac{\partial\varepsilon_y}{\partial\delta_k}+\Omega_3^{(t)}\frac{\partial\gamma_{xy}}{\partial\delta_k};\\ \frac{\partial(\Phi_{np})_t}{\partial\varphi_k}=\Omega_1^{(t)}\frac{\partial\varepsilon_x}{\partial\varphi_k}+\Omega_2^{(t)}\frac{\partial\varepsilon_y}{\partial\varphi_k}+\Omega_3^{(t)}\frac{\partial\gamma_{xy}}{\partial\varphi_k}+\Delta_{tk}\gamma_{12t}\left(\bar{A}\eta_t+\bar{B}\right),\end{gathered} \tag{15}$$

где Δ_{tk} – дельта Кронекера;

$$\Omega_1^{(t)}=\frac{\partial(\Phi_{np})_t}{\partial\varepsilon_x};\quad \Omega_2^{(t)}=\frac{\partial(\Phi_{np})_t}{\partial\varepsilon_y};\quad \Omega_3^{(t)}=\frac{\partial(\Phi_{np})_t}{\partial\gamma_{xy}};$$

$$\Omega_{1,2}^{(t)}=\pm\frac{\bar{A}\eta_t+\bar{B}}{2}cos2\varphi_k+\frac{p_3}{2}\eta_t\pm2p_4\left(\varepsilon_x-\varepsilon_y\right)+\frac{p_5+p_6\varepsilon}{2}; \tag{16}$$

$$\Omega_3^{(t)}=\frac{\bar{A}\eta_t+\bar{B}}{2}sin2\varphi_k+2p_4\gamma_{xy}.$$

Найдем производные деформаций (7) по толщине δ_k и углу укладки φ_k k-го слоя и подставим их в формулы (15), а последние – в условия оптимальности (12) и (14). Учтем, что согласно (8) и (9)

$$\frac{\partial B_{ij}}{\partial \delta_k} = b_{ij}(\varphi_k); \quad \frac{\partial B_{ij}}{\partial \varphi_k} = \delta_k \left.\frac{\partial b_{ij}}{\partial \varphi}\right|_{\varphi=\varphi_k}, \tag{17}$$

где $\partial b_{11}/\partial\varphi = -sin2\varphi\left(\bar{R} + \bar{S}cos2\varphi\right);$

$$\partial b_{22}/\partial\varphi = -sin2\varphi\left(-\bar{R} + \bar{S}cos2\varphi\right); \tag{18}$$

$\partial b_{33}/\partial\varphi = \partial b_{12}/\partial\varphi = \bar{S}sin2\varphi cos2\varphi,$

а разности коэффициентов жесткости b_{ij} в соседних слоях пакета составляют:

$$b_{11}(\varphi_k) - b_{11}(\varphi_{k-1}) = a_k\left[\bar{R} + \bar{S}b_k\right];$$

$$b_{22}(\varphi_k) - b_{22}(\varphi_{k-1}) = a_k\left[-\bar{R} + \bar{S}b_k\right]; \tag{19}$$

$$b_{33}(\varphi_k) - b_{33}(\varphi_{k-1}) = b_{12}(\varphi_k) - b_{12}(\varphi_{k-1}) = -\bar{S}a_k b_k,$$

где $$a_k = \frac{cos2\varphi_k - cos2\varphi_{k-1}}{2}; \quad b_k = \frac{cos2\varphi_k + cos2\varphi_{k-1}}{2}. \tag{20}$$

После ряда громоздких преобразований разрешающая система уравнений (12) – (14) примет следующий вид:

$$1 - \sum_{t=1}^{n}\theta_t\left(\Omega_1^{(t)}\frac{\partial\varepsilon_x}{\partial\delta_1} + \Omega_2^{(t)}\frac{\partial\varepsilon_y}{\partial\delta_1} + \Omega_3^{(t)}\frac{\partial\gamma_{xy}}{\partial\delta_1}\right) = 0;$$
$$a_k\left(\bar{M}_{np} + \bar{N}_{np}b_k\right) = 0, \quad k = 2,3,\ldots,n; \tag{21}$$

$$\delta_k sin2\varphi_k\left(\bar{M}_{np} + \bar{N}_{np}cos2\varphi_k\right) +$$
$$+\theta_k\left(\bar{A}\eta_k + \bar{B}\right)\gamma_{12k} = 0, \quad k = 1,2,\ldots,n; \tag{22}$$

$$\theta_k\left[1 - \Phi_{np}(\varphi_k)\right] = 0, \quad k = 1,2,\ldots,n, \tag{23}$$

где

$$\bar{M}_{np} = \frac{\bar{R}}{B}\sum_{t=1}^{n}\theta_t\left[\Omega_1^{(t)}\left(B_{22}\varepsilon_x + B_{12}\varepsilon_y\right) - \Omega_2^{(t)}\left(B_{11}\varepsilon_y + B_{12}\varepsilon_x\right)\right];$$
$$\bar{N}_{np} = \bar{S}\sum_{t=1}^{n}\theta_t\left\{\frac{\varepsilon_x - \varepsilon_y}{B}\left[\Omega_1^{(t)}\left(B_{22} + B_{12}\right) - \right.\right. \tag{24}$$
$$\left.\left. -\Omega_2^{(t)}\left(B_{11} + B_{12}\right)\right] - \Omega_3^{(t)}\frac{\gamma_{xy}}{B_{33}}\right\}.$$

Как отмечается в [5], соотношения типа (21) – (23) представляют собой необходимые условия существования решения в задаче на поиск экстремума функции (1) с ограничениями в виде неравенств (2), т.е. параметры оптимальной по прочности структуры КМ должны удовлетворять всему комплексу условий (21) – (23).

Уравнения (21) – (23) являются трансцендентными и могут быть решены только численными методами. Однако они допускают качественную оценку вероятных оптимумов, т.е. анализ возможных классов рациональных схем укладки, который планируется провести в дальнейших исследованиях.

В заключение отметим следующее. Выше уже указывалось, что в общем случае неравнопрочных структур оптимум всегда лежит на границе допустимой области, которая в рассматриваемой задаче определяется критерием прочности. Учитывая согласно (3) характер функциональной зависимости $\Phi_{np}(\eta_k)$ (см. рисунок 1), можно сделать вывод о том, что каждая точка на границе этой области соответствует одному значению параметра η [10]: $\eta = -\bar{B}/\bar{A}$ или $\eta = \gamma_o$. Это, в свою очередь, означает, что в таких структурах условия прочности выполняются в виде строгого равенства не более чем для двух слоев, а все остальные имеют некоторый запас по прочности.

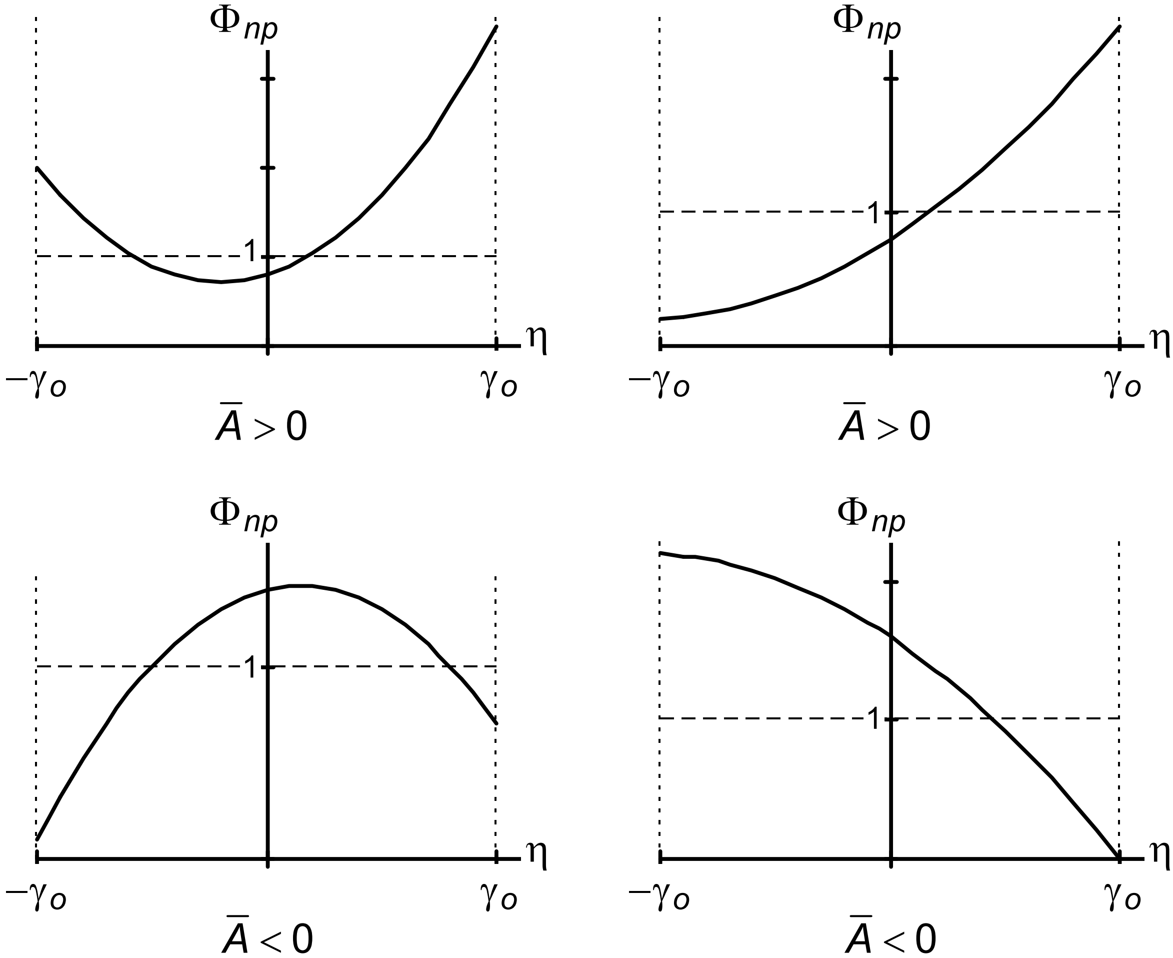

Рисунок 1 – Характер зависимости $(\Phi_{np})_k = \Phi_{np}(\eta_k)$

Список использованных источников

1. Pramila, A. Extrema and zeros of coefficients of thermal expansion of a balanced symmetric laminate [Text] / A. Pramila // Journal of Composite Materials. – 1990. – Vol. 24. – P. 786 – 794.

2. Tauchert, T.R. Design of laminated plates for maximum stiffness [Text] / T.R. Tauchert, S. Adibhatla // Journal of Composite Materials. – 1984. – Vol. 18. – P. 58 – 69.

3. Schmit, L.A. Optimum design of laminated fibre composite plates [Text] / L.A. Schmit, B. Farshi // International journal for numerical methods in engineering. – 1977. – Vol. 11, No.4. – P. 623 – 640.

4. Kam, T.Y. Optimal design of laminated composite plates using a global optimization technique [Text] / T.Y. Kam, J.A. Snyman // Composite Structures. – 1991. – Vol. 19. – P. 351 – 370.

5. Реклейтис, Г. Оптимизация в технике: в 2 кн. Кн. 2. Пер. с англ. [Текст] / Г. Реклейтис, А. Рейвиндран, К. Рэгсдел. – М.: Мир, 1986. – 320 с.

6. Образцов, И.Ф. Оптимальное армирование оболочек вращения из композиционных материалов [Текст] / И.Ф. Образцов, В.В. Васильев, В.А. Бунаков. – М.: Машиностроение, 1977. – 144 с.

7. Fukunaga, H. On Laminate configurations for simultaneous failure / H. Fukunaga, T.W. Chou [Text] // Journal of Composite Materials. – 1988. – Vol. 22. – P. 271 – 286.

8. Немировский, Ю.В. К вопросу об оптимальной укладке арматуры в пластинках [Текст] / Ю.В. Немировский // Механика полимеров. – 1978. – № 4. – С. 675 – 682.

9. Чедрик, В.В. Практические методы оптимального проектирования конструкций из слоистых композиционных материалов [Текст] / В.В. Чедрик // Механика композиционных материалов и конструкций. – 2005. – Т. 11, № 2. – С.184 – 198.

10. Гагауз, П.М. О равнопрочных и равнонапряженных структурах композиционных материалов [Текст] / П.М. Гагауз // Вопросы проектирования и производства конструкций летательных аппаратов: сб. науч. тр. Нац. аэрокосм. ун-та им. Н.Е. Жуковского «ХАИ». – Вып. 2(70). – Х., 2012. – С.42 – 51.

Поступила в редакцию 17.09.2012.
Рецензент: д-р техн. наук, проф. Я.С. Карпов, Национальный аэрокосмический университет им. Н.Е. Жуковского «ХАИ», г. Харьков.