

КРАЕВЫЕ ЗАДАЧИ ТЕОРИИ УПРУГОСТИ ДЛЯ ОРТОТРОПНЫХ ПЛАСТИН, ОГРАНИЧЕННЫХ КООРДИНАТНЫМИ ЛИНИЯМИ ДЕКАРТОВОЙ И ПАРАБОЛИЧЕСКОЙ СИСТЕМ КООРДИНАТ

Тонкостенные элементы конструкций, применяемые в технике, в большинстве случаев анизотропны естественно или конструктивно. Они широко применяются в авиа- и ракетостроении, кораблестроении и т.д. Используемые при этом материалы, как правило, содержат полости, трещины и другие дефекты структуры. Такие дефекты неизбежно возникают либо при изготовлении материалов и изделий, либо образуются в них в процессе эксплуатации под воздействием нагрузок или внешней среды. Влияние этих факторов способствует постепенному развитию дефектов, которые со временем могут привести к исчерпанию возможностей конструкции. В связи с этим изучение поведения анизотропных элементов конструкции при различных условиях нагружения, в частности, анализ напряженно-деформированного состояния вблизи концентраторов напряжений, является особенно актуальным.

Имеется лишь небольшое число публикаций, посвященных созданию новых и развитию имеющихся методов исследования задач математической теории упругости анизотропных тел. Это обстоятельство прямо связано с существенными математическими трудностями построения эффективных общих решений соответствующих краевых задач, поскольку исходная система уравнений представляет собой сложную систему дифференциальных уравнений и физических законов, часто в сочетании с непростой геометрией исходной области. В обзорных статьях [1, 2] с достаточной полнотой представлена история проблемы исследования закономерностей напряженного состояния в анизотропных телах.

Предлагаемый в работе аналитический подход к решению краевых задач теории упругости для ортотропных пластин непосредственно связан с математической проблемой расчета ответственных конструкций летательных аппаратов, которые должны обладать прочностной надежностью при наличии в материале и элементах конструкций исходных или появляющихся в процессе эксплуатации дефектов. Он основан на специальном преобразовании общих решений уравнений равновесия двумерных задач теории упругости для ортотропных тел, позволяющем выразить эти решения через две гармонические функции, каждая из которых связана с определенной системой координат. Параметры, определяющие параболическую границу, выбраны так, чтобы граничные координатные линии введенных параболических систем координат совпадали. Полученные общие решения краевых задач в виде суперпозиции двух частных решений уравнений равновесия в сочетании с методом Фурье позволяют точно удовлетворить граничным условиям основных краевых задач для

ортотропных пластин. Дано точное решение первой краевой задачи для неограниченной ортотропной пластины, ослабленной параболическим вырезом, в частности, полубесконечным прямоугольным разрезом.

Однородные уравнения равновесия тонких упругих пластин в случае двумерных (плоских) задач теории упругости имеют вид

$$\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} = 0, \quad \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} = 0, \quad (1)$$

где σ_x , σ_y , τ_{xy} – компоненты тензора напряжений.

Деформированное состояние пластины определяется тремя компонентами тензора деформаций, которые в рамках линейной теории упругости выражаются через проекции вектора перемещений $\vec{U} = u_x \vec{e}_x + u_y \vec{e}_y$ по формулам

$$\varepsilon_x = \frac{\partial u_x}{\partial x}, \quad \varepsilon_y = \frac{\partial u_y}{\partial y}, \quad \gamma_{xy} = \frac{\partial u_x}{\partial y} + \frac{\partial u_y}{\partial x} \quad (2)$$

и удовлетворяют условиям совместности

$$\frac{\partial^2 \varepsilon_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_y}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 \gamma_{xy}}{\partial x \partial y}. \quad (3)$$

Физические уравнения (уравнения обобщенного закона Гука) для ортотропной в осях X и Y пластины имеют вид

$$\varepsilon_x = \frac{1}{E_1} \sigma_x - \frac{\nu_{21}}{E_2} \sigma_y, \quad \varepsilon_y = -\frac{\nu_{12}}{E_1} \sigma_x + \frac{1}{E_2} \sigma_y, \quad \gamma_{xy} = \frac{1}{G_{12}} \tau_{xy}, \quad (4)$$

где $E_1 = E_x$, $E_2 = E_y$ – модули упругости материала на растяжение (сжатие) в направлении осей x и y ; $G_{12} = G_{xy}$ – модуль сдвига в плоскости xy ; $\nu_{12} = \nu_{xy}$, $\nu_{21} = \nu_{yx}$ – коэффициенты Пуассона; $E_1 \nu_{21} = E_2 \nu_{12}$.

Из соотношений (4) следует, что

$$\sigma_x = \bar{E}_1 \varepsilon_x + \bar{E}_1 \nu_{21} \varepsilon_y, \quad \sigma_y = \bar{E}_1 \nu_{21} \varepsilon_x + \bar{E}_2 \varepsilon_y, \quad \tau_{xy} = G_{12} \gamma_{xy};$$

$$\bar{E}_1 = \frac{E_1}{1 - \nu_{12} \nu_{21}}, \quad \bar{E}_2 = \frac{E_2}{1 - \nu_{12} \nu_{21}}, \quad \frac{E_2 \nu_{12}}{1 - \nu_{12} \nu_{21}} = \frac{E_1 \nu_{21}}{1 - \nu_{12} \nu_{21}} = \bar{E}_2 \nu_{12} = \bar{E}_1 \nu_{21}. \quad (5)$$

Известно [3], что если ввести вспомогательную функцию (функцию напряжений) $F = F(x, y)$ так, чтобы

$$\sigma_x = \frac{\partial^2 F}{\partial y^2}, \quad \sigma_y = \frac{\partial^2 F}{\partial x^2}, \quad \tau_{xy} = -\frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y}, \quad (6)$$

то уравнения равновесия (1) удовлетворяются тождественно, а сама функция напряжений на основании (3), (4), (6) удовлетворяет дифференциальному уравнению

$$\frac{E_1}{E_2} \frac{\partial^4 F}{\partial x^4} + \left(\frac{E_1}{G_{12}} - 2\nu_{12} \right) \frac{\partial^4 F}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 F}{\partial y^4} = 0. \quad (7)$$

В случае изотропной пластины $E_1 = E_2 = E$, $\nu_{12} = \nu_{21} = \nu$, $G_{12} = G = \frac{E}{2(1+\nu)}$ и тогда уравнение (7) является бигармоническим уравнением.

Применение формул (6) не вызывает затруднений при решении первой краевой задачи для односвязных пластин, ограниченных координатными линиями декартовой системы координат xu . Однако они непригодны для получения аналитических решений основных (первой, второй и смешанной) краевых задач в случае ортотропных пластин, ограниченных координатными линиями одной или нескольких криволинейных систем координат. Это обстоятельство связано с нахождением частных производных различного порядка от функции $F(x, y)$ по криволинейным координатам, что приводит к появлению различных степеней коэффициентов Ламе в знаменателях выражений для напряжений (6). Поэтому точное удовлетворение граничным условиям краевых задач на основании (6) сопряжено со значительными трудностями или вообще невозможно.

Для преодоления возникающих затруднений вначале вместо (6) получим более простые представления для напряжений и на их основе построим новые общие решения уравнений равновесия в перемещениях и напряжениях. С этой целью введем безразмерные величины δ_1, δ_2 ($\delta_j > 0$) по формулам

$$\delta_1^2 + \delta_2^2 = \omega = \frac{E_1}{G_{12}} - 2\nu_{12}, \quad \delta_1^2 \delta_2^2 = \lambda = \frac{E_1}{E_2} \quad (\omega > 0, \omega^2 - 4\lambda \geq 0),$$

откуда в силу симметрии этих формул относительно δ_1, δ_2 имеем

$$\delta_1 = \sqrt{\frac{1}{2}(\omega + \sqrt{\omega^2 - 4\lambda})}, \quad \delta_2 = \sqrt{\frac{1}{2}(\omega - \sqrt{\omega^2 - 4\lambda})}, \quad \text{либо} \quad \delta_1 = \sqrt{\frac{1}{2}(\omega - \sqrt{\omega^2 - 4\lambda})},$$

$$\delta_2 = \sqrt{\frac{1}{2}(\omega + \sqrt{\omega^2 - 4\lambda})}.$$

Теперь уравнение (7) можно записать в виде

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial y^2} + \delta_2^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2} \right) \left(\frac{\partial^2 F}{\partial y^2} + \delta_1^2 \frac{\partial^2 F}{\partial x^2} \right) \equiv \left(\frac{\partial^2}{\partial y^2} + \delta_1^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2} \right) \left(\frac{\partial^2 F}{\partial y^2} + \delta_2^2 \frac{\partial^2 F}{\partial x^2} \right) = 0. \quad (8)$$

Вместо переменной y и функции $F = F(x, y)$ введем переменные y_j

и функции $F_j = F_j(x, y_j)$ по формулам $y_j = \delta_j y$, $F_j(x, y_j) = F(x, \frac{y_j}{\delta_j})$, либо

$$y_j = \delta_j y - \gamma_j \quad (\gamma_j - \text{const}), \quad F_j(x, y_j) = F(x, \frac{y_j + \gamma_j}{\delta_j}) \quad (j=1, 2).$$

Уравнение (8) при такой замене распадается на два уравнения

$$\left(\delta_j^2 \frac{\partial^2}{\partial y_j^2} + \delta_{3-j}^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2} \right) \left(\frac{\partial^2 F_j}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 F_j}{\partial y_j^2} \right) = 0 \quad (j=1, 2). \quad (9)$$

Если в качестве $F_j(x, y_j)$ выбрать гармонические функции переменных x и y_j , то они будут удовлетворять уравнениям (9), (8), (7).

Преобразуем формулы (6) для напряжений с учетом того, что гармонические функции $F_j(x, y_j)$ переменных x и y_j ($j=1, 2$) удовлетворяют исходному дифференциальному уравнению (7).

$$\text{Так как } \Delta F_j = \frac{\partial^2 F_j}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 F_j}{\partial y_j^2} = 0, \text{ то } \frac{\partial^2 F_j}{\partial y_j^2} = -\frac{\partial^2 F_j}{\partial x^2}, \quad \frac{\partial^2 F_j}{\partial y^2} = \delta_j^2 \frac{\partial^2 F_j}{\partial y_j^2} = -\delta_j^2 \frac{\partial^2 F_j}{\partial x^2} \text{ и,}$$

$$\text{следовательно, } \tau_{xy}^{(j)} = -\frac{\partial^2 F_j}{\partial x \partial y}, \quad \sigma_y^{(j)} = \frac{\partial^2 F_j}{\partial x^2}, \quad \sigma_x^{(j)} = -\delta_j^2 \frac{\partial^2 F_j}{\partial x^2} = -\delta_j^2 \sigma_y^{(j)}.$$

Положим

$$\frac{\partial F_j}{\partial x} = \frac{a}{\delta_j} l_j, \quad l_j = l_j(x, y_j) \quad (j=1, 2), \quad (10)$$

где a – параметр, определяемый выбором исходной криволинейной системы координат. Так как $F_j = F_j(x, y_j)$ – гармонические функции переменных x, y_j , то $l_j = l_j(x, y_j)$ – также гармонические функции этих переменных. На основании (10) получаем простые по структуре представления для напряжений

$$\tau_{xy}^{(j)} = -\frac{a}{\delta_j} \frac{\partial l_j}{\partial y}, \quad \sigma_x^{(j)} = -a \delta_j \frac{\partial l_j}{\partial x}, \quad \sigma_y^{(j)} = \frac{a}{\delta_j} \frac{\partial l_j}{\partial x} = -\frac{1}{\delta_j^2} \sigma_x^{(j)} \quad (j=1, 2). \quad (11)$$

Используя теперь формулы (2), (5), (11), для нахождения соответствующих компонент $u_x^{(j)}, u_y^{(j)}$ вектора перемещений $\vec{u}_j = u_x^{(j)} \vec{e}_x + u_y^{(j)} \vec{e}_y$ имеем систему уравнений

$$\bar{E}_1 \frac{\partial u_x^{(j)}}{\partial x} + \bar{E}_1 \nu_{21} \frac{\partial u_y^{(j)}}{\partial y} = -a \delta_j \frac{\partial l_j}{\partial x}, \quad \bar{E}_1 \nu_{12} \frac{\partial u_x^{(j)}}{\partial x} + \bar{E}_2 \frac{\partial u_y^{(j)}}{\partial y} = \frac{a}{\delta_j} \frac{\partial l_j}{\partial x}; \quad (12)$$

$$G_{12} \left[\frac{\partial u_x^{(j)}}{\partial y} + \frac{\partial u_y^{(j)}}{\partial x} \right] = -\frac{a}{\delta_j} \frac{\partial l_j}{\partial y}, \quad (j=1, 2).$$

Из первых двух уравнений системы (12) получаем

$$\frac{\partial u_x^{(j)}}{\partial x} = -\frac{\bar{E}_1 v_{12} + \delta_j^2 \bar{E}_2}{\bar{E}_1 \bar{E}_2 - (\bar{E}_1 v_{12})^2} \frac{a}{\delta_j} \frac{\partial I_j}{\partial x} = -\frac{a(\delta_j^2 + v_{12})}{\delta_j E_1} \frac{\partial I_j}{\partial x},$$

$$\frac{\partial u_y^{(j)}}{\partial y} = \frac{\bar{E}_1 + \delta_j^2 \bar{E}_2 v_{12}}{\bar{E}_1 \bar{E}_2 - (\bar{E}_1 v_{12})^2} \frac{a}{\delta_j} \frac{\partial I_j}{\partial x} = \frac{a \delta_j (\delta_{3-j}^2 + v_{12})}{E_1} \frac{\partial I_j}{\partial x}.$$

Отсюда в силу гармоничности функций I_j , $u_x^{(j)}$, $u_y^{(j)}$ по переменным x, y_j следует, что

$$u_x^{(j)} = -\frac{a(\delta_j^2 + v_{12})}{\delta_j E_1} I_j, \quad u_y^{(j)} = \frac{a \delta_j (\delta_{3-j}^2 + v_{12})}{E_1} \int \frac{\partial I_j}{\partial x} dy \quad (j=1, 2). \quad (13)$$

Функции (13) с учетом равенств $\delta_j^2 + \delta_{3-j}^2 + 2v_{12} = \frac{E_1}{G_{12}}$, $\frac{\partial^2 I_j}{\partial x^2} = -\frac{1}{\delta_j^2} \frac{\partial^2 I_j}{\partial y^2}$ тождественно удовлетворяют третье уравнение системы (12). При этом в формулах (13) $I_j = I_j(x, y_j)$ и $\delta_j \int \frac{\partial I_j}{\partial x} dy = \int \frac{\partial I_j}{\partial x} dy_j$ – сопряженные гармонические функции переменных x, y_j .

Общие решения уравнений равновесия ортотропных пластин можно теперь на основании (11), (13) представить через две гармонические функции $I_j = I_j(x, y_j)$ переменных x, y_j в следующей форме:

$$\sigma_x = \sigma_x^{(1)} + \sigma_x^{(2)}, \quad \sigma_y = \sigma_y^{(1)} + \sigma_y^{(2)}, \quad \tau_{xy} = \tau_{xy}^{(1)} + \tau_{xy}^{(2)};$$

$$u_x = u_x^{(1)} + u_x^{(2)}, \quad u_y = u_y^{(1)} + u_y^{(2)}. \quad (14)$$

При $\delta_1 \neq \delta_2$ ($\omega^2 \neq 4\lambda$) представление (14) является общим (функции I_j линейно независимы). В случае $\delta_1 = \delta_2 = \delta$ ($\omega^2 = 4\lambda$) функции I_1, I_2 образуют линейно зависимую систему и тогда надо либо построить решение уравнений (1), не выражающееся линейно через уже имеющееся решение (построенное с помощью функции I_1), либо в исходной краевой задаче ($\delta_1 \neq \delta_2$) осуществить предельный переход $\delta_1 \rightarrow \delta_2 = \delta$.

Общие решения (14) в сочетании с методом Фурье позволяют получить простые выражения для проекций вектора перемещений и вектора напряжений на границах ортотропных параболических пластин и тем самым точно удовлетворить граничным условиям основных краевых задач в предположении, что ось симметрии у пластины совпадает с соответствующей осью анизотропии.

Пусть $\langle x, y \rangle, \langle \alpha, \beta \rangle$ – исходные декартова и параболическая сис-

темы координат, связанные соотношениями

$$x = a\alpha\beta, \quad y = \frac{1}{2}a(\alpha^2 - \beta^2) \quad (-\infty < \alpha < \infty, 0 \leq \beta < \infty). \quad (15)$$

Уравнение $\beta = \beta_0 = \text{const}$ определяет параболу

$$y = \frac{x^2}{2a\beta_0^2} - \frac{1}{2}a\beta_0^2. \quad (16)$$

При $\delta_1 \neq \delta_2$ каждую из гармонических функций I_j ($j=1, 2$) будем рассматривать как функцию параболических координат α_j, β_j , определяемых формулами

$$x_j = a_j\alpha_j\beta_j, \quad y_j = \frac{1}{2}a_j(\alpha_j^2 - \beta_j^2) \quad (a_j > 0, -\infty < \alpha_j < \infty, 0 \leq \beta_j < \infty). \quad (17)$$

Соответствующие декартовы координаты x_j, y_j свяжем с исходными декартовыми координатами x, y равенствами

$$x_j = x, \quad y_j = \delta_j y - \gamma_j \quad (\gamma_j = \text{const}). \quad (18)$$

Уравнение $\beta_j = \beta_{j0} = \text{const}$ определяет параболу

$$y_j = \frac{x_j^2}{2a_j\beta_{j0}^2} - \frac{1}{2}a_j\beta_{j0}^2 \quad (x_j = x),$$

совпадающую с исходной параболой (16) при условии, что $\delta_j a_j \beta_{j0}^2 = a\beta_0^2$,

$\gamma_j = \frac{1}{2}a_j\beta_{j0}^2 - \frac{1}{2}a\delta_j\beta_0^2$. Положим $a_j = \delta_j a$. Тогда

$$\delta_j \beta_{j0} = \beta_0, \quad \gamma_j = \frac{1}{2}a\delta_j(\beta_{j0}^2 - \beta_0^2), \quad (19)$$

$x_j|_{\beta_j=\beta_{j0}} = a_j\alpha_j\beta_{j0} = \delta_j a\alpha_j\beta_{j0} = a\alpha_j\beta_0$, $x|_{\beta=\beta_0} = a\alpha\beta_0$ и так как

$x_1 = x_2 = x$, то на совпадающих параболах $\beta_j = \beta_{j0}$, $\beta = \beta_0$ выполняются равенства

$$\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha. \quad (20)$$

В соответствии с (15), (17) коэффициенты Ламе параболических систем координат $\langle \alpha, \beta \rangle$, $\langle \alpha_j, \beta_j \rangle$ имеют вид

$$H_\alpha = H_\beta = ah, \quad h = \sqrt{\alpha^2 + \beta^2}, \quad H_{\alpha_j} = H_{\beta_j} = a_j h_j, \quad h_j = \sqrt{\alpha_j^2 + \beta_j^2},$$

а направляющие косинусы $n_x, n_y, n_x^{(j)}, n_y^{(j)}$ единичных внешних нормалей $\vec{n} = n_x \vec{e}_x + n_y \vec{e}_y$, $\vec{n}_j = n_x^{(j)} \vec{e}_x + n_y^{(j)} \vec{e}_y$ к границам $\beta = \beta_0$, $\beta_j = \beta_{j0}$ параболических областей определяются формулами

$$n_x = \pm \frac{\alpha}{h_0}, n_y = \mp \frac{\beta_0}{h_0}; n_x^{(j)} = \pm \frac{\alpha_j}{h_{j0}}, n_y^{(j)} = \mp \frac{\delta_j \beta_{j0}}{h_{j0}};$$

$$h_0 = \sqrt{\alpha^2 + \beta_0^2}, h_{j0} = \sqrt{\alpha_j^2 + \delta_j^2 \beta_{j0}^2} \quad (j=1, 2).$$

Из равенств (19), (20) следует, что на этих границах

$$h_{j0} = h_0; n_x^{(j)} = n_x = \pm \frac{\alpha}{h_0}, n_y^{(j)} = n_y = \mp \frac{\beta_0}{h_0}. \quad (21)$$

Знак «+» («-») соответствует внутренним (внешним) краевым задачам для параболической области $0 \leq \beta \leq \beta_0$ ($\beta_0 \leq \beta < \infty$).

Если на границе $\beta = \beta_0$ задан вектор напряжений $\vec{F} = F_x \vec{e}_x + F_y \vec{e}_y$, то его проекции F_x, F_y на оси декартовой системы координат $\langle X, Y \rangle$ выражаются формулами $F_x = \sigma_x n_x + \tau_{xy} n_y, F_y = \tau_{xy} n_x + \sigma_y n_y$. Найдем проекции $F_x^{(j)} \Big|_{\beta_j = \beta_{j0}}, F_y^{(j)} \Big|_{\beta_j = \beta_{j0}}$, соответствующие частным решениям (11).

Используя равенства (20), (21) и выражения для частных производных функций I_j

$$\frac{\partial I_j}{\partial x} = \frac{1}{a \delta_j h_j^2} \left(\beta_j \frac{\partial I_j}{\partial \alpha_j} + \alpha_j \frac{\partial I_j}{\partial \beta_j} \right), \frac{\partial I_j}{\partial y} = \frac{1}{a h_j^2} \left(\alpha_j \frac{\partial I_j}{\partial \alpha_j} - \beta_j \frac{\partial I_j}{\partial \beta_j} \right), \quad (22)$$

получаем простые формулы (рисунок)

$$F_x^{(j)} \Big|_{\beta_j = \beta_{j0}} = \mp \frac{1}{h_0} \frac{\partial I_j}{\partial \beta_j} \Big|_{\beta_j = \beta_{j0}}; F_y^{(j)} \Big|_{\beta_j = \beta_{j0}} = \mp \frac{1}{\delta_j h_0} \frac{\partial I_j}{\partial \alpha_j} \Big|_{\beta_j = \beta_{j0}}. \quad (23)$$

Общие решения краевых задач для ортотропных параболических пластин $0 \leq \beta_j \leq \beta_{j0}, \beta_{j0} \leq \beta_j < \infty$ и проекции вектора напряжений на границе $\beta = \beta_0$ согласно представлениям (11), (13), (23) выражаются через гармонические функции $I_j = I_j(\alpha_j, \beta_j)$ ($j=1, 2$) параболических координат и их частные производные первого порядка по этим координатам в виде сумм

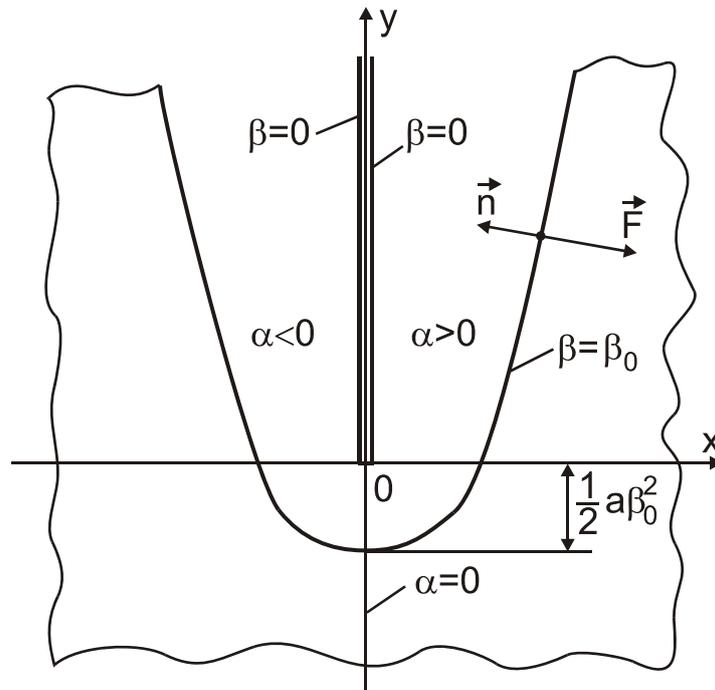
$$u_x = u_x^{(1)} + u_x^{(2)}, u_y = u_y^{(1)} + u_y^{(2)}; \sigma_x = \sigma_x^{(1)} + \sigma_x^{(2)}, \sigma_y = \sigma_y^{(1)} + \sigma_y^{(2)}, \tau_{xy} = \tau_{xy}^{(1)} + \tau_{xy}^{(2)}; \quad (24)$$

$$F_x \Big|_{\beta = \beta_0} = F_x^{(1)} \Big|_{\beta_1 = \beta_{10}} + F_x^{(2)} \Big|_{\beta_2 = \beta_{20}}, F_y \Big|_{\beta = \beta_0} = F_y^{(1)} \Big|_{\beta_1 = \beta_{10}} + F_y^{(2)} \Big|_{\beta_2 = \beta_{20}}. \quad (25)$$

В качестве примера рассмотрим задачу о равновесии ортотропной параболической пластины $\beta_0 \leq \beta < \infty$, часть границы которой $\beta = \beta_0$

$|\alpha| < \alpha_0$ ($\alpha_0 = \text{const}$) находится под действием гидростатического давления интенсивности $\sigma_0 = \text{const}$ ($\sigma_0 > 0$), а остальная часть границы $\beta = \beta_0$, $|\alpha| > \alpha_0$ свободна от внешних усилий, т.е.

$$\vec{F}|_{\beta=\beta_0} = \begin{cases} -\sigma_0 \vec{n} & (|\alpha| < \alpha_0), \\ 0 & (|\alpha| > \alpha_0); \end{cases} = \begin{cases} \sigma_0 h_0^{-1} (\alpha \vec{e}_x - \beta_0 \vec{e}_y) & (|\alpha| < \alpha_0), \\ 0 & (|\alpha| > \alpha_0). \end{cases}$$



Геометрия пластины

Соответствующие граничные условия на основании равенств (23), (25) и симметрии задачи по координате $x(\alpha)$ имеют вид

$$\left. \frac{\partial I_1}{\partial \beta_1} \right|_{\beta_1=\beta_{10}} + \left. \frac{\partial I_2}{\partial \beta_2} \right|_{\beta_2=\beta_{20}} = \begin{cases} \sigma_0 \alpha & (0 \leq \alpha < \alpha_0), \\ 0 & (\alpha_0 < \alpha < \infty); \end{cases} \quad (26)$$

$$\frac{1}{\delta_1} \left. \frac{\partial I_1}{\partial \alpha_1} \right|_{\beta_1=\beta_{10}} + \frac{1}{\delta_2} \left. \frac{\partial I_2}{\partial \alpha_2} \right|_{\beta_2=\beta_{20}} = \begin{cases} -\sigma_0 \beta_0 & (0 \leq \alpha < \alpha_0), \\ 0 & (\alpha_0 < \alpha < \infty). \end{cases}$$

Гармонические функции I_j , обладающие указанной симметрией и исчезающие на бесконечности, являются интегральными разложениями Фурье по координате α_j ($j=1, 2$)

$$I_j = \int_0^{\infty} B_j(\mu) e^{-\beta_j \mu} \sin \alpha_j \mu d\mu. \quad (27)$$

Удовлетворяя граничным условиям (26) с помощью гармонических функций (27) и учитывая при этом равенства (20), получаем точные значения плотностей $B_j(\mu)$:

$$B_j(\mu) = (-1)^j \frac{\delta_j \sigma_0}{\delta_1 - \delta_2} \left[f_s(\mu) - \delta_{3-j} \beta_0 f_c(\mu) \right] \mu^{-1} e^{\beta_{j0} \mu}; \quad (28)$$

$$f_s(\mu) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\alpha_0} \alpha \sin \mu \alpha d\alpha = \frac{2}{\pi} \frac{\sin \mu \alpha_0 - \mu \alpha_0 \cos \mu \alpha_0}{\mu^2}, \quad f_c(\mu) = \frac{2}{\pi} \frac{\sin \mu \alpha_0}{\mu}.$$

Сами гармонические функции (27) могут быть выражены через элементарные функции в замкнутом виде.

$$\text{Вычислим напряжения } \sigma_x|_{\alpha=0}, \sigma_y|_{\alpha=0} \left(x = 0, y < -\frac{1}{2} a \beta_0^2 \right).$$

Используя для этой цели формулы (11), (22), (24), имеем

$$\sigma_x|_{\alpha=0} = \sigma_x^{(1)}|_{\alpha_1=0} + \sigma_x^{(2)}|_{\alpha_2=0} = -\frac{1}{\beta_1} \int_0^\infty \mu B_1(\mu) e^{-\beta_1 \mu} d\mu - \frac{1}{\beta_2} \int_0^\infty \mu B_2(\mu) e^{-\beta_2 \mu} d\mu;$$

$$\sigma_y|_{\alpha=0} = \sigma_y^{(1)}|_{\alpha_1=0} + \sigma_y^{(2)}|_{\alpha_2=0} = \frac{1}{\delta_1^2 \beta_1} \int_0^\infty \mu B_1(\mu) e^{-\beta_1 \mu} d\mu + \frac{1}{\delta_2^2 \beta_2} \int_0^\infty \mu B_2(\mu) e^{-\beta_2 \mu} d\mu.$$

Подставляя сюда плотности (28) и вычисляя соответствующие интегралы, значения $\sigma_x|_{\alpha=0}, \sigma_y|_{\alpha=0}$ находим в элементарных функциях

$$\sigma_x|_{\alpha=0} = \frac{2\sigma_0}{\pi(\delta_1 - \delta_2)} \sum_{j=1}^2 (-1)^{j-1} \left\{ \alpha_0 \frac{\delta_j}{\beta_j} - \left[\delta_j - \frac{\beta_0(1-\delta_1\delta_2)}{\beta_j} \right] \operatorname{arctg} \frac{\alpha_0}{\beta_j - \beta_{j0}} \right\}, \quad (29)$$

$$\sigma_y|_{\alpha=0} = \frac{2\sigma_0}{\pi(\delta_1 - \delta_2)} \sum_{j=1}^2 (-1)^j \delta_j^{-2} \left\{ \alpha_0 \frac{\delta_j}{\beta_j} - \left[\delta_j - \frac{\beta_0(1-\delta_1\delta_2)}{\beta_j} \right] \operatorname{arctg} \frac{\alpha_0}{\beta_j - \beta_{j0}} \right\}.$$

Входящие в (29) величины β_{j0} и β_j выражаются через параметр β_0 и координату $\beta = \sqrt{\frac{-2}{a} y}$ ($x = 0, y < -\frac{1}{2} a \beta_0^2$) исходной параболической системы координат:

$$\beta_{j0} = \beta_0 \delta_j^{-1}, \quad \beta_j = \sqrt{\beta_0^2 (\delta_j^{-2} - 1) + \beta^2} \quad (\beta > \beta_0). \quad (30)$$

В предельном случае $\beta_0 = 0$ из формул (18), (19), (30) следует, что $\beta_{j0} = 0, \gamma_j = 0, y_j = \delta_j y, \beta_j|_{\alpha=0} = \beta$, т.е. параболы $\beta = \beta_0, \beta_j = \beta_{j0}$ ($j=1, 2$) вырождаются в один и тот же полубесконечный промежуток $x = 0$,

$0 \leq y < \infty$, а исходная задача преобразуется в задачу о равновесии ортотропной плоскости, ослабленной разрезом (трещиной) $x = \pm 0$, $0 < y < \infty$ ($\beta = 0$). При этом все формулы существенно упрощаются, в частности, на полуоси $\alpha = 0$

$$\sigma_x|_{\alpha=0} = \frac{2\sigma_0}{\pi} \left(\frac{\alpha_0}{\beta} - \operatorname{arctg} \frac{\alpha_0}{\beta} \right), \quad \sigma_y|_{\alpha=0} = \frac{1}{\delta_1 \delta_2} \sigma_x|_{\alpha=0} \quad \left(\delta_1 \delta_2 = \sqrt{\frac{E_1}{E_2}} \right). \quad (31)$$

Поскольку $y = \frac{1}{2} a \alpha^2$, $0 < \alpha < \alpha_0 \Leftrightarrow 0 < y < y_0 = \frac{1}{2} a \alpha_0^2$ при $\beta = 0$ ($x = 0$, $0 < y < \infty$), $y = -\frac{1}{2} a \beta^2$ при $\alpha = 0$, то $\alpha_0 = \sqrt{\frac{2}{a} y_0}$, $\beta = \sqrt{-\frac{2}{a} y}$, $\frac{\alpha_0}{\beta} = \sqrt{-\frac{y_0}{y}}$ ($y < 0$) и, следовательно, в декартовых координатах формулы (31) принимают вид

$$\sigma_x|_{x=0, y<0} = \frac{2\sigma_0}{\pi} \left(\sqrt{-\frac{y_0}{y}} - \operatorname{arctg} \sqrt{-\frac{y_0}{y}} \right), \quad \sigma_y|_{x=0, y<0} = \sqrt{\frac{E_2}{E_1}} \sigma_x|_{x=0, y<0}.$$

При этом коэффициент интенсивности нормальных напряжений

$$K_I = \lim_{y \rightarrow 0} \left[\sigma_x|_{x=0, y<0} \sqrt{-2y} \right] = \frac{2}{\pi} \sigma_0 \sqrt{2y_0}.$$

Предельный переход $\delta_1 \rightarrow \delta_2 = \delta$ в напряжениях (29) дает значения

$$\begin{aligned} \sigma_x|_{\alpha=0} = \frac{2\sigma_0}{\pi} & \left\{ \frac{\alpha_0}{\beta_2} + \frac{\alpha_0 \beta_0^2}{\delta^2 \beta_2^3} + \left[1 - \frac{\beta_0(1-\delta^2)}{\delta \beta_2} \right] \frac{\alpha_0 \beta_0}{\beta_2} \frac{\delta \beta_2 - \beta_0}{(\delta \beta_2 - \beta_0)^2 + \delta^2 \alpha_0^2} - \right. \\ & \left. - \left[1 - \frac{\beta_0^3(1-\delta^2)}{\delta^3 \beta_2^3} \right] \operatorname{arctg} \frac{\delta \alpha_0}{\delta \beta_2 - \beta_0} \right\}; \\ \sigma_y|_{\alpha=0} = \frac{2\sigma_0}{\pi \delta^2} & \left\{ \frac{\alpha_0}{\beta_2} - \frac{\alpha_0 \beta_0^2}{\delta^2 \beta_2^3} - \left[1 - \frac{\beta_0(1-\delta^2)}{\delta \beta_2} \right] \frac{\alpha_0 \beta_0}{\beta_2} \frac{\delta \beta_2 - \beta_0}{(\delta \beta_2 - \beta_0)^2 + \delta^2 \alpha_0^2} - \right. \\ & \left. - \left[1 + \frac{\beta_0^3(1-\delta^2)}{\delta^3 \beta_2^3} - \frac{2(1-\delta^2)\beta_0}{\delta \beta_2} \right] \operatorname{arctg} \frac{\delta \alpha_0}{\delta \beta_2 - \beta_0} \right\}; \quad \beta_2 = \sqrt{\beta_0^2(\delta^{-2} - 1) + \beta^2} \quad (\beta > \beta_0). \end{aligned}$$

В случае изотропной пластины $\delta_1 = \delta_2 = \delta = 1$ и, следовательно, $\beta_2 = \beta$,

$$\sigma_x|_{\alpha=0} = \frac{2\sigma_0}{\pi} \left[\frac{\alpha_0}{\beta} + \frac{\alpha_0 \beta_0^2}{\beta^3} + \frac{\alpha_0 \beta_0}{\beta} \frac{\beta - \beta_0}{(\beta - \beta_0)^2 + \alpha_0^2} - \operatorname{arctg} \frac{\alpha_0}{\beta - \beta_0} \right];$$

$$\sigma_y|_{\alpha=0} = \frac{2\sigma_0}{\pi} \left[\frac{\alpha_0}{\beta} - \frac{\alpha_0\beta_0^2}{\beta^3} - \frac{\alpha_0\beta_0}{\beta} \frac{\beta-\beta_0}{(\beta-\beta_0)^2 + \alpha_0^2} - \operatorname{arctg} \frac{\alpha_0}{\beta-\beta_0} \right].$$

Соотношения между гармоническими функциями в декартовых и параболических координатах

$$e^{-\lambda y_j} \begin{Bmatrix} \cos \lambda x_j \\ \sin \lambda x_j \end{Bmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2\pi a_j \lambda}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{\mu^2}{2a_j \lambda}} e^{\mu \beta_j} \begin{Bmatrix} \cos \mu \alpha_j \\ \sin \mu \alpha_j \end{Bmatrix} d\mu \quad (\lambda > 0);$$

$$e^{-\mu \beta_j} \begin{Bmatrix} \cos \mu \alpha_j \\ \sin \mu \alpha_j \end{Bmatrix} = \frac{\mu}{\sqrt{2\pi a_j}} \int_0^{\infty} \lambda^{-\frac{3}{2}} e^{-\frac{\mu^2}{2a_j \lambda}} e^{\lambda y_j} \begin{Bmatrix} \cos \lambda x_j \\ \sin \lambda x_j \end{Bmatrix} d\lambda \quad (y_j \leq 0)$$

позволяют исследовать основные краевые задачи для ортотропной пластины $-h < y < \infty$, $-\infty < x < \infty$ ($h > 0$), ослабленной параболическим вырезом $0 \leq \beta < \beta_0$ ($\frac{1}{2} a \beta_0^2 < h$), в частности разрезом (трещиной) $\beta = 0$ ($x = \pm 0$, $0 < y < \infty$). Эти соотношения являются простой модификацией формул разложения гармонических функций [4] на случай ортотропных пластин.

Список использованных источников

1. Космодамианский, А.С. Концентрация внутренней энергии в многосвязных телах [Текст] / А.С. Космодамианский // Прикладная механика. – 2002. – Т.38, № 4. – С.21–48.
2. Немиш, Ю.Н. Развитие аналитических методов в трехмерных задачах статики анизотропных тел (обзор) [Текст] / Ю.Н. Немиш // Прикладная механика. – 2000. – Т.36, № 2. – С.3–38.
3. Лехницкий, С.Г. Теория упругости анизотропного тела [Текст] / С.Г. Лехницкий. – М.: Наука, 1977. – 416 с.
4. Проценко, В.С. Некоторые соотношения между решениями уравнений Ламе в декартовых, параболических и эллиптических координатах [Текст] / В.С. Проценко, А.И. Соловьев // Докл. АН УССР. Сер. А. – 1985. – № 4. – С.37–40.

Поступила в редакцию 18.04.2012.

*Рецензент: д-р физ.-мат. наук, проф. А. Г. Николаев,
Национальный аэрокосмический университет
им. Н. Е. Жуковского «ХАИ», г. Харьков*