

## О РАВНОПРОЧНЫХ И РАВНОНАПРЯЖЕННЫХ СТРУКТУРАХ КОМПОЗИЦИОННЫХ МАТЕРИАЛОВ

В практике инженерных расчетов задачи оптимального армирования конструкций из композиционных материалов (КМ) по характеру напряженно-деформированного состояния (НДС) можно условно разделить на два класса: плоское напряженное состояние и изгиб. В обоих случаях несущая способность разрабатываемого изделия во многом зависит от выбора толщины и ориентации слоев в пакете, однако в задачах второго типа не менее существенное влияние на общую жесткость системы оказывает последовательность (или порядок) укладки слоев, т.е. их относительное расположение в пакете [1, 2]. К первой группе относятся задачи о прочности тонкостенных композитных элементов, нагруженных распределенными (погонными) усилиями в плоскости армирования. Ко второй – вопросы поперечного изгиба, устойчивости, колебаний пластин, панелей, оболочек и т.д. Конечно, необходимость учета того или иного структурного параметра определяется, в первую очередь, формулировкой проблемы оптимального армирования. Например, распространяя дифференциальный подход [3] на проектирование трехслойных конструкций, можно разделить функции составляющих элементов следующим образом: толщину и направления укладки несущих композитных слоев находят из условий прочности, а высоту заполнителя и другие его параметры – из соображений устойчивости и жесткости. В этом случае влияние последовательности укладки монослоев КМ на общую изгибную жесткость оказывается пренебрежимо малым. Поэтому большой практический интерес представляет решение фундаментальной задачи оптимизации структуры КМ «в точке». Такая постановка проблемы оптимального армирования предполагает поиск количества слоев, их толщины и углов укладки, удовлетворяющих условиям прочности и обеспечивающих минимум массы.

Вопросы проектирования структуры КМ рассматривались многими авторами (см., например, [4 – 11]). Наиболее известными являются во многом схожие результаты работ [4 – 7], согласно которым оптимальному по прочности решению соответствует армирование конструкций по траекториям главных напряжений (или по критерию отсутствия касательных напряжений в слоях пакета). Область применения таких структур ограничивается, во-первых, анизотропией свойств получаемого в итоге композита и, во-вторых, строгой однозначностью условий нагружения (т.е. внешняя нагрузка считается постоянной).

С практической точки зрения большой интерес представляют теоретические исследования [9 – 11], которые изначально направлены на поиск необходимого и достаточного количества углов укладки, обеспе-

чивающих минимум массы и прочность КМ. Путем сетчатого анализа (использовалась нитяная модель КМ) в работе [9] было показано, что оптимум достигается армированием пакета не более чем в трех направлениях. В работах [10, 11] предполагалось, что композит состоит из бесконечного множества слоев с различными углами укладки; установлено, что по критерию Мизеса – Хилла оптимальную ортотропную структуру следует искать в классе  $[\pm\varphi_1/\pm\varphi_2]$  или  $[0/90/\pm\varphi]$ .

Целью данной работы является дальнейшее изучение вопроса о характере армирования тонкостенных композитных конструкций минимальной массы при ограничениях по прочности. Рассматриваются только ортотропные структуры с симметричной укладкой слоев по толщине.

Для оценки НДС композитной конструкции введем следующий структурный параметр:

$$\eta(\varphi) = \gamma_{xy} \sin 2\varphi + (\varepsilon_x - \varepsilon_y) \cos 2\varphi, \quad (1)$$

где  $\varepsilon_x, \varepsilon_y, \gamma_{xy}$  – деформации пакета слоев в общей системе координат;  $\varphi$  – угол укладки монослоя.

После ряда преобразований основных соотношений механики слоистых КМ (см., например, [12]) деформации и напряжения в  $k$  м слое пакета можно записать в таком виде:

$$\varepsilon_{1k} = \frac{\varepsilon + \eta_k}{2}; \quad \varepsilon_{2k} = \frac{\varepsilon - \eta_k}{2}; \quad |\gamma_{12k}| = \sqrt{\gamma_o^2 - \eta_k^2}; \quad (2)$$

$$\sigma_{1k} = \frac{1}{2} \bar{E}_1 [\varepsilon(1 + \mu_{21}) + (1 - \mu_{21})\eta_k];$$

$$\sigma_{2k} = \frac{1}{2} \bar{E}_2 [\varepsilon(1 + \mu_{12}) - (1 - \mu_{12})\eta_k]; \quad (3)$$

$$|\tau_{12k}| = G_{12} \sqrt{\gamma_o^2 - \eta_k^2},$$

где  $\eta_k = \eta(\varphi_k)$ ;  $\varepsilon = \varepsilon_x + \varepsilon_y$ ;  $\gamma_o = \sqrt{\gamma_{xy}^2 + (\varepsilon_x - \varepsilon_y)^2}$ ;  $\bar{E}_{1,2} = \frac{E_{1,2}}{1 - \mu_{12}\mu_{21}}$ ;

$E_1, E_2, G_{12}, \mu_{12}, \mu_{21}$  – упругие свойства монослоя КМ.

Проанализируем полученную систему уравнений.

Во-первых, если принять во внимание равенство нулю трансверсальной деформации, т.е.  $\varepsilon_z = 0$  (это одно из допущений гипотез Кирхгофа – Лява, на которых построены классические теории композитных пластин и оболочек), то фигурирующую в соотношениях (2), (3) величину  $\varepsilon$  можно рассматривать как инвариант объемной деформации слоистого материала, т.е.  $\varepsilon = \varepsilon_x + \varepsilon_y = \varepsilon_{1k} + \varepsilon_{2k}$ .

Во-вторых, кривая  $\eta(\varphi)$  задает геометрическое место точек  $\eta_k$  (см. рис. 1). Следовательно, условие

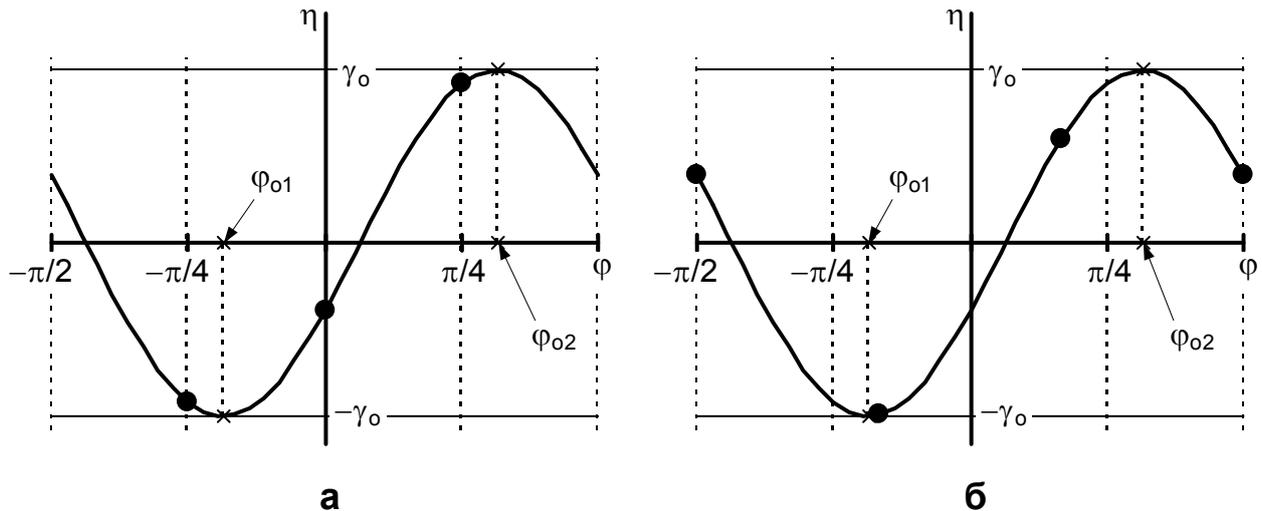


Рисунок 1 – К определению структурного параметра  $\eta$  (точки на кривых указывают углы укладки слоев в пакете):  
 а – структура  $[0/\pm 45^\circ]$ ; б – структура  $[90^\circ/\pm 30^\circ]$

$$\frac{\partial \eta}{\partial \varphi} = 2 \left[ \gamma_{xy} \cos 2\varphi - (\varepsilon_x - \varepsilon_y) \sin 2\varphi \right] = 2\gamma_{12} = 0 \quad (4)$$

позволяет найти направления укладки  $\varphi_{01}$  и  $\varphi_{02}$ , которые соответствуют экстремумам функции (1) (минимум,  $\eta = -\gamma_0$ , и максимум,  $\eta = \gamma_0$ ) на всем интервале углов армирования  $\varphi \in [-\pi/2; \pi/2]$ :

$$\varphi_{01} = \frac{1}{2} \arctg \left( \frac{\gamma_{xy}}{\varepsilon_x - \varepsilon_y} \right); \quad \varphi_{02} = \varphi_{01} \pm \frac{\pi}{2}. \quad (5)$$

Другими словами, для любого произвольного пакета слоев тождественно выполняются ограничения

$$-\gamma_0 \leq \eta_k \leq \gamma_0. \quad (6)$$

В-третьих, сопоставление уравнений (2) и (4) выявляет очевидную взаимосвязь параметра  $\eta_k$  и деформации  $\gamma_{12k}$ , в силу чего решение (5) определяет и траектории армирования по критерию отсутствия касательных напряжений в слоях, т.е.  $\tau_{12} = 0$  [4 – 8]. Кроме того, отсюда следует, что величина  $\gamma_0$  в формулах (2), (3) представляет собой своеобразный инвариант максимальной по абсолютному значению сдвиговой деформации (см. рис. 2):

$$-\gamma_0 \leq \gamma_{12k} \leq \gamma_0. \quad (7)$$

Таким образом, из трех параметров  $\varepsilon$ ,  $\gamma_0$ ,  $\eta_k$ , которые обуславливают НДС  $k$ -го слоя, два ( $\varepsilon$  и  $\gamma_0$ ) являются интегральными характеристиками пакета и зависят только от структуры КМ и внешней нагрузки. Влияние условий нагружения на форму кривой  $\eta(\varphi)$  показано на рис. 3.

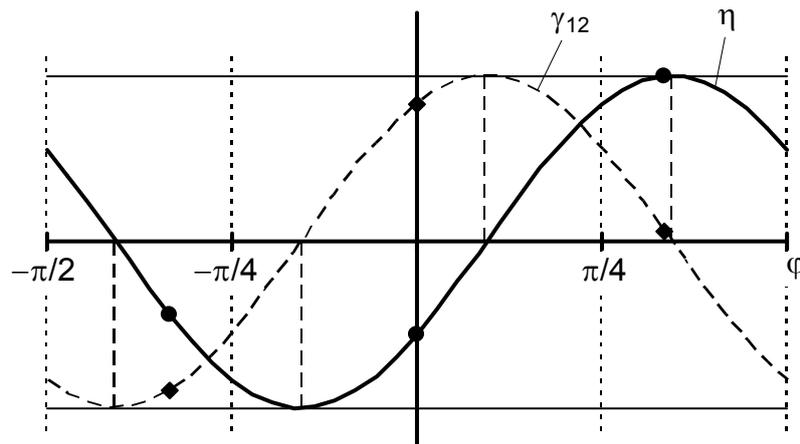


Рисунок 2 – Взаимосвязь параметра  $\eta_k$  и сдвиговой деформации  $\gamma_{12k}$  (показан случай структуры  $[0/\pm 60^\circ]$ )

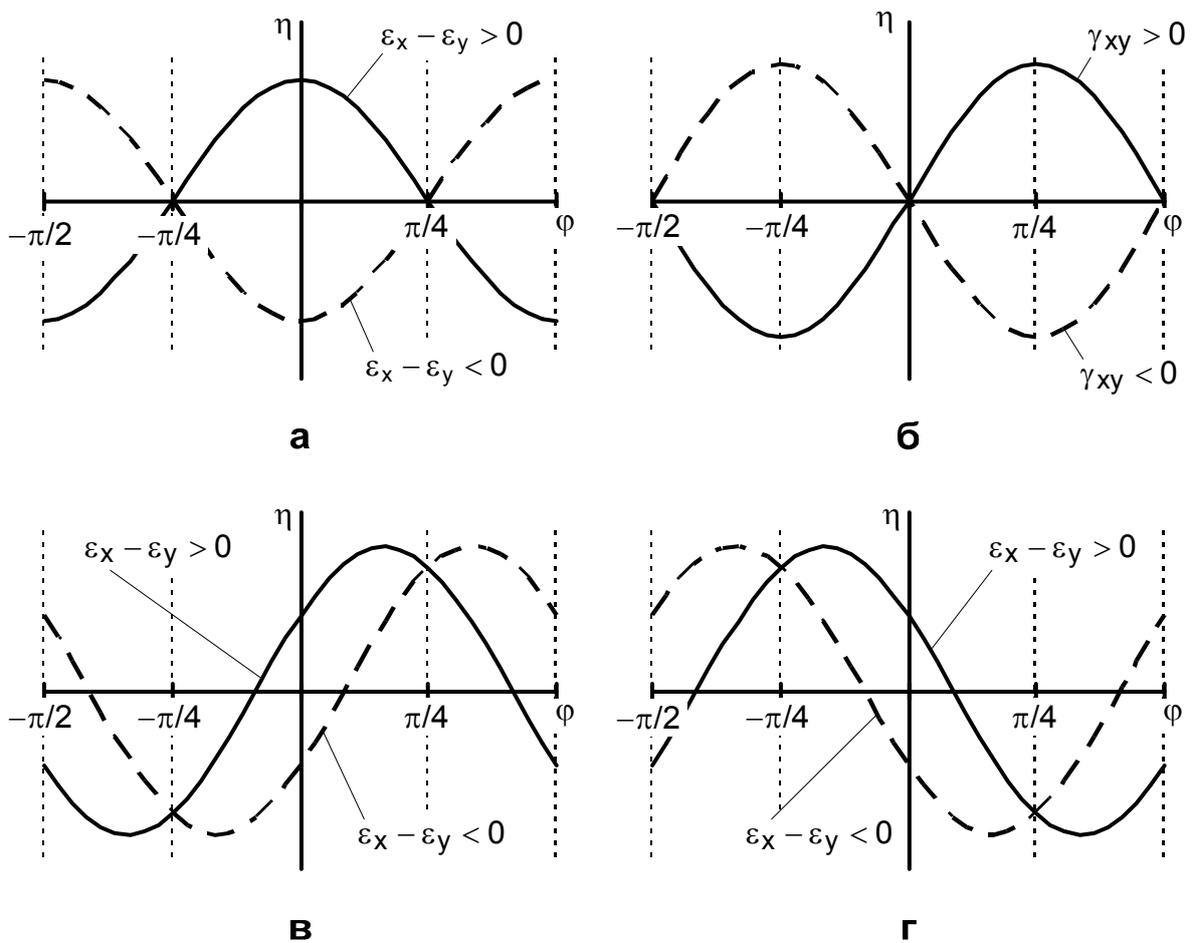


Рисунок 3 – Зависимость функции  $\eta(\varphi)$  от внешней нагрузки:

а – случай  $\gamma_{xy} = 0$ ; б – случай  $\varepsilon_x - \varepsilon_y = 0$ ;

в – случай  $\gamma_{xy} > 0$ ; г – случай  $\gamma_{xy} < 0$

Проанализируем уравнение вида

$$\gamma_{xy} \sin 2\varphi + (\varepsilon_x - \varepsilon_y) \cos 2\varphi = \eta^*. \quad (8)$$

Разделим его левую и правую части на величину  $\gamma_0$ . Учитывая обозначения (5), будем считать, что

$$\sin 2\varphi_0 = \frac{\gamma_{xy}}{\gamma_0}; \quad \cos 2\varphi_0 = \frac{\varepsilon_x - \varepsilon_y}{\gamma_0},$$

где  $\varphi_0$  выбирают по правилу:

$$\varphi_0 = \begin{cases} \varphi_{01}, & \text{sign}(\varphi_{01}) = \text{sign}(\gamma_{xy}); \\ \varphi_{02}, & \text{sign}(\varphi_{01}) \neq \text{sign}(\gamma_{xy}). \end{cases} \quad (9)$$

Тогда из (8) получаем

$$\sin 2\varphi_0 \sin 2\varphi + \cos 2\varphi_0 \cos 2\varphi = \cos(2\varphi - 2\varphi_0) = \frac{\eta^*}{\gamma_0},$$

откуда следует, что корни

$$\varphi_{1,2}^* = \varphi_0 \pm \frac{1}{2} \arccos \frac{\eta^*}{\gamma_0}. \quad (10)$$

Найденное в форме (10) решение уравнения (8) показывает, что каждому, физически реализуемому согласно условию (6) значению  $\eta$  соответствуют два угла укладки, т.е. количество равнонапряженных (с идентичным НДС) слоев в пакете не превышает двух. Этот же вывод можно сделать и путем анализа графиков, показанных на рис. 1 – 3, и зависимостей (2) и (3).

Рассмотрим далее применение структурного параметра  $\eta$  для оценки прочности слоистых КМ. Воспользуемся уравнениями (3) и переформулируем критерий максимальных напряжений (см., например, [12]) относительно величины  $\eta$ :

$$\begin{aligned} -\left[ \frac{2F_{1c}}{\bar{E}_1(1-\mu_{21})} + \varepsilon \frac{1+\mu_{21}}{1-\mu_{21}} \right] &\leq \eta_k \leq \left[ \frac{2F_{1p}}{\bar{E}_1(1-\mu_{21})} - \varepsilon \frac{1+\mu_{21}}{1-\mu_{21}} \right]; \\ -\left[ \frac{2F_{2p}}{\bar{E}_2(1-\mu_{12})} - \varepsilon \frac{1+\mu_{12}}{1-\mu_{12}} \right] &\leq \eta_k \leq \left[ \frac{2F_{2c}}{\bar{E}_2(1-\mu_{12})} + \varepsilon \frac{1+\mu_{12}}{1-\mu_{12}} \right]; \quad (11) \\ \eta_k^2 &\geq \gamma_0^2 - \frac{F_{12}^2}{G_{12}^2}, \end{aligned}$$

где  $F_{1p}$ ,  $F_{1c}$ ,  $F_{2p}$ ,  $F_{2c}$ ,  $F_{12}$  – пределы прочности при растяжении и сжатии монослоя КМ вдоль волокон (основы), поперек волокон (по утку) и при сдвиге.

Решая систему неравенств (11) и принимая во внимание ограничения (6), можно найти интервал значений  $\eta_k$ , удовлетворяющих условиям прочности:

$$\begin{aligned} \text{если } \gamma_o \leq \frac{F_{12}}{G_{12}}, \\ \eta_k \in [\eta_{min}; \eta_{max}]; \end{aligned} \quad (12)$$

$$\begin{aligned} \text{если } \gamma_o > \frac{F_{12}}{G_{12}}, \\ \eta_k \in [\eta_{min}; \eta_{max}] \text{ и } \eta_k \notin \left( -\sqrt{\gamma_o^2 - \frac{F_{12}^2}{G_{12}^2}}; \sqrt{\gamma_o^2 - \frac{F_{12}^2}{G_{12}^2}} \right), \end{aligned} \quad (13)$$

$$\begin{aligned} \text{где } \eta_{min} = -\min \left\{ \left[ \frac{2F_{1c}}{\bar{E}_1(1-\mu_{21})} + \varepsilon \frac{1+\mu_{21}}{1-\mu_{21}} \right]; \left[ \frac{2F_{2p}}{\bar{E}_2(1-\mu_{12})} - \varepsilon \frac{1+\mu_{12}}{1-\mu_{12}} \right]; \gamma_o \right\}; \\ \eta_{max} = \min \left\{ \left[ \frac{2F_{1p}}{\bar{E}_1(1-\mu_{21})} - \varepsilon \frac{1+\mu_{21}}{1-\mu_{21}} \right]; \left[ \frac{2F_{2c}}{\bar{E}_2(1-\mu_{12})} + \varepsilon \frac{1+\mu_{12}}{1-\mu_{12}} \right]; \gamma_o \right\}. \end{aligned}$$

Схожие в математическом плане результаты можно получить и при расчете по другим критериям прочности. Например, учитывая (2), по критерию максимальных деформаций получим:

$$\begin{aligned} \text{если } \gamma_o \leq e_{12}, \\ \eta_k \in [\eta_{min}; \eta_{max}]; \end{aligned} \quad (14)$$

$$\begin{aligned} \text{если } \gamma_o > e_{12}, \\ \eta_k \in [\eta_{min}; \eta_{max}] \text{ и } \eta_k \notin \left( -\sqrt{\gamma_o^2 - e_{12}^2}; \sqrt{\gamma_o^2 - e_{12}^2} \right), \end{aligned} \quad (15)$$

где  $e_{1p}$ ,  $e_{1c}$ ,  $e_{2p}$ ,  $e_{2c}$ ,  $e_{12}$  – предельные деформации монослоя КМ;  $\eta_{min} = -\min\{2e_{1c} + \varepsilon; 2e_{2p} - \varepsilon; \gamma_o\}$ ;  $\eta_{max} = \min\{2e_{1p} - \varepsilon; 2e_{2c} + \varepsilon; \gamma_o\}$ .

Многие тензорно-полиномиальные критерии прочности КМ (Мизеса – Хилла, Цая – Ву, Хоффмана, Гольденблата – Копнова и др.) можно выразить в виде одностипного неравенства

$$\Phi_{np} = \bar{A}\eta_k^2 + \bar{B}\eta_k + \bar{C} \leq 1, \quad (16)$$

где  $\bar{A}$ ,  $\bar{B}$ ,  $\bar{C}$  – некоторые коэффициенты, которые зависят от формулировки выбранного критерия, упругих и прочностных свойств монослоя, а также от параметров  $\varepsilon$  и  $\gamma_o$ , т.е. от структуры пакета и внешней нагрузки. Ввиду громоздкости уравнения для расчета величин  $\bar{A}$ ,  $\bar{B}$ ,  $\bar{C}$  здесь не приводятся.

В этом случае интервал допустимых значений  $\eta_k$  определяется следующим образом:

если  $\bar{A} \geq 0$ ,

$$\eta_k \in [\eta_{min}; \eta_{max}], \quad (17)$$

если  $\bar{A} < 0$ ,

$$\eta_k \in [-\gamma_0; \gamma_0] \text{ и } \eta_k \notin (\eta_a^*; \eta_b^*), \quad (18)$$

где  $\eta_{min} = \min\{\eta_a^*; \eta_b^*; -\gamma_0\}$ ;  $\eta_{max} = \max\{\eta_a^*; \eta_b^*; \gamma_0\}$ ;  $\eta_a^*$ ,  $\eta_b^*$  – корни неравенства (16):

$$\eta_{a,b}^* = \frac{-\bar{B} \pm \sqrt{\bar{B}^2 - 4\bar{A}(\bar{C} - 1)}}{\bar{A}}.$$

Отсутствие вещественных корней  $\eta_a^*$ ,  $\eta_b^*$ , что имеет место, если дискриминант  $\bar{B}^2 - 4\bar{A}(\bar{C} - 1) < 0$ , говорит или о разрушении всех слоев в пакете (рис. 4, а, кривая  $\bar{A} > 0$ ), или об обратной ситуации, когда каждому слою соответствует некоторый запас прочности (рис. 4, а, кривая  $\bar{A} < 0$ ). Аналогичные выводы можно сделать и в том случае, когда оба значения  $\eta_a^*$  и  $\eta_b^*$  не удовлетворяют условию (6) (рис. 4, б). Особо следует отметить тот факт, что коэффициент  $\bar{A}$ , который обуславливает характер функциональной зависимости  $\Phi_{np}(\eta)$ , определяется только механическими свойствами монослоя.

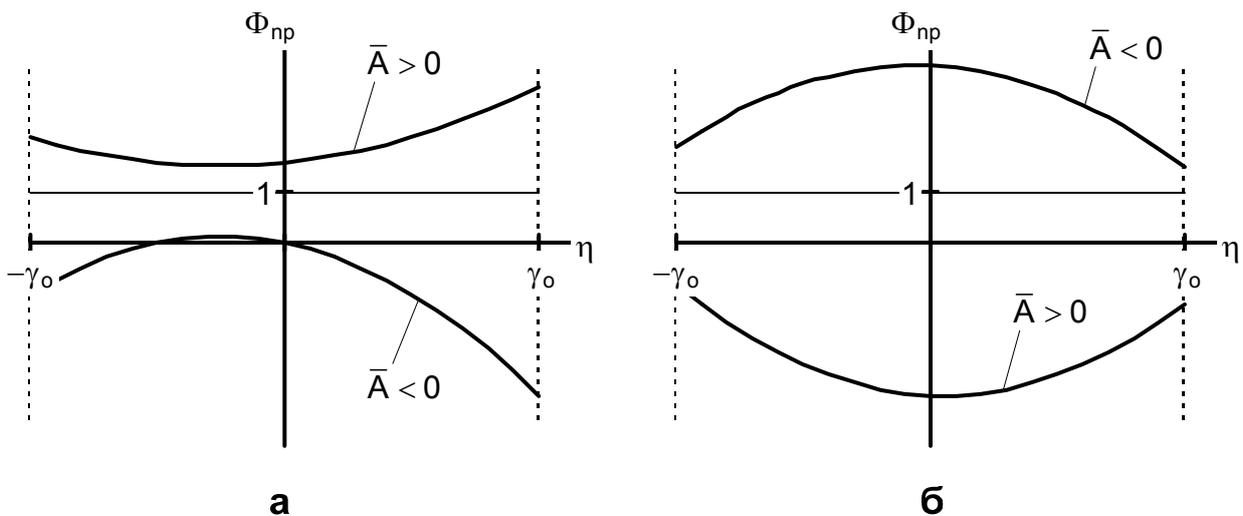


Рисунок 4 – Отсутствие допустимых решений неравенства (16):

а – случай  $\bar{B}^2 - 4\bar{A}(\bar{C} - 1) < 0$ ; б – вариант  $\eta_{a,b}^* \notin [-\gamma_0; \gamma_0]$



$$\gamma_{xy}(\sin 2\varphi_1 - \sin 2\varphi_2) + (\varepsilon_x - \varepsilon_y)(\cos 2\varphi_1 - \cos 2\varphi_2) = 0,$$

откуда

$$2[\gamma_{xy} \cos(\varphi_1 + \varphi_2) - (\varepsilon_x - \varepsilon_y) \sin(\varphi_1 + \varphi_2)] \sin(\varphi_1 - \varphi_2) = 0. \quad (20)$$

Отбрасывая тривиальный случай  $\varphi_1 = \varphi_2$ , найдем четыре корня тригонометрического уравнения (20):

$$\varphi_1 + \varphi_2 = 2\varphi_{o1}; \quad \varphi_1 + \varphi_2 = 2\varphi_{o2},$$

которые фактически определяют четыре направления армирования, симметричные относительно траекторий главных напряжений (см., например, рис. 5):

$$\varphi_{1,2} = \varphi_{o1} \pm \Delta\varphi; \quad \varphi_{3,4} = \varphi_{o2} \pm \Delta\varphi. \quad (21)$$

Отметим, что в силу самой постановки задачи ( $\eta_1 = \eta_2$ ) полученный результат не зависит от НДС слоев в пакете и принятой теории прочности; другими словами любые четыре слоя с углами укладки, подчиняющимися условию (21), будут равнонапряженными.

Второй вариант решения (19) предполагает выполнение условия

$$\eta_1 + \eta_2 = 2\eta_o \quad \text{или} \quad \eta_{1,2} = \eta_o \pm \Delta\eta,$$

где величина  $\eta_o = -\bar{B}/\bar{A}$  указывает положение точки экстремума функции  $\Phi_{np}(\eta)$  (см. рис. 4).

Тогда из (9) и (10) следует, что

$$\varphi_{1,2} = \varphi_o \pm \frac{1}{2} \arccos \frac{\eta_o + \Delta\eta}{\gamma_o}; \quad \varphi_{3,4} = \varphi_o \pm \frac{1}{2} \arccos \frac{\eta_o - \Delta\eta}{\gamma_o}. \quad (22)$$

В выражениях (22) подразумевается, что координата экстремума  $\eta_o \in [-\gamma_o; \gamma_o]$  и приращение  $\Delta\eta \leq \gamma_o - |\eta_o|$ , иначе количество равнонапряженных слоев уменьшается до двух.

Таким образом, путем аналитического решения задачи о прочности слоистого КМ показано, что независимо от используемого в расчете критерия прочности количество равнопрочных и равнонапряженных слоев в пакете не превышает четырех.

#### Список использованных источников

1. Сухобокова, Г.П. Влияние расположения слоев на устойчивость пластин из многослойных композиционных материалов при сжатии и сдвиге [Текст] / Г.П. Сухобокова // Проектирование, расчет и испытания конструкций из композиционных материалов. – М.: Изд-во ЦАГИ, 1984. – Вып. 10. – С. 8 – 15.

2. Муравицкий, О.С. Исследование влияния расположения слоев на устойчивость пластины из композиционных материалов [Текст] / О.С. Муравицкий // Вопросы проектирования и производства конструк-

ций летательных аппаратов. – Х.: Харьк. авиац. ин-т, 1998. – Вып. 10. – С. 50 – 55.

3. Гайдачук, В.Е. О принципах и проблемах проектирования авиаконструкций из композиционных материалов [Текст] / В.Е. Гайдачук // Самолетостроение. Техника воздушного флота. – Х.: Изд-во. ХГУ, 1975. – Вып. 36. – С. 51 – 56.

4. Гайдачук, В.Е. К расчету стеклопластиковых конструкций [Текст] / В.Е. Гайдачук, В.В. Кириченко, Л.А. Колесников // Самолетостроение и техника воздушного флота. – Х.: Изд-во. ХГУ, 1971. – Вып. 26. – С. 66 – 70.

5. Немировский, Ю.В. К вопросу об оптимальной укладке арматуры в пластинках [Текст] / Ю.В. Немировский // Механика полимеров. – 1978. – № 4. – С. 675 – 682.

6. Образцов, И.Ф. Оптимальная структура и прочность слоистых композитов при плоском напряженном состоянии [Текст] / И.Ф. Образцов, В.В. Васильев // Механика композитных материалов. – 1979. – № 2. – С. 228 – 234.

7. Бушманов, С.Б. Проектирование пластин, армированных равнонапряженными волокнами постоянного поперечного сечения [Текст] / С.Б. Бушманов, Ю.В. Немировский // Механика композитных материалов. – 1983. – № 2. – С. 278 – 284.

8. Fukunaga, H. On laminate configurations for simultaneous failure [Текст] / H. Fukunaga, T.W. Chou // Journal of Composite Materials. – 1988. – Vol. 22. – pp.271 – 286.

9. Криканов, А.А. Проектирование композитных панелей минимальной массы при нескольких случаях нагружения [Текст] / А.А. Криканов // Механика композитных материалов. – 1985. – № 5. – С. 868 – 872.

10. Карпов, Я.С. Теория оптимизации структуры пакета слоев композиционного материала [Текст] / Я.С. Карпов // Технологические системы. – 2002. – Вып. 4. – С. 42 – 46.

11. Карпов, Я.С. Оптимизация структуры композиционного материала панелей летательных аппаратов при ограничениях по прочности, устойчивости, прогибу [Текст] / Я.С. Карпов // Проблемы прочности. – 2004. – № 6. – С. 33 – 47.

12. Карпов, Я.С. Механика композиционных материалов [Текст] : учеб. пособие / Я.С. Карпов. – Х.: Нац. аэрокосм. ун-т «Харьк. авиац. ин-т», 2001. – 122 с.

*Поступила в редакцию 11.06.2012.*

*Рецензент: д-р техн. наук, проф. Я.С. Карпов,  
Национальный аэрокосмический университет  
им. Н.Е. Жуковского «ХАИ», г. Харьков*