

## РАВНОВЕСИЕ УПРУГОЙ КРУГОВОЙ ПЛАСТИНКИ, ОСЛАБЛЕННОЙ НЕЦЕНТРАЛЬНОЙ ТРЕЩИНОЙ

Предлагается метод исследования краевых задач теории упругости для круговой пластинки с нецентральной трещиной, основанный на применении соотношений между базисными решениями уравнения Ламе в полярных и биполярных координатах. Реализация этого метода приводит к бесконечным системам линейных алгебраических уравнений с точно вычисляющимися и экспоненциально убывающими матричными коэффициентами, что позволяет провести эффективный анализ напряженно-деформированного состояния вблизи концентраторов напряжений.

Объектами особого внимания механики разрушения являются вершины трещин – места возникновения наибольшей концентрации напряжений и одновременно исходные точки дальнейшего разрушения материалов. Наиболее важные параметры в линейной механике разрушения – коэффициенты интенсивности напряжений, знание которых позволяет изучить поведение тела с трещинами, в частности, сформулировать условия локального разрушения материала [1]. Аналитические решения плоских задач для тел с дефектами и включениями находят применение не только в механике разрушения, но и в инженерных методах расчета на прочность пространственных тел с полостями, трещинами и включениями для получения приближенных и интерполяционных оценок.

Получены новые соотношения между базисными решениями уравнения Лапласа и векторного уравнения Ламе в полярных и биполярных координатах.

Рассмотрена задача о равновесии упругой круговой пластинки, ослабленной нецентральной прямолинейной трещиной (рис. 1). Разложением по малому геометрическому параметру получены асимптотические формулы для коэффициента интенсивности нормальных напряжений при двух вариантах нагружения берегов трещины.

Пусть  $(x, y)$ ,  $(x_1, y_1)$ ,  $(\rho_1, \varphi_1)$ ,  $(\alpha, \beta)$ ,  $(\alpha, \sigma)$  – декартовы, полярные и биполярные координаты, определяемые равенствами

$$x_1 = x, \quad y_1 = y - h \quad (h > 0), \quad x_1 = \rho_1 \cos \varphi_1, \quad y_1 = \rho_1 \sin \varphi_1;$$

$$x = \frac{a \sin \alpha}{c \cos \alpha + \cos \beta}, \quad y = \frac{a \sin \beta}{c \cos \alpha + \cos \beta}; \quad x = \frac{a \sin \alpha}{c \cos \alpha - \cos \sigma}, \quad y = \frac{a \sin \sigma}{c \cos \alpha - \cos \sigma}$$

$$(a > 0; -\pi \leq \beta, \sigma \leq \pi, -\infty < \alpha < \infty).$$

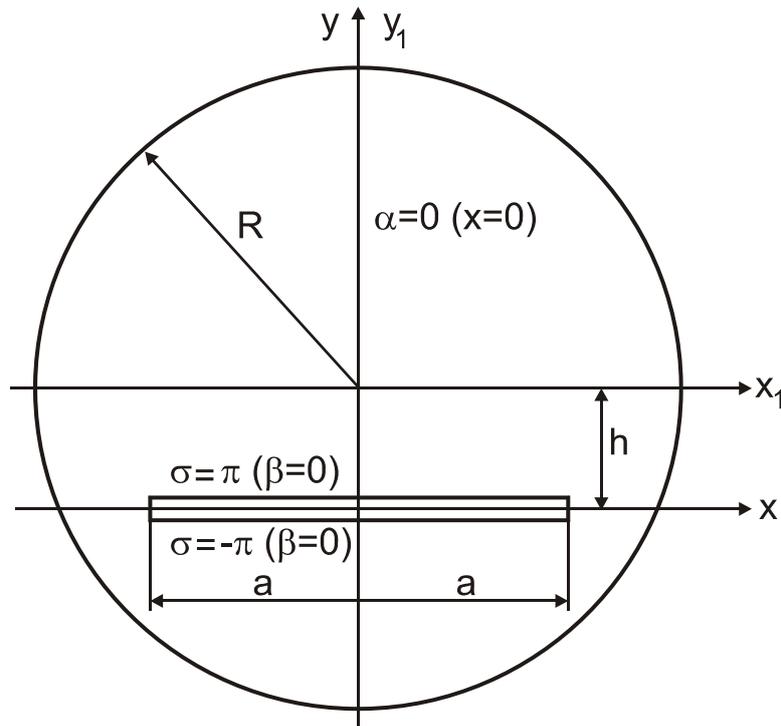


Рисунок 1 – Геометрия пластинки

Базисные решения уравнения Ламе

$$\text{grad div } \vec{U} + (1-2\nu)\Delta \vec{U} = 0 \quad (1)$$

( $\vec{U}$  – вектор упругих перемещений,  $\nu$  – коэффициент Пуассона) в полярных и биполярных координатах, обладающие симметрией по координате  $x(\alpha)$ , выберем в следующем виде:

$$\left\{ \begin{array}{l} \vec{u}_{1,n}(\rho_1, \varphi_1) = \rho_1^{n-1} [\sin(n-1)\left(\frac{\pi}{2} + \varphi_1\right) \vec{e}_x + \cos(n-1)\left(\frac{\pi}{2} + \varphi_1\right) \vec{e}_y]; \\ \vec{u}_{2,n}(\rho_1, \varphi_1) = (y_1 \text{grad} - \lambda \vec{e}_y) [2\rho_1^{n+1} \cos(n+1)\left(\frac{\pi}{2} + \varphi_1\right)] - (n+1 - \lambda) \vec{u}_{1,n+2}(\rho_1, \varphi_1); \\ \vec{u}_{3,n}(\rho_1, \varphi_1) = \rho_1^{-(n+1)} [-\sin(n+1)\left(\frac{\pi}{2} + \varphi_1\right) \vec{e}_x + \cos(n+1)\left(\frac{\pi}{2} + \varphi_1\right) \vec{e}_y]; \\ \vec{u}_{4,n}(\rho_1, \varphi_1) = (y_1 \text{grad} - \lambda \vec{e}_y) [2\rho_1^{-(n-1)} \cos(n-1)\left(\frac{\pi}{2} + \varphi_1\right)] + (n-1 - \lambda) \vec{u}_{3,n-2}(\rho_1, \varphi_1); \end{array} \right. \quad (2)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \vec{u}_1(\alpha, \beta; \tau) = e^{-\tau\beta} \sin \tau\alpha \vec{e}_x + (e^{-\tau\beta} \cos \tau\alpha - e^{-2\tau \arctg \frac{h}{a}}) \vec{e}_y; \\ \vec{u}_2(\alpha, \beta; \tau) = (y \text{grad} - \lambda \vec{e}_y) (e^{-\tau\beta} \cos \tau\alpha - e^{-2\tau \arctg \frac{h}{a}}); \\ \vec{u}_3^+(\alpha, \sigma; \tau) = e^{\tau\sigma} \sin \tau\alpha \vec{e}_x + (e^{\tau\sigma} \cos \tau\alpha - 1) \vec{e}_y; \quad \vec{u}_3^-(\alpha, \sigma; \tau) = \vec{u}_3^+(\alpha, \sigma; -\tau); \\ \vec{u}_4^+(\alpha, \sigma; \tau) = 2(y \text{grad} - \lambda \vec{e}_y) (e^{\tau\sigma} \cos \tau\alpha - 1); \quad \vec{u}_4^-(\alpha, \sigma; \tau) = \vec{u}_4^+(\alpha, \sigma; -\tau) \end{array} \right. \quad (3)$$

( $\vec{e}_x, \vec{e}_y$  – орты декартовой системы координат;  $\lambda = 3-4\nu$ ).

Решения (2), (3) связаны между собой равенствами

$$\left\{ \begin{array}{l}
\vec{u}_{1,n}(\rho_1, \varphi_1) = (h+ia)^{n-1} \int_{-\infty}^{+\infty} C_{n-1}(\tau) \vec{u}_1(\alpha, \beta; \tau) d\tau; \\
\vec{u}_{2,n}(\rho_1, \varphi_1) = (h+ia)^{n+1} \int_{-\infty}^{+\infty} C_{n+1}(\tau) [2\vec{u}_2(\alpha, \beta; \tau) - (n+1-\alpha)\vec{u}_1(\alpha, \beta; \tau)] d\tau + \\
\quad + 2h(n+1)(h+ia)^n \int_{-\infty}^{+\infty} C_n(\tau) \vec{u}_1(\alpha, \beta; \tau) d\tau; \\
\vec{u}_3^+(\alpha, \sigma; \tau) = \sum_{n=0}^{\infty} D_{n+1}(\tau) (h+ia)^{n+1} \vec{u}_{3,n}(\rho_1, \varphi_1); \\
u_4^+(\alpha, \sigma; \tau) = \sum_{n=2}^{\infty} D_{n-1}(\tau) (h+ia)^{n-1} \vec{u}_{4,n}(\rho_1, \varphi_1) - \\
\quad - \sum_{n=0}^{\infty} D_{n+1}(\tau) (h+ia)^{n+1} (n+1+\alpha) \vec{u}_{3,n}(\rho_1, \varphi_1) + \\
\quad + 2h \sum_{n=1}^{\infty} D_n(\tau) (h+ia)^n n \vec{u}_{3,n}(\rho_1, \varphi_1).
\end{array} \right. \quad (4)$$

Здесь

$$C_m(\tau) = -\frac{ima}{a-ih} \frac{1}{sh\pi\tau} F\left(m+1, 1+i\tau; 2; \frac{2a}{a-ih}\right);$$

$$D_m(\tau) = \frac{2ia\tau}{a-ih} F\left(m+1, 1-i\tau; 2; \frac{2a}{a-ih}\right);$$

$$F(-n, b; c; z) = \sum_{k=0}^n \frac{(-n)_k (b)_k}{k! (c)_k} z^k \quad \text{— гипергеометрический полином,}$$

$$(a)_0 = 1, \quad (a)_k = a(a+1)(a+2)\dots(a+k-1) \quad (k=1, 2, \dots).$$

При выводе разложений (4) использованы соотношения между базисными решениями уравнения Лапласа в полярных и биполярных координатах:

$$e^{\pm\tau\sigma} \cos\tau\alpha - 1 = \sum_{n=1}^{\infty} D_n(\pm\tau) (h+ia)^n \rho_1^{-n} \cos n\left(\frac{\pi}{2} + \varphi_1\right); \quad \left(\rho_1 > \sqrt{a^2 + h^2}\right)$$

$$e^{\pm\tau\sigma} \sin\tau\alpha = \mp \sum_{n=1}^{\infty} D_n(\pm\tau) (h+ia)^n \rho_1^{-n} \sin n\left(\frac{\pi}{2} + \varphi_1\right),$$

$$\rho_1^n \cos n\left(\frac{\pi}{2} + \varphi_1\right) = (h+ia)^{-n} \int_{-\infty}^{\infty} C_n(\tau) \left( e^{-\tau\beta} \cos\tau\alpha - e^{-2\tau \operatorname{arctg} \frac{h}{a}} \right) d\tau; \quad (|\beta| < \pi)$$

$$\rho_1^n \sin n\left(\frac{\pi}{2} + \varphi_1\right) = (h+ia)^{-n} \int_{-\infty}^{\infty} C_n(\tau) e^{-\tau\beta} \sin\tau\alpha d\tau.$$

Методика получения соотношений такого рода и их применения к решению скалярных краевых задач изложена в работах [2, 3].

Разложения (4) в сочетании с методом Фурье специально приспособлены к решению векторных краевых задач теории упругости для круговой пластинки с нецентральной трещиной (разрезом)  $\sigma = \pm\pi$ , а также для кусочно-однородной пластинки  $0 \leq \rho_1 \leq R_m$  с концентрическими круговыми линиями раздела  $\rho_1 = R_k$  ( $k=1, 2, \dots, m$ ) составляющих ее однородных областей и трещиной  $\sigma = \pm\pi$  во внутренней области  $0 \leq \rho_1 \leq R_1$ . Сами соотношения (4) служат для удовлетворения граничных условий или условий сопряжения на окружности  $\rho_1 = R_1$  и граничных условий на берегах трещины  $\sigma = \pm\pi$ .

Рассмотрим задачу о равновесии упругой круговой пластинки  $0 \leq \rho_1 \leq R$ , ослабленной трещиной  $\sigma = \pm\pi$ . Ограничимся двумя вариантами нагружения: а) к берегам трещины приложены нормальные равномерно распределенные усилия интенсивности  $\sigma_0$  (I вариант); б) в центре трещины ее берега растягиваются нормальными сосредоточенными силами  $P$ . Тогда граничные условия имеют вид

$$\begin{aligned} \sigma_{\rho_1} = 0; \tau_{\rho_1\varphi_1} = 0 \quad (\rho_1 = R); \tau_{xy} = 0 \quad (\sigma = \pm\pi); \\ \text{а) } \sigma_y = -\sigma_0 \quad (\sigma = \pm\pi); \quad \text{б) } \sigma_y = -P\delta(x) \quad (\sigma = \pm\pi) \end{aligned} \quad (5)$$

где  $\delta(x)$  – дельта-функция Дирака.

С учетом симметрии задачи по координате  $x(\alpha)$  общее решение уравнения (1) представим в виде

$$\begin{aligned} \vec{u} = \int_{-\infty}^{\infty} A_1(\tau) \vec{u}_3^+(\alpha, \sigma; \tau) d\tau + \int_{-\infty}^{\infty} A_2(\tau) \vec{u}_4^+(\alpha, \sigma; \tau) d\tau + \\ + \int_{-\infty}^{\infty} B_1(\tau) \vec{u}_3^-(\alpha, \sigma; \tau) d\tau + \int_{-\infty}^{\infty} B_2(\tau) \vec{u}_4^-(\alpha, \sigma; \tau) d\tau + \\ + \sum_{n=2}^{\infty} B_n^{(1)} \vec{u}_{1,n}(\rho_1, \varphi_1) + \sum_{n=0}^{\infty} B_n^{(2)} \vec{u}_{2,n}(\rho_1, \varphi_1). \end{aligned} \quad (6)$$

Удовлетворяя условиям (5) на основе общего решения (6) и соотношений (4), после исключения плотностей интегралов  $A_i(\tau)$ ,  $B_i(\tau)$  ( $i=1,2$ ) и замены коэффициентов ряда  $B_n^{(1)}$ ,  $B_n^{(2)}$  величинами

$$x_n^{(1)} = 4G\sigma_0^{-1}a^{-1}R^{n-1}B_n^{(1)}, \quad x_n^{(2)} = 4G\sigma_0^{-1}a^{-1}R^{n+1} \quad (\text{I вариант}),$$

$$x_n^{(1)} = 16\pi GP^{-1}R^{n-1}B_n^{(1)}, \quad x_n^{(2)} = 16\pi GP^{-1}R^{n+1} \quad (\text{II вариант})$$

для нахождения этих величин получаем бесконечную систему линейных алгебраических уравнений

$$\begin{aligned} x_n^{(1)} = \sum_{k=2}^{\infty} d_{nk}^{(11)} x_k^{(1)} + \sum_{k=0}^{\infty} d_{nk}^{(12)} x_k^{(2)} + f_n^{(1)} \quad (n = 2; 3; \dots); \\ x_n^{(2)} = \sum_{k=2}^{\infty} d_{nk}^{(21)} x_k^{(1)} + \sum_{k=0}^{\infty} d_{nk}^{(22)} x_k^{(2)} + f_n^{(2)} \quad (n = 0; 1; 2; \dots), \end{aligned} \quad (7)$$

в которой

$$d_{nk}^{(11)} = -(n+1)d_{nk}^{(21)} + \frac{1}{2}\bar{\lambda}^{n+k-2} T_{n-2,k-2}^{(2)};$$

$$d_{nk}^{(12)} = -(n+1)d_{nk}^{(22)} + \frac{1}{2}\bar{\lambda}^{n+k} [T_{n-2,k}^{(1)} - (k+1)T_{n-2,k}^{(2)} + 2\varepsilon(k+1)T_{n-2,k-1}^{(2)}];$$

$$d_{nk}^{(21)} = \frac{1}{2}\bar{\lambda}^{n+k-2} \left\{ \bar{\lambda}^2 [T_{n,k-2}^{(1)} - (n+1)T_{n,k-2}^{(2)} + 2\varepsilon n T_{n-1,k-2}^{(2)}] - (n-1)T_{n-2,k-2}^{(2)} \right\};$$

$$d_{nk}^{(22)} = \frac{1}{2}\bar{\lambda}^{n+k} \left\{ \bar{\lambda}^2 [-(n+k+2)T_{n,k}^{(1)} - 2\varepsilon(k+1)T_{n,k-1}^{(1)} + (nk+n+k+2)T_{n,k}^{(2)} - 2\varepsilon(n+1)(k+1)T_{n,k-1}^{(2)} + 2\varepsilon n T_{n-1,k}^{(1)} - 2\varepsilon n(k+1)T_{n-1,k}^{(2)} + 4\varepsilon^2 n(k+1)T_{n-1,k-1}^{(2)}] + (n-1)[-T_{n-2,k}^{(1)} + (k+1)T_{n-2,k}^{(2)} - 2\varepsilon(k+1)T_{n-2,k-1}^{(2)}] \right\};$$

$$d_{0k}^{(21)} = \frac{1}{4}\bar{\lambda}^k T_{0,k-2}, \quad d_{0k}^{(22)} = -\frac{1}{4}\bar{\lambda}^{k+2} [(k+2)T_{0,k} - 2\varepsilon(k+1)T_{0,k-1}];$$

$$T_{m,s} = T_{m,s}^{(1)} - T_{m,s}^{(2)}; \quad T_{m,s}^{(j)} = 0 \quad (m,s = -1; -2; \dots);$$

$$\begin{cases} f_n^{(1)} = -(n+1)f_n^{(2)} + \bar{\lambda}^{n-1} T_{n-2,0}^{(1)}; & f_0^{(2)} = -\bar{\lambda} T_{0,0}^{(1)}; \\ f_n^{(2)} = -(n+2)\bar{\lambda}^{n+1} T_{n,0}^{(1)} - (n-1)\bar{\lambda}^{n-1} T_{n-2,0}^{(1)} + 2\varepsilon n \bar{\lambda}^{n+1} T_{n-1,0}^{(1)}; \end{cases} \quad (\text{I вариант})$$

$$\begin{cases} f_n^{(1)} = -(n+1)f_n^{(2)} - 4\bar{\lambda}^{n-1} \omega^{n-2} \beta_{n-2}; & f_0^{(2)} = 4\bar{\lambda} \beta_0; \beta_m = 0 \quad (m = -1; -2; \dots); \\ f_n^{(2)} = 4(n+2)\bar{\lambda}^{n+1} \omega^n \beta_n - 8n\bar{\lambda}^{n+1} \varepsilon \omega^{n-1} \beta_{n-1} + 4(n-1)\bar{\lambda}^{n-1} \omega^{n-2} \beta_{n-2}; \end{cases} \quad (\text{II вариант})$$

$$\bar{\lambda} = \frac{a}{R}, \quad \varepsilon = \frac{h}{a}, \quad \omega = \varepsilon + i; \quad T_{n,k}^{(j)} = (k+1)J_{n,k}^{(j)}; \quad J_{k,n}^{(j)} = J_{n,k}^{(j)} \quad (j=1; 2);$$

$$\begin{cases} J_{n,k}^{(1)} \\ J_{n,k}^{(2)} \end{cases} = \frac{\omega^{n+k+2}}{k+1} \int_{-\infty}^{\infty} D_{n+1}(\pm\tau) C_{k+1}(\tau) \frac{d\tau}{\text{ch}\pi\tau};$$

$$\beta_n = \int_{-\infty}^{\infty} F(-n, 1-i\tau; 2; \frac{2}{1-i\varepsilon}) \frac{d\tau}{\text{ch}\pi\tau}.$$

Существенно, что коэффициент интенсивности нормальных напряжений

$$K_I = \lim_{x \rightarrow a+0} [\sigma_y]_{\sigma=0} \sqrt{2(x-a)}$$

выражается непосредственно через решение системы (7):

$$K_I = \sigma_0 \sqrt{a} \left\{ 1 + \frac{1}{4} \sum_{k=0}^{\infty} [(k+2)x_k^{(2)} - x_{k+2}^{(1)} - 2\bar{\lambda}\varepsilon(k+2)x_{k+1}^{(2)}] \alpha_k \bar{\lambda}^{k+1} \right\} \quad (\text{I вариант});$$

$$K_I = \frac{P}{\pi\sqrt{a}} \left\{ 1 + \frac{1}{16} \sum_{k=0}^{\infty} [(k+2)x_k^{(2)} - x_{k+2}^{(1)} - 2\bar{\lambda}\varepsilon(k+2)x_{k+1}^{(2)}] \alpha_k \bar{\lambda}^{k+1} \right\} \quad (\text{II вариант});$$

$$\alpha_k = 2(k+1) \sum_{j=0}^k \frac{2^j (-k)_j \left(\frac{1}{2}\right)_j}{j! (2)_j} \sum_{m=0}^{k-j} C_{k-j}^m \varepsilon^{k-j-m} \cos \frac{\pi}{2} (j+m).$$

Используя равенства [4, 5]

$$\frac{\pi\tau}{\text{sh}\pi\tau} = \Gamma(1-i\tau)\Gamma(1+i\tau); \quad \frac{\pi}{\text{ch}\pi\tau} = \Gamma\left(\frac{1}{2}-i\tau\right)\Gamma\left(\frac{1}{2}+i\tau\right); \quad (\Gamma(z) - \text{гамма-функция});$$

$$\int_{-i\infty}^{i\infty} \Gamma(\alpha+s)\Gamma(\beta+s)\Gamma(\gamma-s)\Gamma(\delta-s) ds = 2\pi i \frac{\Gamma(\alpha+\gamma)\Gamma(\alpha+\delta)\Gamma(\beta+\gamma)\Gamma(\beta+\delta)}{\Gamma(\alpha+\beta+\gamma+\delta)};$$

$$F(a, b; c; z) = (1-z)^{-a} F(a, c-b; c; \frac{z}{z-1}) = \frac{\Gamma(c)}{\Gamma(b)\Gamma(c-b)} \int_0^1 \frac{t^{b-1} (1-t)^{c-b-1}}{(1-tz)^a} dt;$$

$$\sum_{j=0}^{\infty} \frac{(a)_j (b')_j}{j! (c')_j} z^j F(a+j, b; c; y) = F_2(a, b, b'; c, c'; y, z);$$

$$F_2(a, b, b'; a, a; y, z) = (1-y)^{-b} (1-z)^{-b'} F(b, b'; a; \frac{yz}{(1-y)(1-z)});$$

$$a(z-1)F(a+1, b; c; z) = -(2a-c-az+bz)F(a, b; c; z) - (c-a)F(a-1, b; c; z);$$

$$bF(a, b+1; c; \xi) = (b-a)F(a, b; c; \xi) + aF(a+1, b; c; \xi);$$

$$(b-a)(1-c)F(a, b; c; \xi) = (c-a)F(a-1, b; c; \xi) + (b-c)F(a, b-1; c; \xi),$$

( $F(a, b; c; z)$ ,  $F_2(a, b, b'; c, c'; y, z)$  – гипергеометрические функции), для

вычисления величин  $J_{n,k}^{(1)}$ ,  $J_{n,k}^{(2)}$ ,  $\beta_n$  получаем рекуррентные формулы

$$\left\{ \begin{aligned} J_{n+1, k+1}^{(1)} &= -\frac{1}{k+2} \left\{ (n+3)J_{n+2, k}^{(1)} - 2(n+k+3)\varepsilon J_{n+1, k}^{(1)} + \right. \\ &\quad \left. + (1+\varepsilon^2)[(n+1)J_{n, k}^{(1)} + kJ_{n+1, k-1}^{(1)}] \right\} \quad (n, k = 0; 1; 2; \dots); \\ J_{n+1, k+1}^{(2)} &= \frac{1}{k+2} \left\{ (n+3)J_{n+2, k}^{(2)} - 2(n-k+1)\varepsilon J_{n+1, k}^{(2)} + \right. \\ &\quad \left. + (1+\varepsilon^2)[(n+1)J_{n, k}^{(2)} - kJ_{n+1, k-1}^{(2)}] \right\} \quad (k \leq n; n, k = 0; 1; 2; \dots); \\ J_{n+2, 0}^{(1)} &= \frac{2n+5}{n+4} \varepsilon J_{n+1, 0}^{(1)} - \frac{n+1}{n+4} (1+\varepsilon^2) J_{n, 0}^{(1)} \quad (n = 0; 1; 2; \dots); \quad J_{m, 0}^{(2)} = -J_{m, 0}^{(1)}; \\ J_{k, n}^{(j)} &= J_{n, k}^{(j)} \quad (j = 1; 2); \quad J_{0, 0}^{(1)} = -\frac{1}{2}, \quad J_{1, 0}^{(1)} = -\frac{1}{2} \varepsilon \end{aligned} \right. \quad (8)$$

и явные выражения

$$\left\{ \begin{array}{l} J_{n,k}^{(1)} = -(\varepsilon+i)^{n+k} \sum_{j=0}^n \frac{(-n)_j \left(\frac{3}{2}\right)_j}{j!(2)_j} \left(\frac{2}{1-i\varepsilon}\right)^j \sum_{s=0}^k \frac{(-k)_s \left(\frac{3}{2}\right)_s}{s!(2)_s (j+s+2)} \left(\frac{2}{1-i\varepsilon}\right)^s; \\ J_{n,k}^{(2)} = (\varepsilon-i)^n (\varepsilon+i)^k \sum_{j=0}^n \frac{(-n)_j \left(\frac{3}{2}\right)_j}{j!(2)_j} \left(\frac{2}{1+i\varepsilon}\right)^j \sum_{s=0}^k \frac{(-k)_s \left(\frac{3}{2}\right)_s}{s!(2)_s (j+s+2)} \left(\frac{2}{1-i\varepsilon}\right)^s; \end{array} \right. \quad (9)$$

$$\beta_n = \sum_{k=0}^n \frac{(-n)_k \left(\frac{3}{2}\right)_k}{k!(2)_k} (1-i\varepsilon)^{-k} \sum_{j=0}^k (-1)^j \frac{(-k)_j}{j!(1+2j)}.$$

Формулы (8) удобны для вычисления матричных коэффициентов  $d_{nk}^{(ij)}$  бесконечной системы (7), но не приспособлены для исследования свойств этой системы. Записывая выражения (9) в интегральной форме

$$J_{n,k}^{(1)} = -(\varepsilon+i)^{n+k} \int_0^1 x F\left(-n, \frac{3}{2}; 2; \frac{2x}{1-i\varepsilon}\right) F\left(-k, \frac{3}{2}; 2; \frac{2x}{1-i\varepsilon}\right) dx;$$

$$J_{n,k}^{(2)} = (\varepsilon-i)^n (\varepsilon+i)^k \int_0^1 x F\left(-n, \frac{3}{2}; 2; \frac{2x}{1+i\varepsilon}\right) F\left(-k, \frac{3}{2}; 2; \frac{2x}{1-i\varepsilon}\right) dx,$$

используя интегральное представление [4]

$$F\left(-n, \frac{3}{2}; 2; z\right) = \frac{2}{\pi} \int_0^1 t^{\frac{1}{2}} (1-t)^{-\frac{1}{2}} (1-zt)^n dt$$

при  $z = \frac{2x}{1 \pm i\varepsilon}$ ,  $z = \frac{1+t}{1-i\varepsilon}$  и учитывая, что

$$|1-zt| \leq 1 \quad (0 \leq x, t \leq 1), \quad \left| F\left(-n, \frac{3}{2}; 2; z\right) \right| \leq \frac{2}{\pi} \int_0^1 t^{\frac{1}{2}} (1-t)^{-\frac{1}{2}} dt = 1,$$

получаем оценки

$$\left| J_{n,k}^{(1)} \right| \leq \frac{1}{2} \left( \sqrt{1+\varepsilon^2} \right)^{n+k}, \quad |\beta_n| \leq 1. \quad (10)$$

Из оценок (10) следует, что  $f_n \rightarrow 0$ ,

$$S_n^{(ij)} = \sum_{k=0}^{\infty} \left| d_{nk}^{(ij)} \right| \rightarrow 0 \quad (n \rightarrow \infty, 0 < \lambda = \frac{\sqrt{a^2+h^2}}{R} < 1),$$

т.е. бесконечная система (7) квазирегулярна при  $0 < \lambda < 1$  и вполне регурна при  $0 < \lambda \leq \lambda_0 < 1$  для некоторого  $\lambda_0 \in (0; 1)$ . Ограничение  $0 < \lambda < 1$  на возможные значения параметров  $a, h, R$  естественным образом связано с формулировкой задачи и означает, что окружность  $\rho_1 = R$  (граница

пластинки) не касается трещины  $\sigma=\pm\pi$ .

Решая бесконечную систему (7) методом малого параметра и ограничиваясь при этом членами до порядка  $\lambda^6$ , для коэффициента интенсивности нормальных напряжений получаем асимптотические формулы

$$K_I = \sigma_0 \sqrt{a} \left[ 1 + \frac{3}{2(1+\varepsilon^2)} \lambda^2 + \frac{5\varepsilon^2}{(1+\varepsilon^2)^2} \lambda^4 + \left( \frac{3}{4} - \frac{15}{2} \varepsilon^2 + 8\varepsilon^4 \right) \frac{1}{(1+\varepsilon^2)^3} \lambda^6 \right] + O(\lambda^8); \quad (11)$$

$$K_I = \frac{P}{\pi\sqrt{a}} \left[ 1 + \frac{3}{1+\varepsilon^2} \lambda^2 + \frac{1+20\varepsilon^2}{2(1+\varepsilon^2)^2} \lambda^4 + \left( \frac{1}{4} - 10\varepsilon^2 + 16\varepsilon^4 \right) \frac{1}{(1+\varepsilon^2)^3} \lambda^6 \right] + O(\lambda^8).$$

В частном случае  $h=0$  ( $\varepsilon=0$ ) асимптотические формулы (11) совпадают с соответствующими формулами, приведенными в работах [6–8].

На рис. 2, 3 показана зависимость безразмерных коэффициентов

интенсивности нормальных напряжений  $K_I^* = \frac{K_I}{\sigma_0 \sqrt{a}}$ ,  $K_I^* = \frac{\pi\sqrt{a}}{P} K_I$  от

параметра  $\varepsilon = \frac{h}{a}$  при значениях  $\lambda=0; 0,5; 0,6; 0,7$  ( $\lambda = \sqrt{a^2 + h^2} / R$ ). Зна-

чение  $\lambda=0$  соответствует неограниченной пластинке ( $R=\infty$ ), ослабленной трещиной  $\sigma=\pm\pi$ . В этом случае  $K_I^*$  ( $K_I$ ) не зависит от параметра  $\varepsilon$ .

При  $\lambda \neq 0$ ,  $h \neq 0$  коэффициенты  $K_I^*$  зависят от параметра  $h(\varepsilon)$ , причем функция  $K_I^* = K_I^*(\varepsilon)$  ( $\lambda = \text{const}$ ) монотонно убывает и  $\max K_I^*(\varepsilon) = K_I^*(0)$  (случай диаметральной трещины).

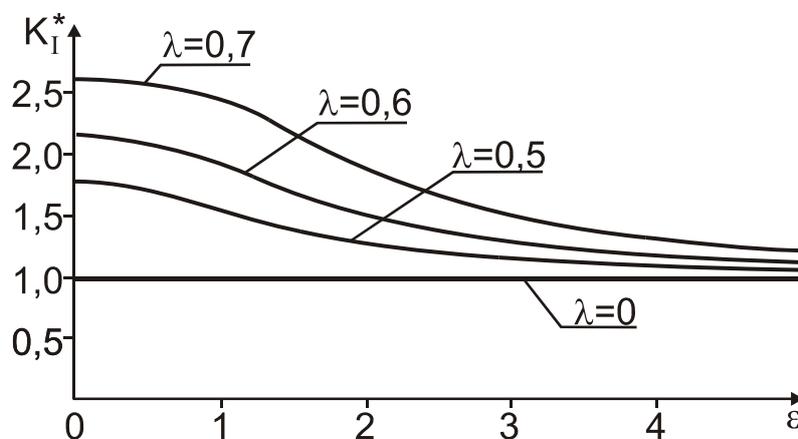


Рисунок 2 – Зависимость коэффициента интенсивности нормальных напряжений от параметра  $\varepsilon$  (вариант 1)

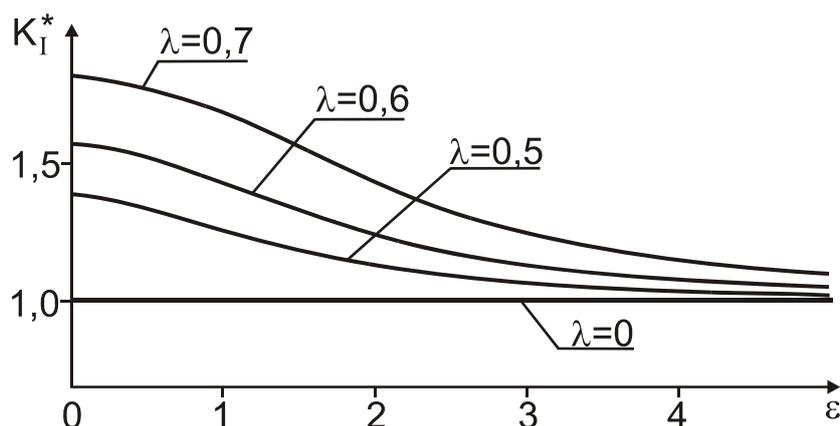


Рисунок 3 – Зависимость коэффициента интенсивности нормальных напряжений от параметра  $\varepsilon$  (вариант 2)

#### Список использованных источников

1. Сиратори, М. Вычислительная механика разрушения [Текст] / М. Сиратори, Т. Миёси, Х. Мацусита. – М.: Мир, 1986. – 334 с.
2. Проценко, В.С. О совместном применении декартовых и биполярных координат к решению краевых задач теории потенциала и теории упругости [Текст] / В.С. Проценко, А.И. Соловьев // Прикладная математика и механика. – 1984. – Т. 48, №6. – С. 973 – 982.
3. Проценко, В.С. Кручение упругих тел, ограниченных координатными поверхностями тороидальной и сферической систем координат [Текст] / В.С. Проценко, А.И. Соловьев, В.В. Цымбалюк // Прикладная математика и механика. – 1986. – Т. 50, № 3. – С. 415 – 425.
4. Бейтмен, Г. Высшие трансцендентные функции. Гипергеометрическая функция. Функции Лежандра [Текст] / Г. Бейтмен, А. Эрдейи. – М.: Наука, 1965. – 294 с.
5. Прудников А.П. Интегралы и ряды. Дополнительные главы [Текст] / А.П. Прудников, Ю.А. Брычков, О.И. Маричев. – М.: Наука, 1986. – 800 с.
6. Крестин, Г.С. Напряженное состояние диска с диаметральной трещиной [Текст] / Г.С. Крестин, Л.Л. Лобацкий, С.Я. Ярема // Физико-химическая механика материалов. – 1972. – Т. 6, № 2. – С. 69 – 74.
7. Панасюк, В.В. Распределение напряжений около трещин в пластинах и оболочках [Текст] / В.В. Панасюк, М.П. Саврук, А.П. Дацышин. – К.: Наук. думка, 1976. – 443 с.
8. Соловьев, А.И. Упругое равновесие круговых кусочно-однородных сред с диаметральной трещиной [Текст] / А.И. Соловьев // Прикладная математика и механика. – 1987. – Т. 51, № 5. – С. 853 – 857.

*Поступила в редакцию 10.07.2011.*

*Рецензент: д-р физ.-мат. наук, проф. А. Г. Николаев,  
Национальный аэрокосмический университет  
им. Н. Е. Жуковского «ХАИ», Харьков*