

ИССЛЕДОВАНИЕ ПРОДОЛЬНО-СЖАТЫХ СТЕРЖНЕЙ ПЕРЕМЕННОЙ ЖЕСТКОСТИ

Оценивание несущей способности конструкции помимо прочностного расчета должна включать вопросы устойчивости всей системы и отдельных ее элементов. В первую очередь это очень важно для самолетостроения, так как многие элементы конструкции планера работают на сжатие и могут потерять устойчивость при напряжениях, значительно меньших, чем разрушающие [1].

В большинстве конструкций применяются стержни с неизменной по их длине жесткостью, а для уменьшения массы целесообразно использовать стержни переменной жесткости. Такие стержни рассматривались в источниках [2, 3], но стержни металлические, изготовление которых – сложный и дорогостоящий процесс.

Развитие технологии изготовления изделий из композиционных материалов (КМ) привело к тому, что стало возможным получение конструкций различной формы, при этом сам процесс получения таких изделий значительно проще и экономичнее, нежели аналогичных металлических. Например, такие изделия можно получить путем подмотки пултрузионного стержня, либо методом ручной выкладки по шаблонам и т.п.

При эйлеровой форме потери устойчивости критическую силу определяют из дифференциального уравнения изогнутой оси, справедливого для любого участка стержня, в пределах которого продольная сила неизменна [3]:

$$-\frac{d^2}{dx^2} \left\{ EI(x) \frac{d^2 v(x)}{dx^2} \right\} + P \frac{d^2 v(x)}{dx^2} = 0, \quad (1)$$

где $v(x)$ – форма изгиба оси стержня;

EI – жесткость стержня;

P – сжимающая нагрузка.

При расчете стержня переменного сечения (рис.1) уравнение (1) становится однородным дифференциальным уравнением четвертого порядка с переменными коэффициентами.

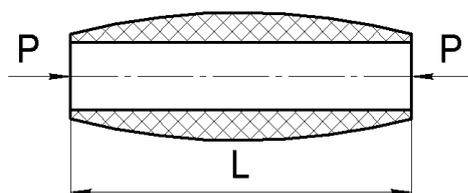


Рисунок 1 – Продольно-сжатый стержень переменной жесткости

Аналитически такого вида уравнения (1) решаются очень редко, и чаще всего прибегают к использованию приближенных методов, к которым относится и энергетический метод Ритца – Тимошенко. Согласно этому методу изначально задаются предполагаемой формой изгиба в виде суммы функций с неопределенными множителями a_i ($i=1, \dots, n$) [3]:

$$v(x) = \sum_{i=1}^n a_i f_i. \quad (2)$$

Здесь под f_i понимаются функции от x , удовлетворяющие геометрическим граничным условиям задачи, т.е. таким, которые относятся к прогибам и углам поворота, независимо от a_i .

Формула полной потенциальной энергии стержня имеет вид [3]

$$\Theta = \frac{1}{2} \int_0^L EI(x) \left[\frac{d^2 v(x)}{dx^2} \right]^2 dx - \frac{1}{2} P \int_0^L \left[\frac{dv(x)}{dx} \right]^2 dx. \quad (3)$$

Разрешающие уравнения для определения критических усилий представляют собой такую систему:

$$\frac{\partial \Theta}{\partial a_1} = 0, \quad \frac{\partial \Theta}{\partial a_2} = 0, \dots, \quad \frac{\partial \Theta}{\partial a_n} = 0. \quad (4)$$

Определитель системы уравнений (4) содержит нагрузку в степени n . Решая эту систему, получаем n значений P . Наименьший корень и будет искомым критическим усилием [2].

Теперь, если в (3) подставить (2), выражение (4) после некоторых преобразований можно записать в виде

$$\frac{\partial \Theta}{\partial a_k} = \sum_{i=1}^n \left\{ \int_0^L EI(x) \frac{d^2 f_i}{dx^2} \frac{d^2 f_k}{dx^2} dx - P \int_0^L \frac{df_i}{dx} \frac{df_k}{dx} dx \right\} a_i = 0; \quad k = 1 \dots n. \quad (5)$$

Выражение (5) представляет собой систему линейных алгебраических уравнений. Если учесть, что $a_i \neq 0$, то решение (5) будет существовать только в том случае, если $i=k$ и если определитель, состоящий из коэффициентов при a_i , будет равен нулю [2].

Представляет интерес сравнение уровня критической сжимающей силы стержней с постоянной и переменной жесткостью одной и той же массы.

Рассмотрим несколько типовых форм изменения жесткости, найдем оптимальную для каждого варианта и подберем форму прогиба для стержней с различными условиями закрепления концов.

Во всех вариантах подбора формы прогиба ограничиваемся четырьмя членами ряда, так как этого достаточно для его сходимости. Погрешность составляет менее 5% [3].

При рассмотрении стержней за EI_0 принимается жесткость в сечении $x=L/2$, где L – длина стержня.

Для первого и второго вариантов (таблица) уменьшение массы составляет 22,59 и 15,38% соответственно, а отношение критических усилий стержней с переменной и постоянной структурами КМ равно 2,11 и 1,63.

На рис. 2 показаны зависимости процента снижения массы от длины стержня.

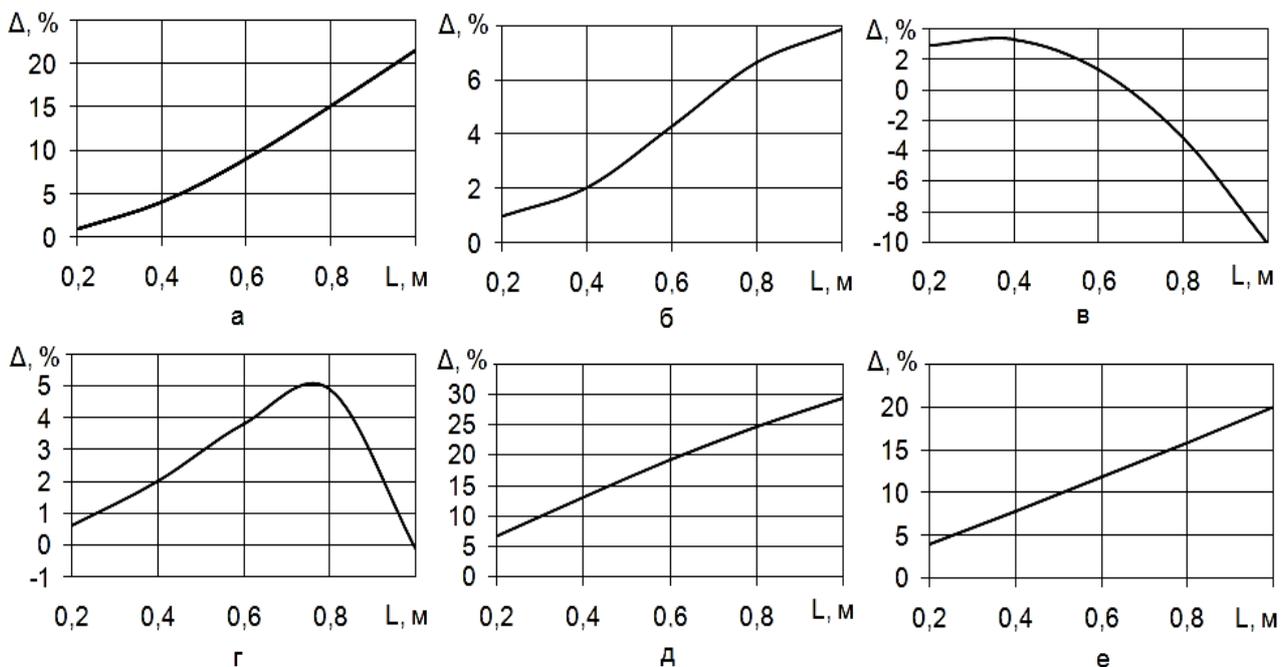
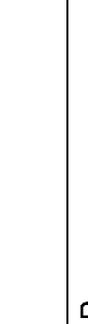


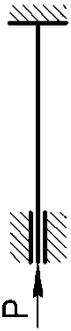
Рисунок 2 – Зависимость уменьшения массы стержня от его длины:

а – стержень с шарнирным опиранием (вариант 5) и параболической функцией изменения жесткости; б – жестко защемленный с двух сторон стержень (вариант 7); в – жестко защемленный с одной стороны стержень (вариант 6); г – стержень (вариант 8), жестко защемленный с одной и шарнирно закрепленный с другой стороны; д – стержень с шарнирным опиранием (вариант 3) и линейной функцией изменения радиуса; е – стержень с шарнирным опиранием (вариант 4) и линейной функцией изменения толщины стенки

Таблица – Варианты рассмотренных продольно-сжатых стержней переменной жесткости

Номер варианта	Схема опирания стержня	Функция изменения жесткости	Функция прогиба (изогнутой оси)
1		$EI(x) = EI_0 \left[(1 - 0,7) \sin \frac{\pi x}{L} + 0,7 \right]^3$	$v(x) = \sum_{i=1}^n a_i \sin \frac{\pi x i}{L}, n = 1 \dots 4$
2		$EI(x) = EI_0 \left[(1 - 0,5) \sin \frac{\pi x}{L} + 0,5 \right]^3$	$v(x) = \sum_{i=1}^n a_i \sin \frac{\pi x i}{L}, n = 1 \dots 4$
3		$EI(x) = \begin{cases} EI_0 \left[1 - \left(\frac{L-x}{2} \right) \right]^3 & \text{if } x \in \left[0; \frac{L}{2} \right) \\ EI_0 \left[1 + \left(\frac{L-x}{2} \right) \right]^3 & \text{if } x \in \left[\frac{L}{2}; L \right] \end{cases}$	$v(x) = \sum_{i=1}^n a_i x^i (L-x), n = 1 \dots 4$
4		$EI(x) = \begin{cases} EI_0 \left[1 - \left(\frac{L-x}{2} \right) \right]^3 & \text{if } x \in \left[0; \frac{L}{2} \right) \\ EI_0 \left[1 + \left(\frac{L-x}{2} \right) \right]^3 & \text{if } x \in \left[\frac{L}{2}; L \right] \end{cases}$	$v(x) = \sum_{i=1}^n a_i x^i (L-x), n = 1 \dots 4$
5		$EI(x) = EI_0 \left[-2 \left(\frac{L-x}{2} \right)^2 + 1 \right]^3$	$v(x) = \sum_{i=1}^n a_i x^i (L-x), n = 1 \dots 4$
6		$EI(x) = EI_0 \left[\left(\frac{L-x}{2} \right)^2 + \left(\frac{L-x}{2} \right) + 1 \right]^3$	$v(x) = \sum_{i=1}^n a_i x^{i+1}, n = 1 \dots 4$

Продолжение таблицы

Номер варианта	Схема опирания стержня	Функция изменения жесткости	Функция прогиба (изогнутой оси)
7		$EI(x) = EI_0 \left[-2 \left(\frac{L-x}{2} \right)^2 + 1 \right]^3$	$v(x) = \sum_{i=1}^n a_i x^{i+1} (L-x)^{i+1}, \quad n = 1 \dots 4$
8		$EI(x) = EI_0 \left[-2 \left(\frac{L-x}{2} \right)^2 + \frac{1}{2} \left(\frac{L-x}{2} + 1 \right) \right]^3$	$v(x) = \sum_{i=1}^n a_i x^{i+1} (L-x), \quad n = 1 \dots 4$
9		$EI(x) = \begin{cases} \frac{1}{3} EI_0 & \text{if } x \in \left[0; \frac{L}{5} \right) \cap \left(L - \frac{L}{5}; L \right] \\ \frac{1}{2} EI_0 & \text{if } x \in \left[\frac{L}{5}; \frac{2L}{5} \right) \cap \left[L - \frac{2L}{5}; L - \frac{L}{5} \right) \\ EI_0 & \text{if } x \in \left[\frac{2L}{5}; L - \frac{2L}{5} \right] \end{cases}$	$v(x) = \sum_{i=1}^n a_i x^i (L-x), \quad n = 1 \dots 4$

На рис. 2 уменьшение массы представляем в виде

$$\Delta = \frac{G_2 - G_1}{G_2} \cdot 100\%, \quad (6)$$

где G_1 – масса стержня переменной жесткости;

G_2 – масса стержня постоянной жесткости.

Отношение критической силы P_1 к P_2 зависит от длины стержня и имеет вид, который для вариантов 3 – 8 (см. таблицу) показан на рис. 3.

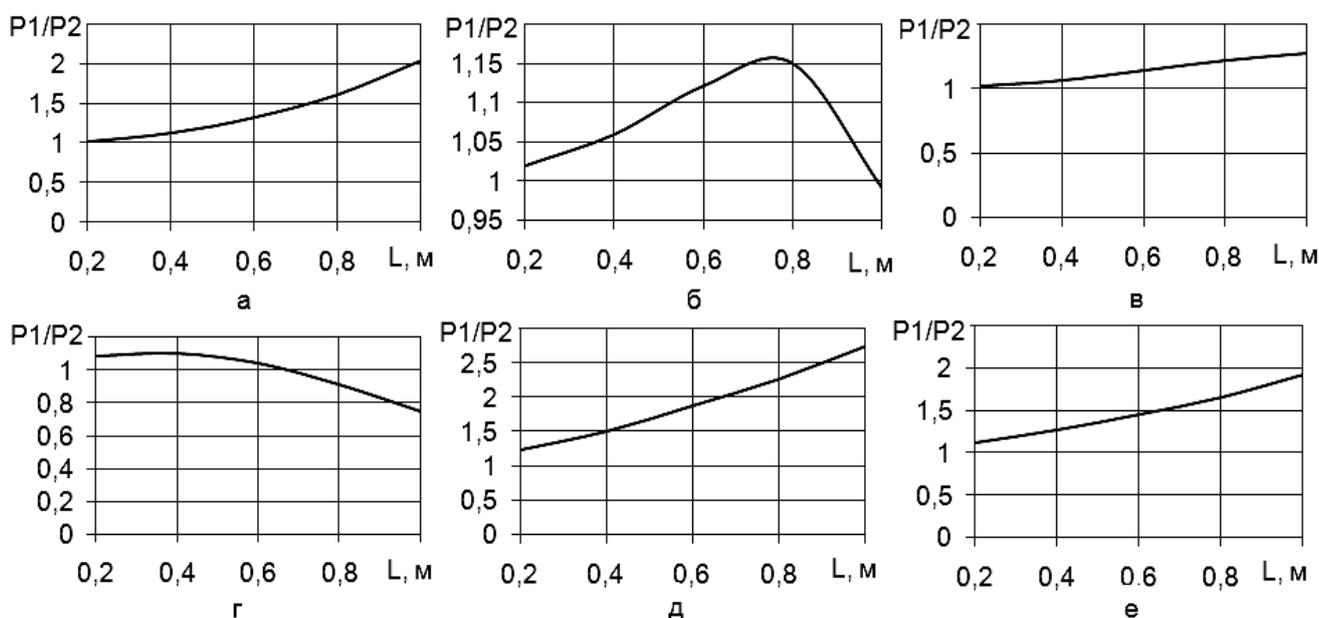


Рисунок 3 – Зависимость отношения критических сил стержней от их длины:

а – стержень с шарнирным опиранием (вариант 5) и параболической функцией изменения жесткости; б – стержень (вариант 8), жестко защемленный с одной и шарнирно закрепленный с другой стороны; в – жестко защемленный с двух сторон стержень (вариант 7); г – жестко защемленный с одной стороны стержень (вариант 6); д – стержень с шарнирным опиранием (вариант 3) и линейной функцией изменения радиуса; е – стержень с шарнирным опиранием (вариант 4) и линейной функцией изменения толщины стенки

Для девятого варианта (см. таблицу) уменьшение массы не зависит от его длины и составляет 27,5%.

Отношение критической силы P_1 стержня переменной жесткости к критической силе P_2 стержня постоянной жесткости при одинаковых их массах также остается постоянным, т.е. не зависит от длины, и составляет 2,51.

Выводы

Разработана методика определения критических усилий для стержней переменной жесткости и составлено программное обеспечение для ее реализации. Подобраны оптимальные формы стержней. Показано, что уровень снижения массы для всех рассматриваемых форм стержней при шарнирном закреплении составляет 15...30%, при других схемах опирания – до 8%.

Величина критических усилий для стержней с шарнирным опиранием и переменной жесткостью в 1,5 – 2,5 раза больше критических усилий стержня постоянной жесткости. В остальных случаях увеличения критических усилий не наблюдалось.

Учитывая простоту изготовления стержней с переменной жесткостью из КМ, их применение для уменьшения массы конструкции целесообразно и достаточно эффективно.

Список использованных источников

1. Дибир А.Г. Устойчивость продольно сжатых стержней / А.Г. Дибир, О.В. Макаров, Н.И. Пекельный: учеб. пособие. – Х.: Нац. аэрокосм. ун-т им. Н.Е. Жуковского «Харьк. авиац. ин-т», 2008. – 43 с.
2. Вольмир А.С. Устойчивость деформируемых систем / А.С. Вольмир – М.: Наука, 1967. – 984 с.
3. Биргер И.А. Прочность. Устойчивость. Колебания: справ.: в 3 т. – Т. 3 / под ред. И.А. Биргера, Я.Г. Пановко – М.: Машиностроение, 1968. – 568 с.

*Поступила в редакцию 20.04.2011.
Рецензент: д-р техн. наук, проф. Я.С. Карпов,
Национальный аэрокосмический университет
им. Н.Е. Жуковского «ХАИ», Харьков*