

РАСЧЕТ НАПРЯЖЕННОГО СОСТОЯНИЯ УПРУГОЙ ОБОЛОЧКИ С ПЕРИОДИЧЕСКОЙ СИСТЕМОЙ КРУГЛЫХ ОТВЕРСТИЙ

Постановка проблемы и анализ последних исследований.

Многие ответственные элементы конструкций в разных областях современной техники выполнены в виде цилиндрических оболочек, ослабленных отверстиями разных форм и размеров. Концентрация напряжений вблизи этих отверстий, как правило, существенным образом влияет на несущую способность конструкции и поэтому должна учитываться при расчете ее прочности. Необходимо отметить, что в научной литературе накоплен большой материал по методам расчета на прочность и жесткость упругих оболочек, но при этом объектом исследования большинства работ по проблеме концентрации напряжений возле отверстий в цилиндрических оболочках являются оболочки, ослабленные одним отверстием. Что касается периодических задач для цилиндрических оболочек, то их решению посвящено незначительное число исследований, основанных лишь на применении классической теории оболочек.

Таким образом, широкое распространение цилиндрических конструкций с периодическими системами отверстий произвольной формы и величины, а также отсутствие в научной литературе результатов решения в уточненных постановках указанных периодических задач, представляющих собой теоретический интерес и имеющих практическое значение, свидетельствует об актуальности данного исследования и приводит к необходимости создания эффективных подходов расчета рассматриваемых оболочек. Отметим, что выполненное в работе исследование концентрации напряжений в цилиндрах с отверстиями основано на применении общих уравнений уточненной теории оболочек с конечной сдвиговой жесткостью типа Рейсснера – Тимошенко.

Предлагаемый метод исследований. В математической постановке исследование напряженного состояния упругой цилиндрической оболочки, ослабленной отверстиями, приводит к решению сложной краевой задачи для многосвязной области. В монографии [1] на основе общих уравнений трехмерной теории оболочек и математического аппарата теории R -функций [2] изложен новый численно-аналитический вариационный метод, позволяющий эффективно решать задачи статики упругих пластин и оболочек с отверстиями. При этом в [1] для приближенного решения многосвязных краевых задач используется смешанный вариационный принцип Рейсснера, в котором независимо друг от друга варьируются тензор напряжений σ и вектор перемещений u . Принцип Рейсснера заключается в том, что вариационное уравнение

$$\delta I_R = 0 \quad (1)$$

эквивалентно уравнениям равновесия, физическим соотношениям упругости, статическим и геометрическим граничным условиям.

Аналитически функционал Рейсснера I_R представляется в виде

$$I_R = \int_V [\sigma \varepsilon - A(\sigma) - \mathbf{K} \mathbf{u}] dV - \int_{S_1} \mathbf{n} \sigma (\mathbf{u} - \mathbf{u}^*) ds - \int_{S_2} \mathbf{F} \mathbf{u} ds. \quad (2)$$

Здесь ε - тензор деформации; $A(\sigma)$ - удельная потенциальная энергия деформации; $\mathbf{K}$ - вектор объемных сил; $\mathbf{u}^*$ и $\mathbf{F}$ - вектор перемещений и поверхностная сила, соответственно заданные на частях S_1 и S_2 поверхности исследуемой упругой оболочки.

Объект исследования и структура решений исследуемой краевой задачи. В монографии [1] получены аналитические структуры решений, позволяющие точно удовлетворить различным вариантам граничных условий как на краю цилиндрической оболочки, так и на краю произвольного отверстия. Эффективность применения указанных структур иллюстрируется в данном исследовании на примере численного расчета напряженного состояния цилиндрического ленточного бандажа с периодической системой жестко заземленных круглых отверстий.

Исследование проводится в два этапа. На первом этапе ленточный бандаж рассматривается как многосвязная пластина. На втором этапе исследуется влияние кривизны бандажа на его напряженное состояние, в этом случае объект численного расчета - многосвязная цилиндрическая оболочка с конечной сдвиговой жесткостью [3].

Рассмотрим вначале упругое равновесие бесконечной пластины постоянной толщины h шириной $2b$, ослабленной периодической системой круглых отверстий радиусом r с периодом их размещения $2a$ вдоль линии $x = 0$ (рис. 1).

Пусть пластина находится под действием равномерно распределенной изгибающей нагрузки q . Тогда в силу симметрии определение напряженно-деформированного состояния оболочки сводится к исследованию (в плане) расчетного периодического участка $ABCDF$ (рис. 1), граница области Ω которого разбита на элементы $\Gamma_0, \Gamma_1, \Gamma_2$ ($\omega_s = 0$ - уравнение элемента Γ_s при $s = \overline{0, 2}$), где Γ_0 - контур отверстия; Γ_1 и Γ_2 - соответственно контуры расчетного участка пластины в направлении осей x (край AB) и y (контур BC).

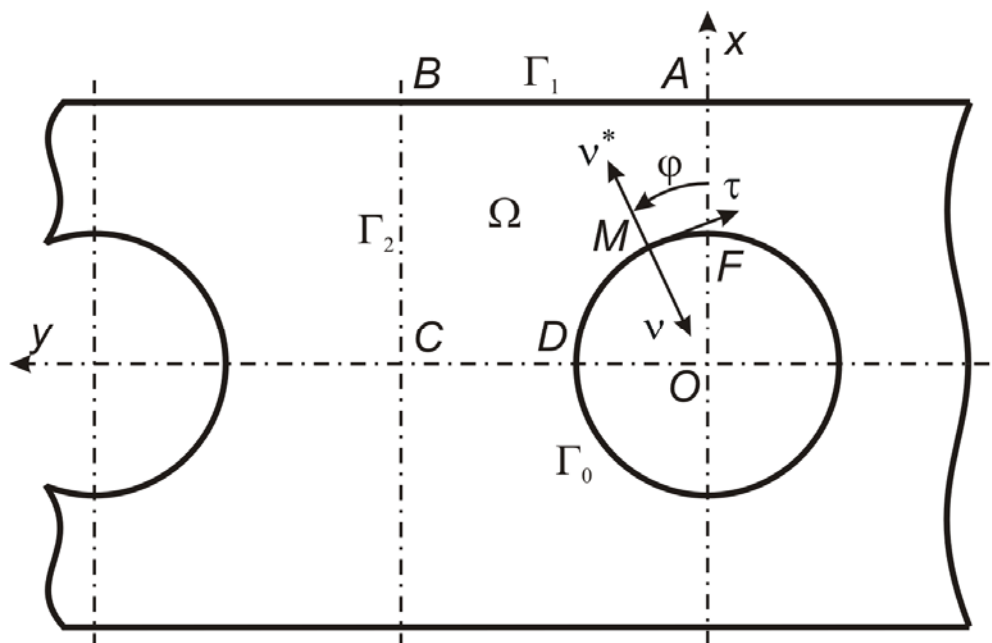


Рисунок 1 – Расчетный периодический участок упругой области

Так как для решения задачи изгиба упругой пластины с периодической системой отверстий применяется теория пластин, учитывающая деформации поперечного сдвига, то используемый функционал Рейснера I_R в качестве независимых функций включает в себя

$$w, \gamma_1, \gamma_2, M_x, M_y, H, Q_x, Q_y, \quad (3)$$

где w - прогиб пластины; γ_1, γ_2 - углы поворота нормального волокна в плоскостях (xz) и (yz) ; M_x, M_y и H - соответственно изгибающие и крутящий моменты; Q_x, Q_y - перерезывающие усилия.

Пусть края отверстий жестко защемлены, а продольные края упругой пластины (при $x = \pm b$) свободны от внешних усилий и моментов. Тогда согласно сформулированной краевой задаче граничные условия будут иметь следующий вид:

$$\text{на } \Gamma_0 \quad w = \gamma_1 = \gamma_2 = 0; \quad (4)$$

$$\text{на } \Gamma_1 \quad \gamma_1 = H = Q_x = 0; \quad (5)$$

$$\text{на } \Gamma_2 \quad M_y = H = Q_y = 0. \quad (6)$$

С учетом (4) – (6) искомые обобщенные перемещения w, γ_1, γ_2 и обобщенные усилия M_x, M_y, H, Q_x, Q_y (3) представим в виде

$$\left. \begin{aligned} \gamma_1 &= \omega_0 \sum_{i=0}^{n_1} \sum_{j=0}^{n_2} A_{1m} P_{2i+1} C_j; & \gamma_2 &= \omega_0 \sum_{i=0}^{n_1} \sum_{j=0}^{n_2} A_{2m} P_{2i} S_j; \\ w &= \omega_0 \sum_{i=0}^{n_1} \sum_{j=0}^{n_2} A_{3m} P_{2i} C_j; & M_x &= \omega_1 \sum_{i=0}^{n_1} \sum_{j=0}^{n_2} B_{1m} P_{2i} C_j; \\ M_y &= \sum_{i=0}^{n_1} \sum_{j=0}^{n_2} B_{2m} P_{2i} C_j; & H &= \omega_1 \sum_{i=0}^{n_1} \sum_{j=0}^{n_2} B_{3m} P_{2i+1} S_j; \\ Q_x &= \omega_1 \sum_{i=0}^{n_1} \sum_{j=0}^{n_2} B_{4m} P_{2i+1} C_j; & Q_y &= \sum_{i=0}^{n_1} \sum_{j=0}^{n_2} B_{5m} P_{2i} S_j. \end{aligned} \right\} \quad (7)$$

Здесь $A_{1m}, A_{2m}, A_{3m}, B_{1m}, B_{2m}, \dots, B_{5m}$ - постоянные, подлежащие определению; P_n - полином Лежандра степени n относительно переменной x ; $m = i(n_2 + 1) + j + 1$.

Функции ω_0, ω_1, C_j и S_j определяются формулами

$$\left. \begin{aligned} \omega_0 &= \sqrt{x^2 + y^2} - r; & \omega_1 &= \frac{1}{2b}(b^2 - x^2); \\ C_j &= \cos \frac{j\pi}{a} y; & S_j &= \sin \frac{(j+1)\pi}{a} y, \end{aligned} \right\} \quad (8)$$

Подставляя затем структуры (7) в вариационное уравнение (1) и сводя тем самым исходную краевую задачу к решению системы линейных алгебраических уравнений, определяем значения для постоянных $A_{1m}, A_{2m}, A_{3m}, B_{1m}, B_{2m}, \dots, B_{5m}$, по которым и находятся искомые обобщенные перемещения и усилия (3).

Численная реализация предложенного вариационного подхода. В результате численного решения поставленной задачи на рис. 2 построена (при $a = 3r$) упругая поверхность расчетного участка бандажа. По оси z отложены значения приведенного прогиба

$$w^* = \frac{E_x h^3}{qa^4} w, \quad (9)$$

а возле точек A, B и C приводятся числа, отвечающие значениям w^* в этих точках при $b = 4r$ (в числителях) и при $b = 3r$ (в знаменателях).

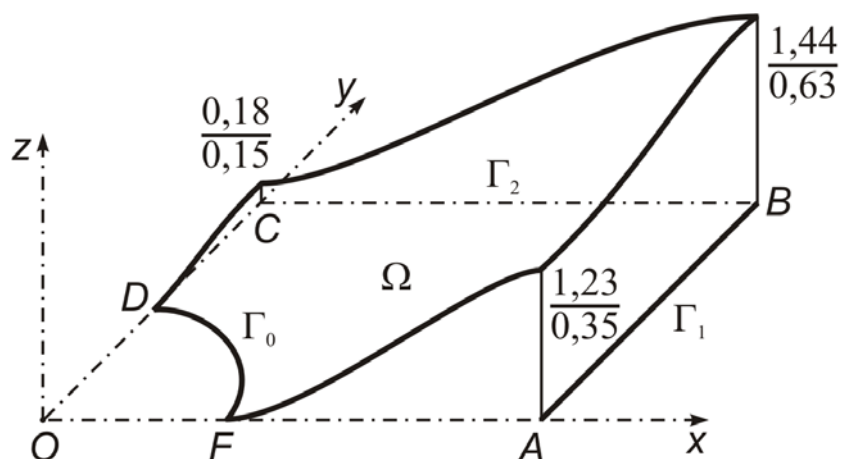


Рисунок 2 – Упругая поверхность расчетного участка панели

На рис. 3 и 4 в соответствующих точках $D(0, r)$ при $\varphi = \pi/2$ и $F(r, 0)$ при $\varphi = 0$ приведены графики безразмерного радиального напряжения σ_r^* в зависимости от соотношения $\varepsilon_1 = r/a$ (цифры 0,8; 1 и 1,2 возле графиков относятся к значениям величины $\varepsilon = b/a$).

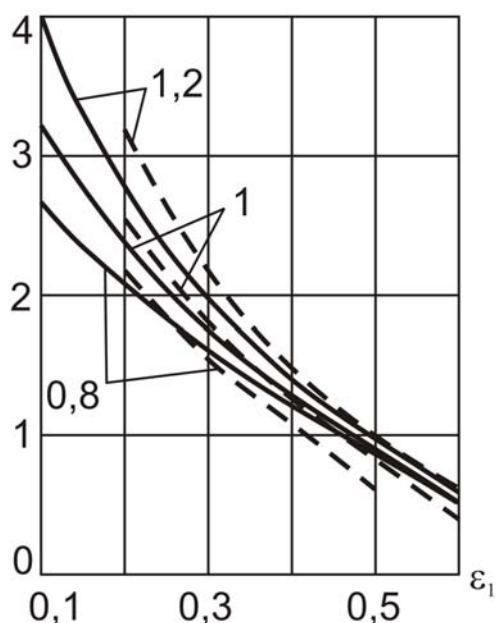


Рисунок 3 – Графики безразмерного радиального напряжения σ_r^* в зависимости от соотношения $\varepsilon_1 = r/a$ при $\varphi = \pi/2$

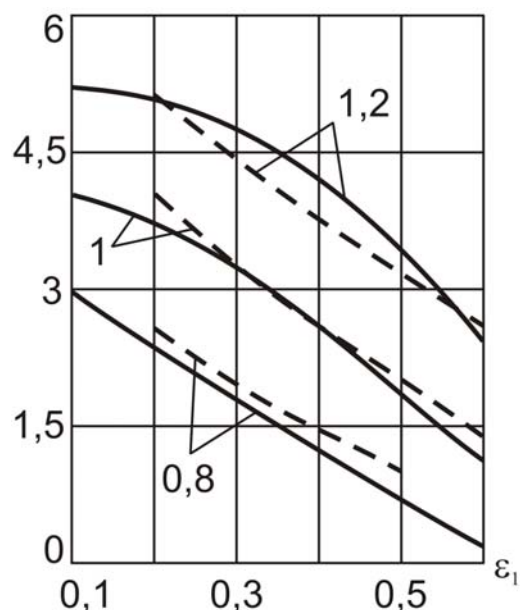


Рисунок 4 – Графики безразмерного радиального напряжения σ_r^* в зависимости от соотношения $\varepsilon_1 = r/a$ при $\varphi = 0$

Безразмерное напряжение σ_r^* определяется согласно формулам

$$\sigma_r^* = \frac{h^2}{qa^2} \sigma_r, \quad \sigma_r = \sigma_x \cos^2 \varphi + \tau_{xy} \sin 2\varphi + \sigma_y \sin^2 \varphi. \quad (10)$$

Сплошными линиями на рис. 3 и 4 отражены результаты, полученные с учетом деформаций поперечного сдвига; штриховыми - на базе технической теории изгиба пластин [4]. Из рисунков видно, что в случае изотропной пластины учет указанных деформаций дает к результатам [4] поправку, составляющую примерно 15%.

Для учета кривизны ленточного бандажа при определении его напряженного состояния переходим ко второму этапу исследования. Так как бандаж рассматривается теперь как элемент многосвязной цилиндрической оболочки с конечной сдвиговой жесткостью [3], структура решений (7) кроме наличия искомых функций (3) пополнится функциями

$$u, v, N_x, N_y, S, \quad (11)$$

где u, v - перемещения соответствующей точки срединной поверхности упругой оболочки; N_x, N_y и S - нормальные и сдвигающее усилия. При этом аналитические выражения для искомых решений u, v, N_x, N_y, S будут такими же, как и выражения для $\gamma_1, \gamma_2, M_x, M_y, H$ в (7), если в последних заменить $A_{1m}, A_{2m}, B_{1m}, B_{2m}, B_{3m}$ на $A_{4m}, A_{5m}, B_{6m}, B_{7m}, B_{8m}$ соответственно.

Граничные условия рассматриваемой задачи имеют вид

$$\text{на } \Gamma_0 \quad u = v = w = \gamma_1 = \gamma_2 = 0; \quad (12)$$

$$\text{на } \Gamma_1 \quad u = S = Q_x = \gamma_1 = H = 0; \quad (13)$$

$$\text{на } \Gamma_2 \quad N_y = S = M_y = H = Q_y = 0. \quad (14)$$

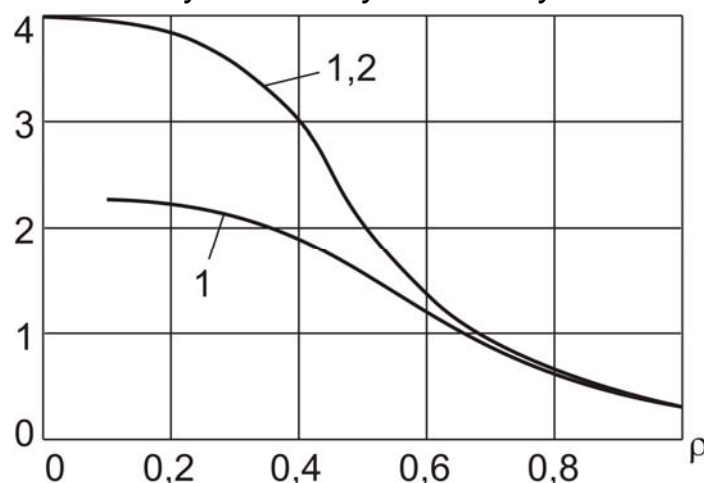


Рисунок 5 – Графики σ_r^* в точке $F(r, 0)$ в зависимости от величины ρ

В результате использования изложенной в монографии [1] методики решения краевых задач для многосвязных упругих оболочек на рис. 5 (цифры 1 и 1,2 возле графиков относятся к значениям величины

$\varepsilon = b/a$) приведены графики искомых напряжений σ_r^* (при $\varepsilon_1 = 0,45$; $R/h = 500$) для точки $F(r, 0)$ в зависимости от величины параметра

$$\rho = r/\sqrt{Rh}, \quad (15)$$

где R - радиус срединной поверхности оболочки; h - толщина оболочки. Как видно, неучет кривизны оболочки при некоторых значениях параметра ρ может дать неверные результаты. Однако следует заметить, что в области изменения параметра ρ от 0,1 до 0,4 учет кривизны бандажа вносит в результаты [4] поправку, не превышающую 25%. При исследовании напряженного состояния бандажа турбины это обстоятельство давало возможность авторам работы [4] рассматривать конкретный бандаж как многосвязную пластину лишь в первом приближении.

Выводы

Представленные результаты, а также опыт эффективного использования изложенного в монографии [1] метода при решении многочисленных прикладных задач показывает, что в случае программной реализации апостериорной интегральной оценки численных результатов процесс сходимости решения имеет устойчивый характер, а осуществляемая на компьютере постоянная оценка решения позволяет автоматизировать поиск такого числа аппроксимаций, при котором результаты имеют достоверный характер. Таким образом, метод двусторонней оценки точности приближенных решений в сочетании с использованием математического аппарата теории R-функций при построении структур решений может стать эффективным средством для расчета многосвязных оболочечных элементов технических конструкций.

Список использованных источников

1. Сало В.А. Краевые задачи статики оболочек с отверстиями / В.А. Сало. – Х.: НТУ «ХПИ», 2003. – 216 с.
2. Рвачев В.Л. Метод R-функций в задачах теории упругости и пластичности / В.Л. Рвачев, Н.С. Синекон. – К.: Наук. думка, 1990. – 216 с.
3. Пелех Б.Л. Теория оболочек с конечной сдвиговой жесткостью / Б.Л. Пелех. – К.: Наук. думка, 1973. – 246 с.
4. Шубенко-Шубин Л.А. Напряжения в полосе с круглыми отверстиями / Л.А. Шубенко-Шубин, В.А. Хворост // Доклады АН УССР. – 1973. – Сер. А., № 8. – С.734-757.

Поступила в редакцию 20.01.2011.

*Рецензент: д-р физ.-мат. наук, проф. А. Г. Николаев,
Национальный аэрокосмический университет
им. Н. Е. Жуковского «ХАИ», г. Харьков*