

ОБОБЩЕННАЯ ТЕОРИЯ СЛОИСТЫХ ОРТОТРОПНЫХ ПЛАСТИН

Область применения тонкостенных слоистых конструкции в технике и строительстве постоянно расширяется. В связи с этим возникает необходимость в разработке новых и усовершенствовании существующих методов их анализа. При этом новые методы должны не только с достаточной точностью описывать напряженно-деформированное состояние (НДС) конструкции, но и обладать высокой универсальностью и алгоритмичностью. К сожалению, применение для этих целей трехмерных уравнений упругости является достаточно сложной математической задачей, требующей, в общем случае, использования численных методов. Поэтому на практике широкое распространение получили различные двумерные теории, позволяющие за счет применения аналитических подходов существенно уменьшить время решения задачи. Это является особо важным при рассмотрении динамических, обратных задач, а также задач оптимизации и управления. Однако при использовании двумерных моделей необходимо учитывать тот факт, что эти модели не являются универсальными и имеют определенные границы применимости.

К настоящему времени разработано достаточно много уточненных методов расчета слоистых конструкций [1–10]. Установлено, что классические теории, основанные на гипотезе прямой нормали, для слоистых композитных структур в большинстве случаев неприменимы [5]. Подробный анализ характеристик двумерных методов расчета дается в работах [3, 4, 7].

Одним из способов построения уточненных моделей является применение разложений в ряды по поперечной координате [3, 7, 8]. Это – и степенные ряды, и разложение по полиномам. Наиболее просто двумерные модели строятся на основе разложения перемещений в степенные ряды по поперечной координате [7, 8, 10]. Применение разложений по полиномам дает возможность получить более точные аппроксимации, однако алгоритм решения в этом случае становится более сложным и в разрешающих уравнениях удастся учесть только первые члены этих разложений.

Теории, описывающие деформирование многослойных пластин, как правило, исходят из того, что деформации линейно зависят от поперечной координаты [6, 9]. При этом поперечными деформациями пренебрегают или считают, что они не изменяются по толщине слоя. Однако известно, что при увеличении толщины конструкции или при локальном ее нагружении эти зависимости носят существенно нелинейный характер. Аналогичный вид имеет распределение

сдвиговых поперечных напряжений по толщине даже для относительно тонких пластин при распределенных нагрузках [11].

В работе предлагается развитие обобщенной теории многослойных пластин [12, 13] для случая слоистых ортотропных конструкций. В основе этой теории лежит предположение о том, что перемещения каждого слоя пластины могут быть представлены в виде конечных степенных рядов по поперечной координате. Предлагаемая теория позволяет получать высокоточные аппроксимации перемещений и всех компонент напряжений (в том числе поперечных) для каждого слоя, а также с достаточной точностью выполнить условия контакта слоев.

Постановка задачи

Пластина постоянной толщины отнесена к прямоугольной декартовой системе координат $Ox_1x_2x_3$, связанной с наружной поверхностью первого слоя (рис. 1). Контакт между слоями исключает их расслаивание и взаимное проскальзывание. Количество слоев в пакете равно l , h_i – толщина i -го слоя. Слои изготовлены из ортотропных материалов, главные направления ортотропии которых совпадают с направлениями осей координат.

К наружной поверхности первого слоя приложена внешняя сила $\bar{q} = \bar{q}(x_1, x_2)$. Условимся обозначать проекцию вектора внешней нагрузки на координатную ось $x_\alpha - q_\alpha$.

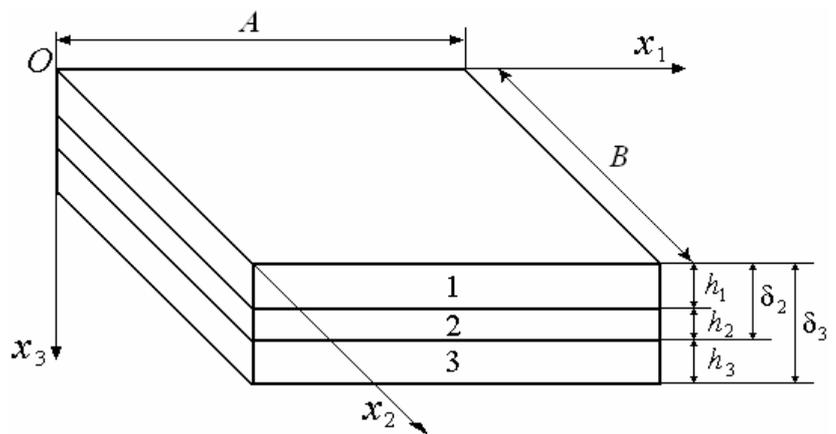


Рисунок 1 – Слоистая ортотропная пластина

Поведение слоистой пластины описывается уравнениями обобщенной теории многослойных пластин [12, 13], позволяющей выбирать необходимую точность описания НДС в зависимости от условий решаемой задачи. Перемещения точки i -го слоя определяются такими кинематическими зависимостями:

$$u_\alpha^i(x_1, x_2, x_3) = u_\alpha + \sum_{k=1}^{K_\alpha} \left[\sum_{j=1}^{i-1} h_j^k u_{\alpha k}^j + (x_3 - \delta_{i-1})^k u_{\alpha k}^i \right], \quad (1)$$

где $h_j^k = (h_j)^k$, $\delta_i = \sum_{j=1}^i h_j$, $\delta_{i-1} \leq x_3 \leq \delta_i$, $i = \overline{1, l}$;

$u_\alpha^i(\alpha = \overline{1, 3})$ – перемещение точки i -го слоя в направлении оси Ox_α ;

$u_\alpha, u_{\alpha k}^i$ – коэффициенты разложений перемещений в степенные ряды, представляющие функции аргументов x_1, x_2 ; K_α – максимальные степени поперечной координаты для плоскостных ($\alpha = 1, 2$) и нормальных ($\alpha = 3$) перемещений. Параметры K_1 и K_2 выбираются одинаковыми и равными K . В дальнейшем обобщенная теория обозначается по количеству удерживаемых членов в степенных рядах (1) для плоскостных и поперечных перемещений – теория $\{K, K_3\}$.

Принятые кинематические зависимости (1) при $K = 1, K_3 = 0$ эквивалентны гипотезам теории Э.И. Григолюка и П.П. Чулкова [2, 3], при $K = 3, K_3 = 2$ – гипотезам уточненной теории высокого порядка [13].

Применение гипотез (1) приводит к непрерывному по толщине пакета полю перемещений и обеспечивает непрерывность плоскостных деформаций по толщине пакета. При этом в рамках обобщенной теории существует принципиальная возможность точно выполнить условия контакта между слоями [12].

Деформации в каждом слое пластины предполагаются малыми и описываются линейными соотношениями

$$\varepsilon_{\alpha\beta}^i = \frac{1}{2} (u_{\alpha,\beta}^i + u_{\beta,\alpha}^i), \quad \alpha = \overline{1, 3}, \beta = \overline{1, 3}, i = \overline{1, l}.$$

Связь между компонентами тензоров деформаций и напряжений для рассматриваемого случая имеет вид [6]

$$\begin{pmatrix} \varepsilon_{11}^i \\ \varepsilon_{22}^i \\ \varepsilon_{33}^i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{E_1^i} & -\frac{\nu_{21}^i}{E_2^i} & -\frac{\nu_{31}^i}{E_3^i} \\ -\frac{\nu_{12}^i}{E_1^i} & \frac{1}{E_2^i} & -\frac{\nu_{32}^i}{E_3^i} \\ -\frac{\nu_{13}^i}{E_1^i} & -\frac{\nu_{23}^i}{E_2^i} & \frac{1}{E_3^i} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} p_{11}^i \\ p_{22}^i \\ p_{33}^i \end{pmatrix},$$

$$\varepsilon_{12}^i = \frac{1}{2G_{12}^i} p_{12}^i, \quad \varepsilon_{13}^i = \frac{1}{2G_{13}^i} p_{13}^i, \quad \varepsilon_{23}^i = \frac{1}{2G_{23}^i} p_{23}^i$$

где $E_\alpha^i, \nu_{\alpha\beta}^i$ – модули Юнга и коэффициенты Пуассона для i -го слоя; $G_{12}^i, G_{13}^i, G_{23}^i$ – модули сдвига для i -го слоя.

Усилия и моменты в i -м слое определяются по формулам

$$N_{\alpha\beta}^{ik} = N_{\beta\alpha}^{ik} = \int_{\delta_{i-1}}^{\delta_i} (x_3 - \delta_{i-1})^k p_{\alpha\beta}^i dx_3, \quad \alpha, \beta = \overline{1, 3}, i = \overline{1, l}.$$

Определяющие уравнения и метод их решения

Уравнения и граничные условия, описывающие деформирование слоистых пластин, получены с помощью вариационного принципа аналогично тому, как это было сделано для изотропных пластин [13]. Уравнения имеют такой вид:

$$\sum_{i=1}^l L_{\alpha}^i + q_{\alpha} = 0,$$

$$N_{1\alpha,1}^{ik_{\alpha}} + N_{\alpha 2,2}^{ik_{\alpha}} - k_{\alpha} N_{\alpha 3}^{ik_{\alpha}-1} + h_i^{k_{\alpha}} \sum_{j=i}^{l-1} L_{\alpha}^{j+1} = 0, \quad (2)$$

где $\alpha = \overline{1,3}$, $k_{\alpha} = \overline{1, K_{\alpha}}$, $i = \overline{1, l}$;

$$L_1^i = N_{11,1}^{i0} + N_{12,2}^{i0}, \quad L_2^i = N_{22,2}^{i0} + N_{12,1}^{i0}, \quad L_3^i = N_{13,1}^{i0} + N_{23,2}^{i0}.$$

Таким образом, НДС пластины описывается $(2K + K_3)l + 3$ дифференциальными уравнениями.

Уравнения (2) в перемещениях в матричной форме имеют вид

$$\Lambda \cdot \bar{\mathbf{U}} = \bar{\mathbf{Q}}, \quad (3)$$

где $\bar{\mathbf{U}}$ – вектор, компонентами которого являются искомые функции

$$\bar{\mathbf{U}}^T = (u_{\alpha}, u_{\alpha k_{\alpha}}^i), \quad i = \overline{1, l}, k_{\alpha} = \overline{1, K_{\alpha}};$$

Λ – квадратная симметричная матрица порядка $(2K + K_3)l + 3$;

$\bar{\mathbf{Q}}$ – вектор, компоненты которого зависят от внешней силы, приложенной к наружной поверхности многослойной пластины,

$$\bar{\mathbf{Q}}^T = (q_1, q_2, q_3, 0, \dots, 0).$$

Элементы матрицы Λ не приводятся в силу их громоздкости.

Вид граничных условий на контуре опирания для прямоугольной свободно опертой пластины приведен ниже:

$$\text{при } x_1 = 0, x_1 = A - \sum_{i=1}^l N_{11}^{i0} = 0, \quad u_2 = 0, \quad u_3 = 0,$$

$$N_{11}^{i k_1} + h_i^{k_1} \sum_{j=i}^{l-1} N_{11}^{j+1 0} = 0, \quad u_{2 k_2}^i = 0, \quad u_{3 k_3}^i = 0,$$

$$\text{при } x_2 = 0, x_2 = B - u_1 = 0, \quad \sum_{i=1}^l N_{22}^{i0} = 0, \quad u_3 = 0, \quad u_{1 k_1}^i = 0,$$

$$N_{22}^{i k_2} + h_i^{k_2} \sum_{j=i}^{l-1} N_{22}^{j+1 0} = 0, \quad u_{3 k_3}^i = 0, \quad (4)$$

Таким образом, НДС свободно опертой слоистой пластины описывается системой уравнений (3) и граничными условиями (4).

Искомые функции $u_\alpha, u_{\alpha k_\alpha}^i$ ($\alpha = \overline{1,3}, k_\alpha = \overline{1, K_\alpha}, i = \overline{1, I}$) и внешняя нагрузка q_α ($\alpha = \overline{1,3}$) разлагаются в тригонометрические ряды по функциям $B_{\alpha mn}(x_1, x_2)$, удовлетворяющим условиям на контуре опирания

$$[u_\alpha, u_{\alpha k_\alpha}^i, q_\alpha] = \sum_{m=1}^M \sum_{n=1}^N [\Phi_{\alpha mn}, \Phi_{\alpha k_\alpha mn}^i, q_{\alpha mn}] B_{\alpha mn}(x_1, x_2),$$

где M, N – число удерживаемых членов в рядах Фурье.

Для прямоугольной пластины, свободно опертой по краям, функции $B_{\alpha mn}(x_1, x_2)$ имеют вид

$$B_{1mn} = \cos \frac{m\pi x_1}{A} \cdot \sin \frac{n\pi x_2}{B}, \quad B_{2mn} = \sin \frac{m\pi x_1}{A} \cdot \cos \frac{n\pi x_2}{B},$$

$$B_{3mn} = \sin \frac{m\pi x_1}{A} \cdot \sin \frac{n\pi x_2}{B}.$$

В результате этого задача об изгибе многослойной пластины для каждой пары значений m и n сводится к решению системы неоднородных алгебраических уравнений

$$\mathbf{\Lambda}^{mn} \cdot \overline{\Phi}^{mn} = \overline{\mathbf{Q}}^{mn},$$

где $\mathbf{\Lambda}^{mn}$ – матрица жесткости, $\overline{\Phi}^{mn}$ и $\overline{\mathbf{Q}}^{mn}$ – векторы, имеющие вид

$$(\overline{\Phi}^{mn})^T = (\Phi_{1mn}, \Phi_{2mn}, \Phi_{3mn}, \Phi_{\alpha k_\alpha mn}^i),$$

$$(\overline{\mathbf{Q}}^{mn})^T = (q_{1mn}, q_{2mn}, q_{3mn}, 0, \dots, 0), \quad i = \overline{1, I}, k_\alpha = \overline{1, K_\alpha}.$$

В силу громоздкости элементы матрицы $\mathbf{\Lambda}^{mn}$ не приводятся.

Для решения этой системы используется метод Гаусса – Жордана.

Численное исследование

Для проверки эффективности предлагаемой теории были проведены тестовые расчеты квадратных трехслойных симметричных композитов при статическом и динамическом нагружениях.

Рассматривается НДС трехслойных симметричных пластин ($0^\circ / 90^\circ / 0^\circ$) при статическом нагружении

$$q_3 = P_0 \cdot \sin \frac{\pi x_1}{A} \sin \frac{\pi x_2}{B}, \quad q_1 = q_2 = 0,$$

где P_0 – интенсивность нагружения.

Каждый слой пластины представляет собой графито-эпоксидный композит, механические свойства которого такие: $E_L = 172,375$ ГПа, $E_T = 6,895$ ГПа, $G_{LT} = 3,4475$ ГПа, $G_{TT} = 1,379$ ГПа, $\nu_{LT} = \nu_{TT} = 0,25$. Здесь L, T – направления параллельные и нормальные волокнам.

Предполагается, что в наружных слоях направление L параллельно оси x_1 , а во внутреннем слое – параллельно оси x_2 . Эта задача имеет трехмерное решение, полученное N.J. Pagano [11].

В табл. 1 дано сопоставление результатов расчета напряжений для пластин разных толщин по обобщенной теории при различном числе удерживаемых членов в рядах (1) с трехмерным решением [11]. Результаты приведены в безразмерном виде

$$\bar{p}_{11}^i = -\frac{p_{11}^i}{s^2 P_0}, \quad \bar{p}_{22}^i = -\frac{p_{22}^i}{s^2 P_0}, \quad \bar{p}_{13}^i = -\frac{p_{13}^i}{s P_0}, \quad \bar{u}_1^i = -\frac{E_T u_1}{s^3 P_0 H}, \quad s = \frac{A}{H},$$

где $H = \delta_l$ – общая толщина пластины.

Таблица 1 – Максимальные плоскостные напряжения в слоях

A/H	Теория	Напряжения $\bar{p}_{11}^{-1}(A/2, B/2, 0) /$ $\bar{p}_{11}^{-3}(A/2, B/2, \delta_l)$	Напряжения $\bar{p}_{22}^{-2}(A/2, B/2, h_1) /$ $\bar{p}_{22}^{-2}(A/2, B/2, h_2)$
100	Теория {1,0}	0,537/-0,537	0,180/-0,180
	Теория {3,2}	0,539/-0,539	0,181/-0,181
	Теория {5,4}	0,539/-0,539	0,181/-0,181
	Теория {7,6}	0,539/-0,539	0,181/-0,181
	Трехмерная теория [11]	0,539/-0,539	0,180/-0,180
10	Теория {1,0}	0,569/-0,569	0,279/-0,279
	Теория {3,2}	0,591/-0,590	0,285/-0,288
	Теория {5,4}	0,591/-0,590	0,285/-0,288
	Теория {7,6}	0,591/-0,590	0,285/-0,288
	Трехмерная теория [11]	0,590/-0,590	0,285/-0,288
4	Теория {1,0}	0,683/-0,683	0,520/-0,520
	Теория {3,2}	0,802/-0,756	0,534/-0,557
	Теория {5,4}	0,801/-0,755	0,534/-0,556
	Теория {7,6}	0,801/-0,755	0,534/-0,556
	Трехмерная теория [11]	0,801/-0,755	0,534/-0,556
2	Теория {1,0}	0,841/-0,841	0,644/-0,644
	Теория {3,2}	1,435/-0,937	0,669/-0,743
	Теория {5,4}	1,436/-0,938	0,669/-0,742
	Теория {7,6}	1,436/-0,938	0,669/-0,742
	Трехмерная теория [11]	1,436/-0,938	0,669/-0,742

На рис. 2 приведено изменение напряжений $\bar{p}_{11}^i(A/2, B/2, x_3)$ по толщине пластины для случая $s = 4$. По оси ординат откладываются значения $z = 0,5 - x_3/H$. Результаты расчета по изложенной теории сравниваются с точным решением, полученным N.J. Pagano, а также с

решением по классической теории пластин [11] (сплошная линия соответствует трехмерному решению, штрихпунктирная линия – обобщенной теории {1,0}, точки – обобщенной теории {3, 2}, пунктирная линия – классической теории). Результаты расчета по обобщенной теории {5, 4} и {7, 6} на рисунке не приводятся, поскольку они полностью совпадают с данными, полученными по трехмерной теории (табл. 1).

Аналогичное сопоставление для напряжений $\bar{u}_1^i(0, B/2, x_3)$, $\bar{p}_{13}^i(0, B/2, x_3)$, $\bar{p}_{12}^i(0, 0, x_3)$ приведено на рис. 3 – 5.

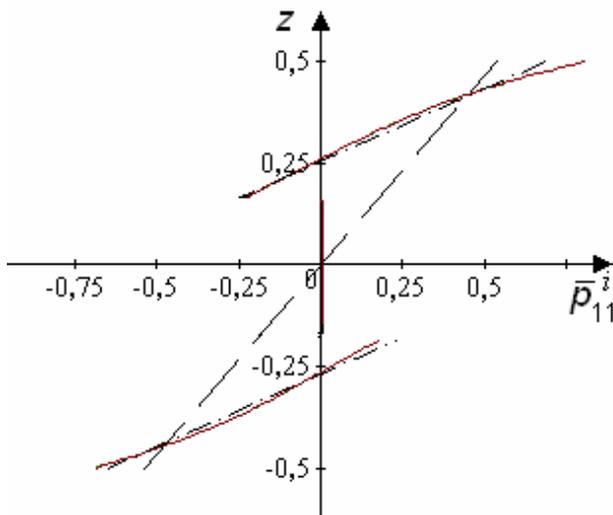


Рисунок 2 – Напряжения \bar{p}_{11}^i

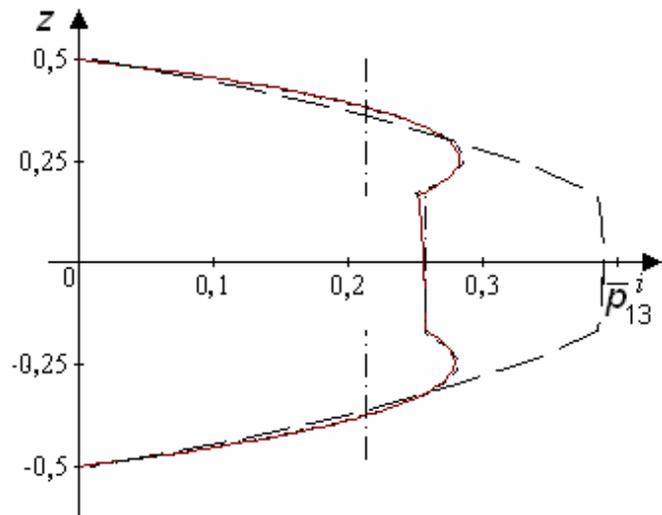


Рисунок 3 – Напряжения \bar{p}_{13}^i

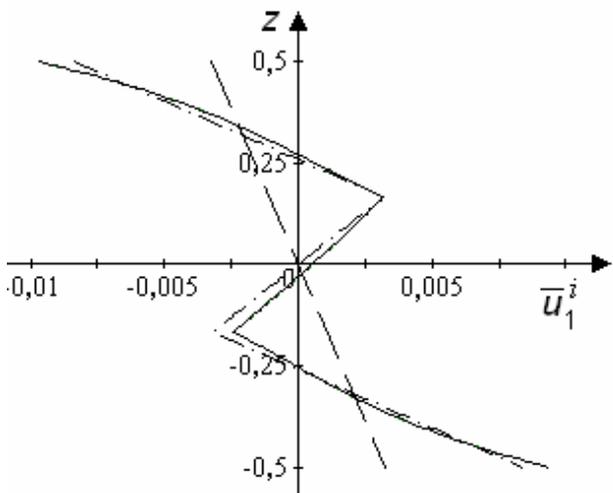


Рисунок 4 – Напряжения \bar{u}_1^i

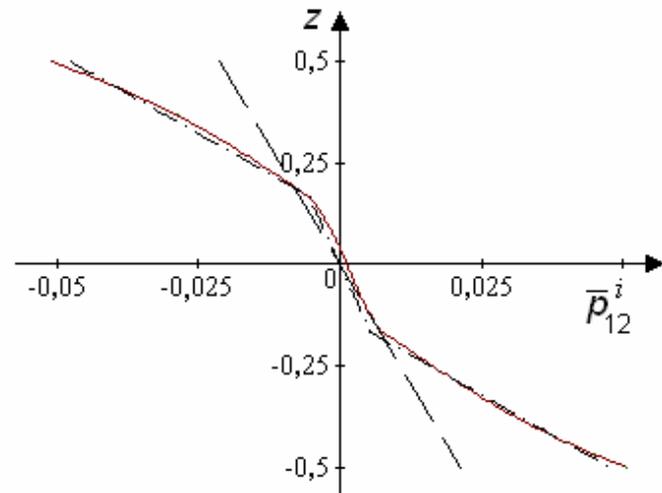


Рисунок 5 – Напряжения \bar{p}_{12}^i

Из рис. 2 – 5 и табл. 1 видно, что результаты расчета по обобщенной теории с параметрами {3, 2} практически совпадают с данными, полученными на основе трехмерной теории. Небольшое отличие между ними наблюдается только для сдвиговых напряжений.

Результаты расчета показывают, что при увеличении количества удерживаемых членов в разложениях (1) точность обобщенной теории растет, приближаясь к трехмерному решению. При этом, если для расчета напряжений \bar{p}_{11}^i , \bar{p}_{12}^i и перемещений достаточно использовать теорию {3, 2}, то при анализе поперечных сдвиговых напряжений необходимо применение теорий более высокого порядка, например, теории {7, 6}, позволяющей точно выполнить граничные условия между слоями [12, 13].

Выводы

В работе изложена обобщенная двумерная теория слоистых ортотропных пластин, основанная на методе степенных рядов и позволяющая регулировать точность описания НДС в зависимости от условий решаемой задачи.

Возможности предложенной теории и достоверность полученных результатов иллюстрируются на примере расчета НДС трехслойных симметричных композитов при статическом нагружении. Показано, что при учете достаточного количества членов степенного ряда результаты расчета по предлагаемой теории хорошо согласуются с трехмерными решениями даже для случая толстых пластин. Показаны хорошая сходимость решения и возможность точного определения перемещений, плоскостных, а также поперечных сдвиговых напряжений, распределение которых по толщине в некоторых случаях носит существенно нелинейный характер. Это особенно важно при изучении воздействия локализованных нагрузок, а также при решении проблемы расслаивания для многослойных объектов нерегулярной структуры, у которых механические характеристики соседних слоев существенно различны.

Предложенная теория имеет широкую область применимости и позволяет достоверно описывать НДС слоистых ортотропных пластин с практически любыми композициями слоев и толщинами пакета. При этом численная реализация задачи об исследовании НДС многослойной пластины на основе предлагаемой теории требует значительно меньше ресурсов, чем при использовании уравнений трехмерной теории упругости. В дальнейшем следует оценить возможности предлагаемой теории для описания локализованных динамических воздействий.

Список использованных источников

1. Амбарцумян С.А. Общая теория анизотропных оболочек / С.А. Амбарцумян. – М.: Наука, 1974. – 448 с.
2. Григолюк Э.И. Теория вязкоупругих многослойных оболочек с жестким наполнителем при конечных прогибах / Э.И. Григолюк,

П.П. Чулков // Журн. прикл. механики и технической физики. – 1964. – №5. – С.109 – 117.

3. Григолюк Э.И. Статика упругих слоистых оболочек / Э.И. Григолюк, П.П. Чулков. – М.: НИИ Механики МГУ, 1999. – 215 с.

4. Григоренко Я.М. Решение задач и анализ напряженно-деформированного состояния анизотропных неоднородных оболочек (обзор) / Я.М. Григоренко, А.Т. Василенко // Прикладная механика. – 1997. – Т. 33. – № 11. – С.3 – 37.

5. Пискунов В.Г. Линейные и нелинейные задачи расчета слоистых конструкций / В.Г. Пискунов, В.Е. Вериженко. – К.: Будівельник, 1986. – 176 с.

6. Рассказов А.О. Теория и расчет слоистых ортотропных пластин и оболочек / А.О. Рассказов, И.И. Соколовская, Н.А. Шульга. – К.: Вища шк., 1986. – 191 с.

7. Chen W. A selective review on recent development of displacement-based laminated plate theories / W. Chen, Z. Wu // Recent patents on mechanical engineering. – 2008. – Vol. 1. – P. 29 – 44.

8. Lo K.H. A high-order theory of plate deformation. Part 2. Laminated plates / K.H.Lo, R.M. Cristensen, E.M. Wu // Transaction of ASME. Journal of applied mechanics. – 1977.– Vol. 99. – P. 669 – 676.

9. Reddy J.N. On the generalization of displacement based laminate theories // Applied mechanics rev. – 1989. – Vol. 42. – № 11. – P. 213 – 222.

10. Matsunaga H. Assessment of a global higher-order deformation theory for laminated composite and sandwich plates // Journal of composite materials. – 2002. – Vol. 56. – P. 279 – 291.

11. Pagano N.J. Exact solutions for rectangular bidirectional composites and sandwich plates // Journal of composite materials. – 1970. – Vol. 4. – P. 20 – 34.

12. Ugrimov S.V. Generalized theory of multilayer plates // International Journal of Solids and Structures. – 2002. – Vol. 39. – № 4. – P. 819 – 839.

13. Нестационарные колебания многослойных пластин и оболочек и их оптимизация / А.Н. Шупиков, Я.П. Бузько, Н.В. Сметанкина, С.В. Уgrimov. – Х.: ХНЭУ, 2004. – 252 с.

Поступила в редакцию 21.11.2010.

Рецензент: канд. техн. наук, проф. В.В. Кириченко

Национальный аэрокосмический университет

им. Н.Е. Жуковского «ХАИ», г. Харьков