

## РАСЧЕТ НАПРЯЖЕННО-ДЕФОРМИРОВАННОГО СОСТОЯНИЯ ОБОЛОЧЕЧНЫХ ЭЛЕМЕНТОВ КОНСТРУКЦИЙ И ОЦЕНКА ДОСТОВЕРНОСТИ РЕЗУЛЬТАТОВ

**Постановка проблемы и анализ последних исследований.** В различных отраслях современной техники упругие оболочки являются одними из наиболее ответственных элементов инженерных конструкций. К настоящему времени в научной литературе накоплен обширный материал прочностных расчетов оболочек, а также построено большое количество разнообразных и нередко противоречащих друг другу вариантов уточненных теорий оболочек, однако многообразие этих теорий и присутствующие в них недостатки создают определенные затруднения в выборе и практическом применении конкретной модели. В научной монографии [1] дан обстоятельный анализ известных в литературе теорий оболочек, предложен теоретически обоснованный и универсальный численно-аналитический RVR-метод решения в трехмерной постановке краевых задач определения напряженно-деформированного состояния статически нагруженных упругих оболочек произвольной толщины.

**Предлагаемый вариационный метод исследований.** Разработанный RVR-метод [1] основан на общих уравнениях трехмерной теории упругости, теории R-функций, методе И. Н. Векуа, апостериорной двусторонней оценке точности получаемых численных результатов и смешанном вариационном принципе Рейсснера, который заключается в том, что условие стационарности функционала Рейсснера  $I_R$

$$\delta I_R = \int_{\Omega} \left\{ \left[ \frac{1}{2} (\nabla_j u_i + \nabla_i u_j) - d_{ijkl} \sigma_{kl} \right] \delta \sigma_{ij} - (\nabla_j \sigma_{ij} + F_i) \delta u_i \right\} d\Omega -$$

$$- \int_{\Gamma_u} (u_i - u_i^*) n_j \delta \sigma_{ij} d\Gamma + \int_{\Gamma_\sigma} (\sigma_{ij} n_j - t_i) \delta u_i d\Gamma = 0 \quad (1)$$

эквивалентно краевым условиям, уравнениям равновесия и физическим соотношениям упругости.

Здесь  $u_i, F_i$  и  $n_j$  – компоненты векторов перемещений  $\mathbf{u}$ , объемных сил  $\mathbf{F}$  и единичного вектора  $\mathbf{n}$  внешней нормали к границе  $\Gamma$  исследуемой области  $\Omega$  упругого тела;  $\sigma_{ij}$  и  $d_{ijkl}$  – компоненты тензоров напряжений  $\boldsymbol{\sigma}$  и податливости  $\mathbf{d}$  материала тела;  $u_i^*$  и  $t_i$  – заданные на

соответствующих частях границы  $\Gamma$ ,  $\Gamma_U$  и  $\Gamma_\sigma$  компоненты вектора  $\mathbf{u}$  и вектора внешних распределенных нагрузок;  $\nabla_j = \partial/\partial x_j$ .

При решении краевых задач теории упругости все большее внимание в расчетной инженерной практике уделяется смешанным вариационным постановкам, которые избавлены от присущих для классических функционалов Лагранжа  $I_L$  и Кастильяно  $I_C$  известных недостатков и строятся главным образом на основе функционала Рейсснера  $I_R$  при независимой аппроксимации вектора перемещения  $\mathbf{u}$  и тензора напряжений  $\boldsymbol{\sigma}$ . Однако численная реализация таких постановок вызывала математические затруднения в оценке точности решений из-за отсутствия экстремума в точке стационарности  $I_R$ . Поэтому в решении указанной проблемы представляют научный интерес обоснование применения метода Ритца для неэкстремального функционала  $I_R$  и оценка достоверности приближенных решений пространственных задач статики упругих оболочек. В связи с этим в работах [1, 2] на основе теорем и вариационных неравенств теории операторов доказана **теорема о достаточном признаке сходимости метода Ритца для функционала Рейсснера: последовательности метода Ритца сходятся к точному решению краевой задачи, сформулированной на основе смешанного вариационного принципа Рейсснера, если структуры приближенных решений точно удовлетворяют всем краевым условиям.**

**Алгоритм оценки точности решений.** К важному этапу разрешения проблемы достоверности результатов в предлагаемом RVR-методе относится апостериорная интегральная оценка точности численных решений, получаемых при отыскании точки стационарности функционала Рейсснера  $I_R$ , с помощью применения алгоритма [1, 3], в основе которого лежит теория двойственности выпуклого анализа [4, 5]. Из этой теории следует, что для двойственных функционалов Лагранжа  $I_L$  и Кастильяно  $I_C$  их соответственно нижняя и верхняя границы совпадают и равны значению функционала Рейсснера  $I_R$  в его седловой точке:

$$I_L(\bar{\mathbf{u}}) = I_R(\bar{\mathbf{u}}, \bar{\boldsymbol{\sigma}}) = I_C(\bar{\boldsymbol{\sigma}}). \quad (2)$$

Согласно равенству (2) задача минимизации функционала  $I_L$  и двойственная ей задача максимизации функционала  $I_C$  эквивалентны задаче определения стационарного значения функционала  $I_R$ . Этот вывод и положен в основу апостериорной оценки приближенных решений для искомых компонент вектора перемещения  $\mathbf{u}$  и тензора напряжений  $\boldsymbol{\sigma}$ . В частности, в RVR-методе для оценки сходимости

решений предусмотрено вычисление значений функционалов Лагранжа  $I_L$ , Кастильяно  $I_C$ , Рейсснера  $I_R$  и величины  $I_\varepsilon$ :

$$I_\varepsilon = \max\{|I_L - I_R|, |I_C - I_R|\}. \quad (3)$$

В результате постоянного сравнения в программе величин трех функционалов процесс регулярного уточнения искомых решений происходит за счет увеличения количества аппроксимаций в структуре решений до тех пор, пока не будет выполнено равенство (2) с наперед заданной точностью. При совпадении значений функционалов величина  $I_\varepsilon = 0$  и в силу доказанной единственности седловой точки полученные решения будут энергетически эквивалентны точному решению  $\bar{u}$  и  $\bar{\sigma}$ .

**Постановка задачи.** Рассмотрим пример применения алгоритма [3] оценки точности решений для цилиндра, на срединной поверхности радиусом  $R$  которой введена система координат  $\{x_1, x_2, x_3\}$ . Координатная линия  $x_1$  направлена вдоль оси,  $x_2$  – касательно к окружному сечению, а  $x_3$  – по нормали к поверхности оболочки. Пусть цилиндр длиной  $a$  и толщиной  $h$  осесимметрично нагружен внутренним давлением:

$$q_3^- = -q_0 \sin(\gamma x_1); \quad \gamma = n\pi/a. \quad (4)$$

Рассмотрим свободно опертый по торцам цилиндр с соответствующими краевыми условиями:

$$\left. \begin{aligned} \sigma_{13} = 0; \quad \sigma_{33} = q_3^- & \quad \text{при } x_3 = -h/2; \\ \sigma_{13} = 0; \quad \sigma_{33} = 0 & \quad \text{при } x_3 = h/2; \\ \sigma_{11} = 0; \quad u_3 = 0 & \quad \text{при } x_1 = 0 \text{ и } x_1 = a. \end{aligned} \right\} \quad (5)$$

Структуры решений, точно удовлетворяющих сформулированным краевым условиям (5), примем следующими:

$$\left. \begin{aligned} u_1 &= \cos(\gamma x_1) \sum_{k=0}^{l_1-1} u_1^k P_k; \\ u_3 &= \sin(\gamma x_1) \sum_{k=0}^{l_3-1} u_3^k P_k; \end{aligned} \right\} \quad (6)$$

$$\left. \begin{aligned}
 \sigma_{11} &= \lambda^{-1} \sin(\gamma x_1) \sum_{k=0}^{l_{11}-1} \sigma_{11}^k P_k; \\
 \sigma_{22} &= \sin(\gamma x_1) \sum_{k=0}^{l_{22}-1} \sigma_{22}^k P_k; \\
 \sigma_{13} &= \lambda^{-1} (1 - \zeta^2) \cos(\gamma x_1) \sum_{k=0}^{l_{13}-1} \sigma_{13}^k P_k; \\
 \sigma_{33} &= \lambda^{-1} \left[ \sigma_{33}^* + (1 - \zeta^2) \sin(\gamma x_1) \sum_{k=0}^{l_{33}-1} \sigma_{33}^k P_k \right],
 \end{aligned} \right\} \quad (7)$$

где  $\zeta = 2x_3/h$ ;  $u_1^k$ ,  $u_3^k$ ,  $\sigma_{13}^k$  и  $\sigma_{ij}^k$  – искомые постоянные;  $P_k = P_k(\zeta)$  – полиномы Лежандра;

$$\sigma_{33}^* = \frac{q_3^-}{2} \left( 1 - \frac{h}{2R} \right) (1 - \zeta); \quad \lambda = \left( 1 + \frac{h\zeta}{2R} \right). \quad (8)$$

Множитель  $\lambda^{-1}$  присутствует в (7) ввиду сохранения слагаемых порядка  $h/R$  по сравнению с единицей, а числа  $l_i, l_{ij}$  ( $i, j = 1, 2, 3$ ) аппроксимаций компонент  $\mathbf{u}$  и  $\boldsymbol{\sigma}$  по толщине оболочки определяют ее сдвиговую модель, выбор которой соответствует заданию комбинации величин  $(l_i, l_3, l_{ij}, l_{i3}, l_{33})$  при  $i, j = 1, 2$ . Например, вариант  $(2, 1, 2, 1, 0)$  соответствует теории типа Тимошенко, а  $(4, 3, 4, 1, 2)$  – прикладной теории [6]. При этом в разложениях по координате  $\zeta$  первый член  $\sigma_{i3}$  ( $i = 1, 2$ ) или первые два члена  $\sigma_{ij}$  ( $i, j = 1, 2$ ) соответствуют их интегральным характеристикам, все остальные члены – самоуравновешенная по толщине оболочки часть напряжений.

Сформулированная задача интересна тем, что в случае больших показателей изменяемости нагрузки ( $a/nh \approx 1$ ) даже при малой относительной толщине напряженно-деформированное состояние оболочки определяется по классической теории и теории типа Тимошенко с существенной погрешностью. После подстановки в вариационное уравнение Рейсснера (1) структур решений (6), (7) и вычисления соответствующих интегралов исследуемая краевая задача сводится к решению системы линейных алгебраических уравнений относительно постоянных

$u_1^k, u_3^k, \sigma_{13}^k$  и  $\sigma_{ij}^k$ , по значениям которых вычисляются искомые величины напряженно-деформированного состояния оболочек.

**Результаты численных исследований.** Представим приведенные перемещения и напряжения в следующем виде:

$$\tilde{u}_i^- = \frac{u_i^- E}{q_0 R_0}; \quad \tilde{u}_i^+ = \frac{u_i^+ E}{q_0 R_0}; \quad \tilde{\sigma}_{ij}^- = \frac{\sigma_{ij}^-}{q_0}; \quad \tilde{\sigma}_{ij}^+ = \frac{\sigma_{ij}^+}{q_0}, \quad (9)$$

где минус (плюс) соответствует значению искомой величины, вычисленной при  $\zeta = -1$  ( $\zeta = 1$ ).

Численная реализация задачи выполнена при следующих параметрах:  $q_0 = 1 \text{ МПа}$ ;  $E = 210 \text{ ГПа}$ ;  $\nu = 0.3$ ;  $a = 120 R_0$  и  $R = 60 R_0$  ( $R_0$  – масштабный множитель). В табл. 1 (при  $h/R = 1/10$ ;  $n = 20$ ) и табл. 2 (при  $h/R = 1/5$ ;  $n = 10$ ) представлены результаты вычислений соотношений функционалов  $I_L$  и  $I_R$  ( $I_K$  практически совпадает с  $I_R$ ), а также амплитудных значений приведенных перемещений и напряжений (9) в зависимости от выбранной модели  $(l_i, l_3, l_{ij}, l_{i3}, l_{33})$ . При этом числа в знаменателях таблиц, точные результаты и результаты, полученные с использованием классической теории оболочек, взяты из работы [6].

Таблица 1 – Значения искоемых величин (при  $h/R = 1/10$ ;  $n = 20$ )

Величина	Точное значение	Приближенное решение				
		Классическая модель	Сдвиговая модель $(l_i, l_3, l_{ij}, l_{i3}, l_{33})$			
			(2,1,2,1,0)	(4,3,4,3,2)	(5,5,5,5,5)	(7,7,7,7,7)
$I_L/I_R$	1	–	0.425	0.9796	0.9994	0.9999
$\tilde{u}_3^-$	<b>3.79</b>	0.672	$\frac{2.235}{2.52}$	$\frac{3.904}{3.89}$	3.804	3.798
$\tilde{u}_3^+$	<b>1.28</b>	0.672	$\frac{2.235}{2.52}$	$\frac{1.319}{1.10}$	1.274	<b>1.280</b>
$\tilde{\sigma}_{11}^-$	<b>-1.14</b>	-0.607	$\frac{-0.615}{-0.601}$	$\frac{-1.082}{-1.28}$	-1.143	-1.142
$\tilde{\sigma}_{11}^+$	<b>0.554</b>	0.607	$\frac{0.615}{0.601}$	$\frac{0.566}{0.441}$	0.555	<b>0.554</b>
$\tilde{\sigma}_{22}^-$	<b>-0.576</b>	-0.171	$\frac{-0.434}{-0.136}$	$\frac{-0.555}{-0.618}$	-0.583	<b>-0.576</b>
$\tilde{\sigma}_{22}^+$	<b>0.186</b>	0.193	$\frac{0.213}{0.220}$	$\frac{0.192}{0.151}$	<b>0.186</b>	<b>0.186</b>

Таблица 2 – Значения искомых величин (при  $h/R = 1/5$ ;  $n = 10$ )

Величина	Точное значение	Приближенное решение				
		Классическая модель	Сдвиговая модель $(l_i, l_3, l_{ij}, l_{i3}, l_{33})$			
			(2,1,2,1,0)	(4,3,4,3,2)	(5,5,5,5,5)	(7,7,7,7,7)
$I_L/I_R$	1	–	0.404	0.980	0.9993	0.9999
$\tilde{u}_3^-$	<b>7.44</b>	1.34	4.738	7.635	7.459	7.450
$\tilde{u}_3^+$	<b>2.39</b>	1.34	4.738	2.486	2.386	2.392
$\tilde{\sigma}_{11}^-$	<b>-1.12</b>	-0.605	-0.618	-1.065	<b>-1.120</b>	<b>-1.120</b>
$\tilde{\sigma}_{11}^+$	<b>0.517</b>	0.605	0.506	0.525	0.507	<b>0.517</b>
$\tilde{\sigma}_{22}^-$	<b>-0.498</b>	-0.159	-0.406	-0.475	-0.506	<b>-0.498</b>
$\tilde{\sigma}_{22}^+$	<b>0.191</b>	0.204	0.235	0.197	0.183	<b>0.191</b>

Отметим, что при рассмотрении одинаковой сдвиговой модели (типа Тимошенко или прикладной теории [6]) представленные в числителях таблицы результаты (полученные RVR-методом) точнее результатов [6] в знаменателях, так как в предложенном методе отсутствуют математические упрощения исходных соотношений (в теории [6]  $\lambda = 1$  и не сохраняются члены порядка  $h/2R$  по сравнению с единицей).

На рис. 1 (при  $R/h = 5$ ;  $n = 10$ ) показано распределение по толщине оболочки (при  $|\zeta| \leq 1$ ) амплитудных значений приведенных перемещений и напряжений (9) в зависимости от выбранной модели оболочки  $(l_i, l_3, l_{ij}, l_{i3}, l_{33})$ . Цифры на графиках соответствуют числам аппроксимаций  $l_i$  (при  $l_{ij} = l_i$ ), треугольниками обозначены результаты, к которым асимптотически сходятся найденные приближенные решения (практически получаемые при четырех-пяти аппроксимациях искомых решений по толщине исследуемого цилиндра).

С увеличением относительной толщины  $h/R$  оболочки качественно меняется вид распределения по толщине цилиндра перемещений и напряжений, закон изменения которых приобретает явно нелинейный характер. Как видно из таблиц и графиков, представленные результаты, полученные с помощью уточненной типа Тимошенко теории оболочек (штрихпунктирные линии на рисунках), имеют при  $h/R \geq 1/10$  большую

погрешность, тогда как прикладная теория [6] применима для оболочек средней толщины и позволяет получать приемлемые результаты (штриховые линии на рисунках) при  $h/R \leq 1/5$ .

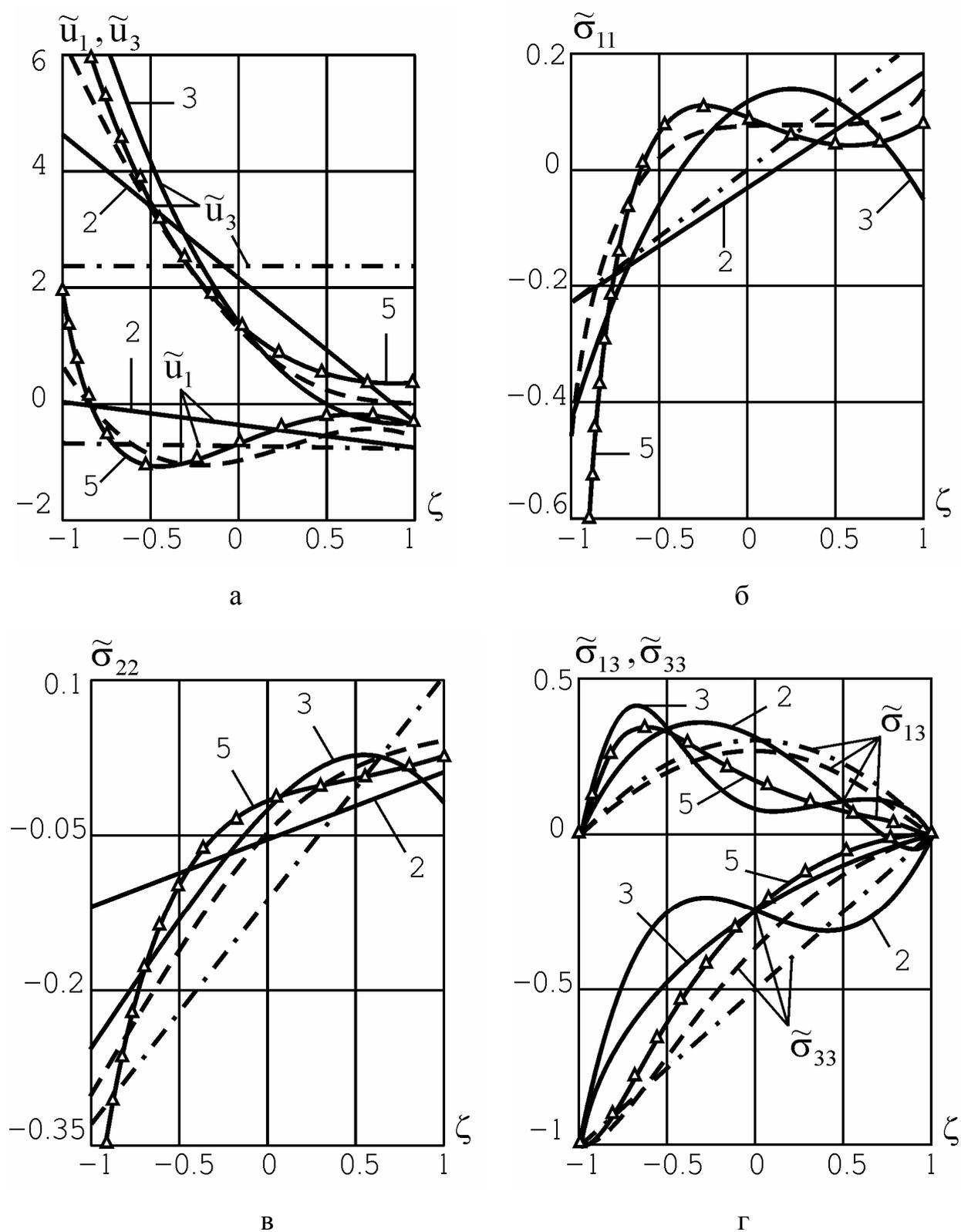


Рисунок 1 – Графики перемещений и напряжений по толщине цилиндра для различных моделей оболочки (при  $R/h = 3$ ;  $n = 10$ )

В то же время теория [6] не дает одинакового приближения для всех характеристик напряженно-деформированного состояния оболочки. В частности, изначально принятое в этой прикладной теории изменение вдоль толщины поперечного касательного напряжения  $\sigma_{13}$  по закону квадратичной параболы приводит в результате к существенным погрешностям для сравнительно толстых оболочек (при  $h/R \geq 1/5$ ) и качественно не отражает (рис. 1) смещение пика  $\sigma_{13}$  к нагруженной поверхности цилиндрической оболочки.

### Выводы

Представленные результаты, а также немалый опыт использования RVR-метода [1] при решении многочисленных прикладных задач показывает, что в случае программной реализации апостериорной интегральной оценки численных результатов процесс сходимости решения имеет устойчивый характер, а осуществляемая на компьютере постоянная оценка решения позволяет автоматизировать поиск такого числа аппроксимаций, при котором результаты имеют достоверный характер.

Таким образом, предложенный метод двусторонней оценки точности приближенных решений в сочетании с использованием математической теории R-функций при построении структур решений может стать эффективным средством для расчета оболочечных элементов технических конструкций произвольной толщины.

### Список использованных источников

1. Краевые задачи статики оболочек с отверстиями / Сало В.А. – Х.: НТУ «ХПИ», 2003. – 216 с.
2. Доказательство достаточного признака сходимости метода Ритца для смешанного вариационного принципа Рейсснера / Сало В. А. // Вест. Харьк. политехн. ун-та. – 2000. – Вып. 95. – С. 70–75.
3. О двусторонней оценке точности приближенных решений задач теории оболочек, полученных методом Ритца для неэкстремального функционала Рейсснера / Сало В. А. // Доп. НАНУ. – 2003. – №1. – С. 53–57.
4. Выпуклый анализ и вариационные проблемы / И. Экланд, Р. Темам. – М., 1979. – 309 с.
5. Выпуклый анализ: Пер. с англ. / Рокафеллар Р. М., 1973. – 459 с.
6. Прикладная теория анизотропных пластин и оболочек / В.А. Родионова, Б.Ф.Титаев, К.Ф. Черных – СПб.: Изд-во С.-П. ун-т, 1996. – 278 с.

*Поступила в редакцию 05.05.2010 г.  
Рецензент: д-р техн. наук, проф. Я.С. Карпов,  
Национальный аэрокосмический университет  
им. Н.Е. Жуковского «ХАИ», Харьков*