

УПРУГАЯ ДЕФОРМАЦИЯ ПЛАСТИНКИ, ОСЛАБЛЕННОЙ ДВУМЯ КРУГОВЫМИ ОТВЕРСТИЯМИ И ДВУМЯ ПРЯМОЛИНЕЙНЫМИ РАЗРЕЗАМИ

Предлагается метод исследования краевых задач теории упругости для неограниченной пластинки с двумя круговыми отверстиями и двумя прямолинейными разрезами (трещинами), основанный на применении соотношений между базисными решениями уравнений равновесия в полярной и биполярной системах координат. Реализация этого метода приводит к квазирегулярным бесконечным системам линейных алгебраических уравнений второго рода с экспоненциально убывающими матричными коэффициентами, что позволяет провести эффективный анализ напряженно-деформированного состояния в зонах концентрации напряжений.

Распределение напряжений вблизи отверстий, разрезов, упругих и жестких включений носит отчетливо выраженный локальный характер. Это обстоятельство позволяет распространить методику решения краевых задач для неограниченных тел на тела конечных размеров. Аналитические решения плоских задач для тел с дефектами и включениями находят применение также в инженерных методах расчета на прочность пространственных тел с полостями, трещинами и включениями для получения приближенных и интерполяционных оценок.

Начала реализуемого в статье подхода (обобщенного метода Фурье) заложены в работах [1–4], в которых получены формулы разложения скалярных и векторных решений уравнений равновесия упругого тела в различных парах канонических криволинейных координатных систем и на их основе решен ряд плоских и пространственных задач механики деформируемого твердого тела.

Рассмотрена симметричная задача о равновесии упругой неограниченной пластинки, ослабленной двумя круговыми отверстиями и двумя прямолинейными полубесконечными разрезами.

Разложением по малому геометрическому параметру получена асимптотическая формула для коэффициента интенсивности нормальных напряжений.

Пусть (x, y) , (x_1, y_1) , (x_2, y_2) , (ρ_1, φ_1) , (ρ_2, φ_2) , (α, β) , (α, σ) – декартовы, полярные и биполярные координаты точки, связанные равенствами

$$x_1 = x_2 = x, \quad y_1 = y - h, \quad y_2 = -y - h;$$

$$x_i = \rho_i \cos \varphi_i, \quad y_i = \rho_i \sin \varphi_i \quad (i = 1, 2);$$

$$x = \frac{a \operatorname{sh} \alpha}{\operatorname{ch} \alpha + \cos \beta}, \quad y = \frac{a \sin \beta}{\operatorname{ch} \alpha + \cos \beta}; \quad x = \frac{a \operatorname{sh} \alpha}{\operatorname{ch} \alpha - \cos \sigma}, \quad y = \frac{a \sin \sigma}{\operatorname{ch} \alpha - \cos \sigma}$$

$(a > 0; h > 0, -\pi \leq \beta, \sigma \leq \pi, -\infty < \alpha < \infty).$

Уравнение $\beta = \text{const}$ ($\sigma = \text{const}$) определяет семейство дуг окружностей, проходящих через точки $x = \pm a$, $y = 0$. Величина β (σ) измеряется углом между касательной к дуге в точке $x = a$, $y = 0$ и отрезком $[-a, a]$ (лучом $(a, +\infty)$) оси x [5] (рис. 1).

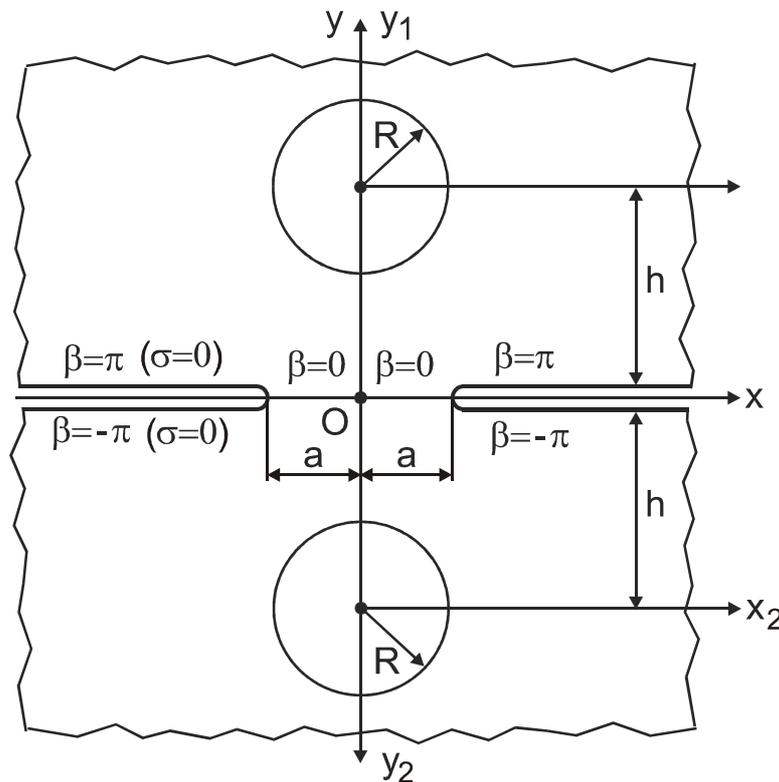


Рисунок 1 – Геометрия пластинки

Однородные уравнения равновесия в перемещениях в случае изотропного упругого тела сводятся к векторному уравнению Ламе

$$\operatorname{grad} \operatorname{div} \vec{U} + (1-2\nu)\Delta \vec{U} = 0 \quad (1)$$

(\vec{U} – вектор упругих перемещений, ν – коэффициент Пуассона).

Базисные решения уравнения (1) в полярных и биполярных координатах представим в векторной форме

$$\begin{cases} \vec{u}_1(\alpha, \beta; \tau) = \operatorname{ch} \tau \beta \sin \tau \alpha \vec{e}_x - \operatorname{sh} \tau \beta \cos \tau \alpha \vec{e}_y, \\ \vec{u}_2(\alpha, \beta; \tau) = (y \operatorname{grad} - \lambda \vec{e}_y)(\operatorname{sh} \tau \beta \cos \tau \alpha), \\ \vec{u}_3^\pm(\alpha, \sigma; \tau) = e^{\pm \tau \sigma} \sin \tau \alpha \vec{e}_x \pm (e^{\tau \sigma} \cos \tau \alpha - 1) \vec{e}_y, \\ \vec{u}_4^\pm(\alpha, \sigma; \tau) = \pm 2(y \operatorname{grad} - \lambda \vec{e}_y)(e^{\pm \tau \sigma} \cos \tau \alpha - 1); \end{cases} \quad (2)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \vec{u}_{1,n}(\rho_1, \varphi_1) = \rho_1^{n-1} [\sin(n-1)(\frac{\pi}{2} + \varphi_1) \vec{e}_x + \cos(n-1)(\frac{\pi}{2} + \varphi_1) \vec{e}_y], \\ \vec{u}_{2,n}(\rho_1, \varphi_1) = (y_1 \text{grad} - \lambda \vec{e}_y) [2 \rho_1^{n+1} \cos(n+1)(\frac{\pi}{2} + \varphi_1)] - (n+1-\lambda) \vec{u}_{1,n+2}(\rho_1, \varphi_1), \\ \vec{u}_{3,n}^+(\rho_1, \varphi_1) = \rho_1^{-(n+1)} [-\sin(n+1)(\frac{\pi}{2} + \varphi_1) \vec{e}_x + \cos(n+1)(\frac{\pi}{2} + \varphi_1) \vec{e}_y], \\ \vec{u}_{3,n}^-(\rho_2, \varphi_2) = \rho_2^{-(n+1)} [-\sin(n+1)(\frac{\pi}{2} + \varphi_2) \vec{e}_x - \cos(n+1)(\frac{\pi}{2} + \varphi_2) \vec{e}_y], \\ \vec{u}_{4,n}^+(\rho_1, \varphi_1) = (y_1 \text{grad} - \lambda \vec{e}_y) [2 \rho_1^{-(n-1)} \cos(n-1)(\frac{\pi}{2} + \varphi_1)] + (n-1+\lambda) \vec{u}_{3,n-2}^+(\rho_1, \varphi_1); \\ \vec{u}_{4,n}^-(\rho_2, \varphi_2) = (y_2 \text{grad} + \lambda \vec{e}_y) [2 \rho_2^{-(n-1)} \cos(n-1)(\frac{\pi}{2} + \varphi_2)] + (n-1+\lambda) \vec{u}_{3,n-2}^-(\rho_2, \varphi_2); \end{array} \right. \quad (3)$$

(\vec{e}_x, \vec{e}_y – орты декартовой системы координат Оху, $\lambda = 3-4\nu$).

Решения (2), (3) связаны соотношениями

$$\vec{u}_1(\alpha, \beta; \tau) = i \sin \tau \gamma \vec{e}_y + \sum_{n=2}^{\infty} d_{n-1}(\tau) (h + ia)^{-(n-1)} \vec{u}_{1,n}(\rho_1, \varphi_1),$$

$$\vec{u}_2(\alpha, \beta; \tau) = (i \lambda \sin \tau \gamma + \frac{2ah}{a^2 + h^2} \tau \cos \tau \gamma) \vec{e}_y -$$

$$-\frac{1}{2} \sum_{n=0}^{\infty} d_{n+1}(\tau) (h + ia)^{-(n+1)} \vec{u}_{2,n}(\rho_1, \varphi_1) + h \sum_{n=2}^{\infty} d_n(\tau) (h + ia)^{-n} n \vec{u}_{1,n}(\rho_1, \varphi_1) -$$

$$-\frac{1}{2} \sum_{n=2}^{\infty} d_{n-1}(\tau) (n-1-\lambda) (h + ia)^{-(n-1)} \vec{u}_{1,n}(\rho_1, \varphi_1),$$

$$\vec{u}_{3,n}^{\pm} = (h + ia)^{-(n+1)} \int_{-\infty}^{\infty} C_{n+1}(\tau) \vec{u}_3^{\pm}(\alpha, \sigma; \tau) d\tau, \quad (4)$$

$$\vec{u}_{4,n}^{\pm} = (h + ia)^{-(n+1)} \int_{-\infty}^{\infty} C_{n-1}(\tau) [\vec{u}_4^{\pm}(\alpha, \sigma; \tau) + (n-1+\lambda) \vec{u}_3^{\pm}(\alpha, \sigma; \tau)] d\tau -$$

$$-2h(n-1)(h + ia)^{-n} \int_{-\infty}^{\infty} C_n(\tau) \vec{u}_3^{\pm}(\alpha, \sigma; \tau) d\tau,$$

$$\vec{u}_{3,k}^-(\rho_2, \varphi_2) = -(2h)^{-(k+1)} \vec{e}_y - (2h)^{-k} \sum_{n=2}^{\infty} \frac{(n+k-1)!}{(n-1)! k!} (2h)^{-n} \vec{u}_{1,n}(\rho_1, \varphi_1),$$

$$\vec{u}_{4,k}^-(\rho_2, \varphi_2) = (k-1+\lambda) (2h)^{-(k-1)} \vec{e}_y - (2h)^{-(k-1)} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(n+k-1)!}{(n+1)! (k-2)!} (2h)^{-(n+1)} \vec{u}_{2,n}(\rho_1, \varphi_1) +$$

$$+ (2h)^{-(k-2)} \sum_{n=2}^{\infty} \frac{(n+k-2)!}{(n-1)! (k-2)!} (2h)^{-n} \vec{u}_{1,n}(\rho_1, \varphi_1).$$

Здесь

$$d_m(\tau) = \frac{1}{2} [D_m(\tau) - D_m(-\tau)], \quad D_0(\tau) = e^{i\tau\gamma}, \quad \gamma = \ln \frac{a + ih}{a - ih},$$

$$D_m(\tau) = \frac{2ia\tau}{a+ih} e^{i\tau\gamma} F\left(1-m, 1-i\tau; 2; \frac{2a}{a+ih}\right),$$

$$C_m(\tau) = -\frac{ima}{a+ih} \frac{e^{-i\tau\gamma}}{\operatorname{sh}\pi\tau} F\left(1-m, 1+i\tau; 2; \frac{2a}{a+ih}\right) \quad (m=1, 2, \dots),$$

$$F(-m, b; c; z) = \sum_{k=0}^m \frac{(-m)_k (b)_k}{(c)_k k!} z^k \text{ – гипергеометрический полином [6],}$$

$$(a)_k = \frac{\Gamma(a+k)}{\Gamma(a)} = (-1)^k \frac{\Gamma(1-a)}{\Gamma(1-a-k)}, \quad \Gamma(z) \text{ – гамма-функция.}$$

При выводе соотношений (4) использованы разложения базисных решений уравнения Лапласа в полярных и биполярных координатах [3] и их линейные комбинации, обеспечивающие симметрию краевых задач относительно координатных осей Ox , Oy :

$$\left\{ \begin{array}{l} \operatorname{ch}\tau\beta \sin \tau\alpha \\ \operatorname{sh}\tau\beta \cos \tau\alpha \end{array} \right\} = \pm \sum_{n=0}^{\infty} d_n(\tau) \left(\frac{\rho_1}{h+ia} \right)^n \left\{ \begin{array}{l} \operatorname{sinn}\left(\frac{\pi}{2} + \varphi_1\right) \\ \operatorname{cosn}\left(\frac{\pi}{2} + \varphi_1\right) \end{array} \right\} \quad (\rho_1 < \sqrt{a^2 + h^2}),$$

$$\rho_1^{-n} \left\{ \begin{array}{l} \operatorname{cosn}\left(\frac{\pi}{2} + \varphi_1\right) \\ \operatorname{sinn}\left(\frac{\pi}{2} + \varphi_1\right) \end{array} \right\} = \pm (h+ia)^{-n} \int_{-\infty}^{\infty} C_n(\tau) \left\{ \begin{array}{l} e^{\tau\sigma} \cos \tau\alpha - 1 \\ e^{\tau\sigma} \sin \tau\alpha \end{array} \right\} d\tau \quad (-\pi < \sigma < \pi - \operatorname{Im}\gamma).$$

Применим соотношения (4) к решению задачи о равновесии упругой неограниченной пластинки, ослабленной двумя круговыми отверстиями $0 \leq \rho_1 < R$, $0 \leq \rho_2 < R$ и двумя прямолинейными полубесконечными разрезами $|x| > a$, $y=0$ (рис. 1). Пусть берега разрезов ($\beta = \pm\pi$) свободны от внешних усилий, а границы отверстий ($\rho_1 = R$, $\rho_2 = R$) находятся под воздействием гидростатического давления интенсивности $\sigma_0 > 0$.

Тогда граничные условия задачи имеют вид

$$\sigma_y = 0, \quad \tau_{xy} = 0 \quad (\beta = \pm\pi); \quad \sigma_{\rho_i} = -\sigma_0, \quad \tau_{\rho_i\varphi_i} = 0 \quad (\rho_i = R; i = 1, 2). \quad (5)$$

С учетом симметрии задачи относительно координатных осей Ox , Oy общее решение уравнения (1) представим в виде

$$\vec{u} = \sum_{n=0}^{\infty} B_n^{(1)} [\vec{u}_{3,n}^+(\rho_1, \varphi_1) + \vec{u}_{3,n}^-(\rho_2, \varphi_2)] + \sum_{n=2}^{\infty} B_n^{(2)} [\vec{u}_{4,n}^+(\rho_1, \varphi_1) + \vec{u}_{4,n}^-(\rho_2, \varphi_2)] + \int_0^{\infty} A_1(\tau) \vec{u}_1(\alpha, \beta; \tau) d\tau + \int_0^{\infty} A_2(\tau) \vec{u}_2(\alpha, \beta; \tau) d\tau. \quad (6)$$

Удовлетворяя условиям (5) на основе общего решения (6) и соотношений (4), после исключения плотностей интегралов $A_1(\tau)$, $A_2(\tau)$ и замены коэффициентов рядов $B_n^{(1)}$, $B_n^{(2)}$ величинами $x_n^{(1)} = -2G\sigma_0^{-1} R^{-n-2} B_n^{(1)}$, $x_n^{(2)} = -2G\sigma_0^{-1} R^{-n} B_n^{(2)}$ (G – модуль сдвига) для нахождения этих величин получаем бесконечную систему линейных алгебраических уравнений

$$\begin{cases} x_n^{(1)} = \sum_{k=0}^{\infty} d_{nk}^{(11)} x_k^{(1)} + \sum_{k=2}^{\infty} d_{nk}^{(12)} x_k^{(2)} + f_n & (n = 0, 1, 2, \dots), \\ x_n^{(2)} = \sum_{k=0}^{\infty} d_{nk}^{(21)} x_k^{(1)} + \sum_{k=2}^{\infty} d_{nk}^{(22)} x_k^{(2)} & (n = 2, 3, \dots); \end{cases} \quad (7)$$

$$\begin{cases} d_{nk}^{(11)} = (n-1)d_{nk}^{(21)} - \frac{1}{2}(k+1)l_{n,k} \lambda^{n+k+2} & (n=1, 2, \dots; k=0, 1, 2, \dots), \\ d_{nk}^{(12)} = (n-1)d_{nk}^{(22)} + \frac{1}{2} [2k(k-1)l_{n,k-1} - (k-1)(k-2)l_{n,k-2}] \lambda^{n+k} + \\ + \frac{(n+k-1)!}{2^{n+k} (n+1)! (k-2)!} \lambda^{n+k} & (n=1, 2, \dots; k=2, 3, \dots), \\ d_{nk}^{(21)} = \frac{1}{2} \lambda^{n+k} \left\{ \frac{(n+k-1)!}{2^{n+k-3} (n-1)! k!} - (k+1) [(n-2)l_{n-2,k} - 2nl_{n-1,k} + (n+1)l_{n,k} \lambda^2] \right\}, \\ d_{nk}^{(22)} = \frac{1}{2} \lambda^{n+k-2} \left\{ \frac{(n+k-1)}{2^{n+k-3} n! (k-2)!} \lambda^2 - \frac{(n+k-2)!}{2^{n+k-5} (n-1)! (k-2)!} + \right. \\ + 2k(k-1) [(n-2)l_{n-2,k-1} - 2nl_{n-1,k-1} + (n+1)l_{n,k-1} \lambda^2] - \\ \left. - (k-1)(k-2) [(n-2)l_{n-2,k-2} - 2nl_{n-1,k-2} + (n+1)l_{n,k-2} \lambda^2] \right\}, \\ d_{0k}^{(11)} = -(k+1)l_{0,k} \lambda^{k+2}, d_{0k}^{(12)} = \left[\frac{k-1}{2^{k-1}} + 2k(k-1)l_{0,k-1} - (k-1)(k-2)l_{0,k-2} \right] \lambda^k; \\ f_0 = 1; f_n = 0 \quad (n=1, 2, \dots); \end{cases}$$

$$I_{m,k} = I_{m,k}^{(1)} - I_{m,k}^{(2)}, \quad \left\{ \begin{array}{l} I_{m,k}^{(1)} \\ I_{m,k}^{(2)} \end{array} \right\} = \frac{\omega^{m+k+2}}{k+1} \int_{-\infty}^{\infty} D_{m+1}(\pm\tau) \frac{C_{k+1}(\tau)}{\operatorname{ch}\pi\tau} d\tau,$$

$$\lambda = \frac{R}{h}, \quad \omega = \frac{1}{1+i\varepsilon}, \quad \varepsilon = \frac{a}{h}, \quad I_{k,m}^{(j)} = I_{m,k}^{(j)} \quad (j=1,2).$$

Существенно, что коэффициент интенсивности нормальных напряжений (важнейшая характеристика в механике разрушения)

$$K_I = \lim_{\substack{x \rightarrow a \\ (x < a)}} \left[\sigma_y \Big|_{\beta=0} \sqrt{2(a-x)} \right]$$

выражается непосредственно через решение системы (7):

$$K_I = \frac{\sigma_0 \sqrt{a}}{1+\varepsilon^2} \sum_{k=0}^{\infty} \left\{ \alpha_k \left[x_k^{(1)} + k x_{k+2}^{(2)} \right] - 2(k+1) \alpha_{k+1} x_{k+2}^{(2)} \right\} \lambda^{k+2},$$

$$\alpha_m = \frac{2\varepsilon(m+1)}{(1+\varepsilon^2)^{m+\frac{1}{2}}} \sum_{k=0}^m \frac{2^k (-m)_k \left(\frac{1}{2}\right)_k^{m+1-k}}{(2)_k k!} \sum_{j=0}^{m+1-k} C_{m+1-k}^j \varepsilon^{m-j} \sin \frac{\pi}{2} (m+1-j).$$

Используя равенства [6, 7]

$$\frac{\pi\tau}{\operatorname{sh}\pi\tau} = \Gamma(1-i\tau)\Gamma(1+i\tau), \quad \frac{\pi}{\operatorname{ch}\pi\tau} = \Gamma\left(\frac{1}{2}-i\tau\right)\Gamma\left(\frac{1}{2}+i\tau\right),$$

$$\int_{-i\infty}^{i\infty} \Gamma(\alpha+s)\Gamma(\beta+s)\Gamma(\gamma-s)\Gamma(\delta-s) ds = 2\pi i \frac{\Gamma(\alpha+\gamma)\Gamma(\alpha+\delta)\Gamma(\beta+\gamma)\Gamma(\beta+\delta)}{\Gamma(\alpha+\beta+\gamma+\delta)},$$

$$\int_{\frac{1}{2}-i\infty}^{\frac{1}{2}+i\infty} \Gamma(s)\Gamma(s+c-a-b)\Gamma(a-s)\Gamma(b-s)(1-z)^{-s} ds =$$

$$= 2\pi i \frac{\Gamma(a)\Gamma(b)\Gamma(c-a)\Gamma(c-b)}{\Gamma(c)} F(a,b;c;z),$$

$$F(a,b;c;z) = \frac{\Gamma(c)}{\Gamma(b)\Gamma(c-b)} \int_0^1 \frac{t^{b-1}(1-t)^{c-b-1}}{(1-tz)^a} dt = (1-z)^{-a} F(a,c-b;c;\frac{z}{z-1}),$$

$$\sum_{j=0}^{\infty} \frac{(a)_j (b)_j}{(c)_j j!} z^j F(a+j,b;c;w) = F_2(a,b,b';c,c';w,z),$$

$$F_2(a,b,b';a,a;w,z) = (1-w)^{-b} (1-z)^{-b'} F(b,b';a;\frac{wz}{(1-w)(1-z)}),$$

$(c-a)F(a-1, b; c; z) + (2a-c-az+bz)F(a, b; c; z) + a(z-1)F(a+1, b; c; z) = 0,$
 $(b-a)F(a, b; c; \xi) + aF(a+1, b; c; \xi) - bF(a, b+1; c; \xi) = 0,$
 $(c-a)F(a-1, b; c; z) + (b-c)F(a, b-1; c; z) - (b-a)(1-z)F(a, b; c; z) = 0,$
 для вычисления величин $l_{m,k}^{(1)}, l_{m,k}^{(2)}$ получаем рекуррентные соотношения

$$\left\{ \begin{aligned}
 l_{m+1, k+1}^{(1)} &= -\frac{1}{k+2} \left\{ (m+3)l_{m+2, k}^{(1)} - \frac{1}{1+\varepsilon^2} \left[2(m+k+3)l_{m+1, k}^{(1)} - \right. \right. \\
 &\quad \left. \left. - (m+1)l_{m, k}^{(1)} - kl_{m+1, k-1}^{(1)} \right] \right\} \quad (m, k = 0, 1, 2, \dots), \\
 l_{m+1, k+1}^{(2)} &= \frac{1}{k+2} \left\{ (m+3)l_{m+2, k}^{(2)} - \frac{1}{1+\varepsilon^2} \left[2(m-k+1)l_{m+1, k}^{(2)} - \right. \right. \\
 &\quad \left. \left. - (m+1)l_{m, k}^{(2)} + kl_{m+1, k-1}^{(2)} \right] \right\} \quad (k \leq m; m, k = 0, 1, 2, \dots), \\
 l_{m+2, 0}^{(1)} &= \frac{1}{(m+4)(1+\varepsilon^2)} \left[(2m+5)l_{m+1, 0}^{(1)} - (m+1)l_{m, 0}^{(1)} \right] \quad (m = 0, 1, 2, \dots), \\
 l_{m+1, 0}^{(2)} &= \frac{1}{2} \left[l_{m, 0}^{(1)} + l_{m, 0}^{(2)} \right] \quad (m = 0, 1, 2, \dots); \quad l_{k, m}^{(j)} = l_{m, k}^{(j)} \quad (j = 1, 2); \\
 l_{0, 0}^{(1)} &= -\frac{\varepsilon^2}{2(1+\varepsilon^2)^2}, \quad l_{1, 0}^{(1)} = -\frac{\varepsilon^2}{2(1+\varepsilon^2)^3}, \quad l_{0, 0}^{(2)} = \frac{1}{2(1+\varepsilon^2)}
 \end{aligned} \right. \quad (8)$$

и замкнутое выражение

$$l_{m, k}^{(1)} = -\frac{\varepsilon^2}{(1+\varepsilon^2)^2(1+i\varepsilon)^{m+k}} \sum_{j=0}^m \frac{(-m)_j \left(\frac{3}{2}\right)_j}{(2)_j j!} \left(\frac{2\varepsilon}{\varepsilon+i}\right)^j \sum_{s=0}^k \frac{(-k)_s \left(\frac{3}{2}\right)_s}{(2)_s s! (j+s+2)} \left(\frac{2\varepsilon}{\varepsilon+i}\right)^s. \quad (9)$$

Формулы (8) удобны для вычисления матричных коэффициентов $d_{nk}^{(ij)}$ бесконечной системы (7), но непригодны для исследования свойств этой системы. Записывая выражение (9) в интегральной форме

$$l_{m, k}^{(1)} = -\frac{\varepsilon^2}{(1+\varepsilon^2)^2(1+i\varepsilon)^{m+k}} \int_0^1 x F\left(-m, \frac{3}{2}; 2; \frac{2\varepsilon x}{\varepsilon+i}\right) F\left(-k, \frac{3}{2}; 2; \frac{2\varepsilon x}{\varepsilon+i}\right) dx,$$

используя интегральное представление [6]

$$F\left(-n, \frac{3}{2}; 2; \frac{2\varepsilon x}{\varepsilon+i}\right) = \frac{2}{\pi_0} \int_0^1 \frac{1}{t^2(1-t)^2} \left(1 - \frac{2\varepsilon xt}{\varepsilon+i}\right)^n dt$$

и учитывая, что

$$\left|1 - \frac{2\varepsilon xt}{\varepsilon + i}\right| \leq 1 \quad (0 \leq x, t \leq 1), \quad \left|F\left(-n, \frac{3}{2}; 2; \frac{2\varepsilon x}{\varepsilon + i}\right)\right| \leq \frac{2}{\pi_0} \int_0^1 t^2 (1-t)^2 dt = 1,$$

получаем

$$\left|l_{m,k}^{(1)}\right| \leq \frac{\varepsilon^2}{2(1+\varepsilon^2)^{\frac{1}{2}(m+k+2)}} < \frac{1}{2}. \quad (10)$$

Для величин $l_{m,k}^{(2)}$ можно получить оценку

$$\left|l_{m,k}^{(2)}\right| \leq \frac{2}{\sqrt{(m+1)(k+1)}(1+\varepsilon^2)^{\frac{1}{2}(m+k+2)}} \leq 2. \quad (11)$$

Из оценок (10), (11) следует, что

$$S_n^{(ij)} = \sum_{k=0}^{\infty} |d_{nk}^{(ij)}| \rightarrow 0 \quad (n \rightarrow \infty, 0 < \lambda < 1),$$

т.е. бесконечная система (7) квазирегулярна при $0 < \lambda < 1$ и вполне регулярна при $0 < \lambda \leq \lambda_0 < 1$ для некоторого $\lambda_0 \in (0; 1)$. Ограничение $0 < \lambda < 1$ на возможные значения параметра λ естественным образом связано с формулировкой рассматриваемой задачи и означает, что окружности $\rho_1 = R$ и $\rho_2 = R$ не пересекаются и не касаются друг друга.

Из оценок (10), (11) следует также, что

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} K_I = 0, \quad \lim_{\varepsilon \rightarrow \infty} K_I = 0. \quad (12)$$

Решая бесконечную систему (7) методом малого параметра и ограничиваясь при этом членами до порядка λ^4 , для коэффициента интенсивности нормальных напряжений получаем асимптотическую формулу

$$K_I = \frac{\sigma_0 \varepsilon \sqrt{a}}{3(1+\varepsilon^2)^{\frac{1}{2}}} \{2\lambda^2 + \delta\lambda^4\} + O(\lambda^6),$$

$$\delta = \frac{1}{1+\varepsilon^2} \left\{ \frac{1+2\varepsilon^2}{1+\varepsilon^2} - 12 \left[1 - \frac{1+3\varepsilon^2}{2(1+\varepsilon^2)^3} \right] \right\}.$$

На рис. 2 показана зависимость приведенного коэффициента интенсивности нормальных напряжений $K_I^* = \frac{K_I}{\sigma_0 \sqrt{a}}$ от безразмерного геометрического параметра $\varepsilon = \frac{a}{h}$ ($0 < \varepsilon < \infty$) при значении $\lambda = \frac{R}{h} = 0,5$.

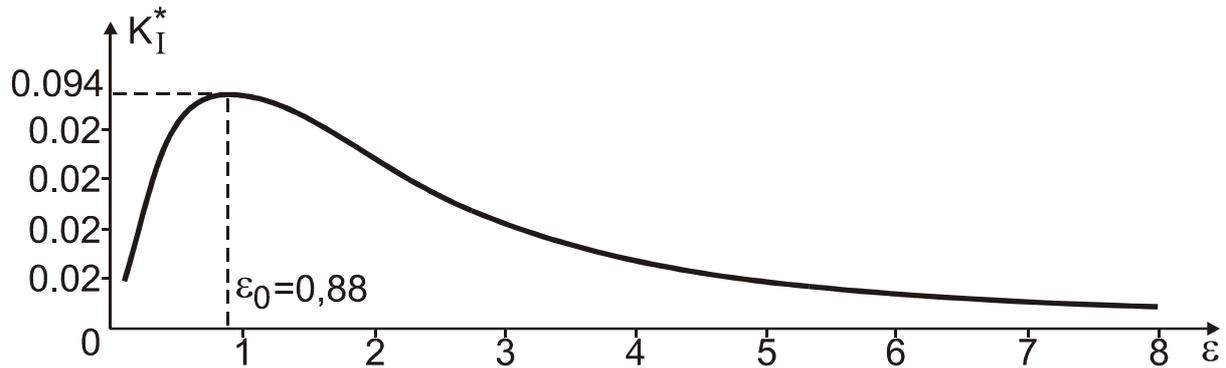


Рисунок 2 – Зависимость коэффициента интенсивности нормальных напряжений от параметра ε

Анализ графика этой зависимости и соответствующих численных результатов позволяет сделать вывод о том, что функция $K_I^* = K_I^*(\varepsilon)$ имеет один максимум при $\varepsilon = \varepsilon_0 \approx 0,88$ и не имеет максимумов, что согласуется с предельными значениями (12) коэффициента интенсивности нормальных напряжений.

Список использованных источников

1. Проценко В.С. О совместном применении декартовых и биполярных координат к решению краевых задач теории потенциала и теории упругости / В.С. Проценко, А.И. Соловьев // Прикладная математика и механика. – 1984. – Т. 48, №6. – С. 973 – 982.
2. Соловьев А.И. Упругое равновесие круговых кусочно-однородных сред с диаметральной трещиной / А.И. Соловьев // Прикладная математика и механика. – 1987. – Т. 51, №5. – С. 853 – 857.
3. Соловьев А.И. О равновесии плоскости, ослабленной отверстием и двумя трещинами / А.И. Соловьев, В.В. Цымбалюк // Прикладная механика. – 1989. – Т. 25, №8. – С. 105 – 111.
4. Мартыненко П.В. Равновесие упругого пространства, ослабленного двумя сферическими полостями и внешней круговой трещиной / П.В. Мартыненко, А.И. Соловьев // Прикладная математика и механика. – 1993. – Т. 57, №6. – С. 128 – 136.
5. Уфлянд Я.С. Интегральные преобразования в задачах теории упругости / Я.С. Уфлянд. – М.: Наука, 1967. – 367 с.
6. Бейтмен Г. Высшие трансцендентные функции. Гипергеометрическая функция. Функции Лежандра / Г. Бейтмен, А. Эрдейи. – М.: Наука, 1965. – 294 с.
7. Прудников А.П. Интегралы и ряды. Дополнительные главы / А.П. Прудников, Ю.А. Брычков, О.И. Маричев. – М.: Наука, 1986. – 800 с.

Поступила в редакцию 26.01.2010.

*Рецензент: д-р физ.-мат. наук, проф. А. Г. Николаев,
Национальный аэрокосмический университет
им. Н. Е. Жуковского «ХАИ», Харьков*