

ОСЕСИММЕТРИЧНАЯ КРАЕВАЯ ЗАДАЧА ТЕОРИИ УПРУГОСТИ О ДЕЙСТВИИ СОСРЕДОТОЧЕННОЙ СИЛЫ НА ТРАНСВЕРСАЛЬНО ИЗОТРОПНОЕ ПОЛУПРОСТРАНСТВО С НЕПОДВИЖНЫМ ОСНОВАНИЕМ В ВИДЕ ДВУПОЛОСТНОГО ГИПЕРБОЛОИДА ВРАЩЕНИЯ

Исследованием напряженно-деформированного состояния в пространственных канонических телах с усложненными физико-механическими свойствами, в частности с трансверсальной изотропией материала тела, занимались многие авторы. При этом применялись разные подходы. В работе [1] использовался один из вариантов метода однородных решений. Метод разделения переменных применялся в работах [2–4]. Особенно отметим работу [4], где методом Фурье построены точные решения уравнений равновесия трансверсально изотропного параболоида вращения. Подчеркнем, что в известной нам научной литературе отсутствуют исследования НДС в трансверсально изотропных многосвязных канонических телах, ограниченных координатными поверхностями нескольких криволинейных систем координат. Исключением являются работы [5, 6], в которых используется обобщенный метод Фурье (ОМФ). Заметим, что аппарат ОМФ для различных пар криволинейных координат в трансверсально изотропном случае был развит в работе [7]. В настоящей статье с помощью ОМФ проведен анализ напряжений, создаваемых сосредоточенной силой, действующей нормально на трансверсально изотропное полупространство с неподвижным основанием в виде двуполостного гиперболоида вращения. Задача сведена к системе разрешающих уравнений, для оператора которой исследовано условие фредгольмовости. Проведен численный анализ распределения напряжений на основании и в окрестности оси симметрии. Приведен качественный анализ напряжений в зависимости от геометрических параметров.

1. Постановка задачи. Рассмотрим первую осесимметричную краевую задачу теории упругости для трансверсально изотропного полупространства с неподвижным основанием в виде двуполостного гиперболоида вращения. Предполагается, что тело занимает область Ω , с центром двуполостного гиперболоида вращения совмещено начало декартовой системы координат (x_1, x_2, x_3) , а оси Ox_3 анизотропии и симметрии рассматриваемого тела совпадают. Исследуется краевая задача для системы уравнений равновесия в перемещениях трансверсально изотропной среды

$$c_{ij}u_{i,jj} + \sum_{j \neq i} b_{ij}u_{i,jj} + \sum_{j \neq i} a_{ij}u_{i,jj} = 0, \quad i, j = 1, 2, 3 \quad (1)$$

в области Ω с граничными условиями

$$\mathbf{F}_{\Gamma_1} = \frac{P}{2\pi} \int_0^\infty \lambda J_0(\lambda \rho) d\lambda \mathbf{e}_z; \quad (2)$$

$$\mathbf{U}_{\Gamma_2} = \mathbf{0}, \quad (3)$$

где a_{ij}, b_{ij}, c_{ij} – упругие постоянные transversально изотропной

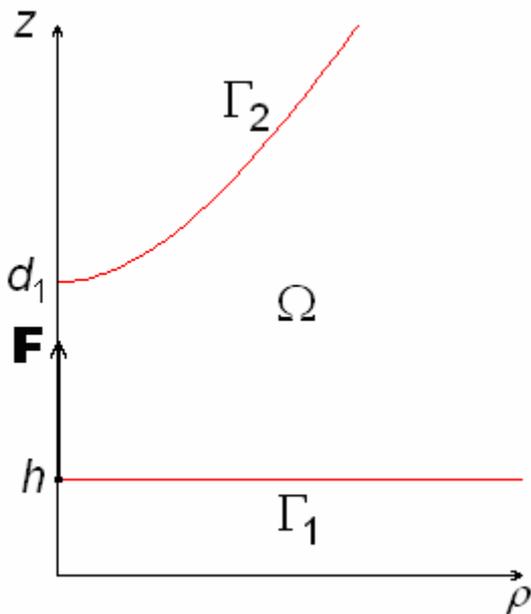


Рисунок 1 – Геометрическое представление задачи

среды; Γ_1, Γ_2 – границы полупространства и основания в виде двуполостного гиперболоида вращения; \mathbf{F}, \mathbf{U} – усилие и перемещение на соответствующей граничной поверхности; P – модуль сосредоточенной силы, действующей на Γ_1 вдоль оси z ; ρ, z и $\mathbf{e}_\rho, \mathbf{e}_z$ – соответственно координаты и орты цилиндрической системы координат, совмещенной с декартовой (рис. 1); $J_m(x)$ – функция Бесселя первого рода. Уравнения $z = h$ и

$\left(\frac{z}{d_1}\right)^2 - \left(\frac{\rho}{d_2}\right)^2 = 1$ задают границы полупространства и основания соответственно.

соответственно.

2. Построение общего решения. Вводятся две вытянутые сфероидальные системы координат (ξ_j, η_j, φ) ($j = 1, 2$), координаты которых связаны с цилиндрическими координатами соотношениями:

$$\begin{cases} \rho = c_j \cdot sh \xi_j \cdot \sin \eta_j, & \eta_j \in [0; \pi]; \\ z = \sqrt{v_j} \cdot c_j \cdot ch \xi_j \cdot \cos \eta_j, & \xi_j \in [0; \infty), \end{cases} \quad (4)$$

где $c_j = \sqrt{d_2^2 + \frac{d_1^2}{v_j}}$ – параметры сфероидальных систем координат; v_j

– два разных положительных корня уравнения

$$c_{44}c_{11}v^2 + (c_{13}^2 + 2c_{13}c_{44} - c_{11}c_{33})v + c_{33}c_{44} = 0. \quad (5)$$

Уравнения поверхности основания в виде двуполостного гиперболоида вращения запишутся так: $\eta_j = \eta_{j0}$. На граничной поверхности должны выполняться следующие соотношения:

$$\begin{aligned} c_1 \cdot \sin \eta_{10} &= c_2 \cdot \sin \eta_{20}; \\ \sqrt{v_1} c_1 \cdot \cos \eta_{10} &= \sqrt{v_2} c_2 \cdot \cos \eta_{20}. \end{aligned}$$

Тогда $ch \xi_j = \frac{z}{\sqrt{v_j} c_j \cdot \cos \eta_{j0}}$ на поверхности сфероида не зависит от j .

Будем искать общее решение задачи в виде

$$\mathbf{U} = \sum_{s=1}^2 \left[\int_0^{\infty} A_s(\lambda) \mathbf{V}_{s,\lambda,0}^{-(2)}(\rho, z_s) d\lambda + \int_{-\frac{1}{2} - i\infty}^{\frac{1}{2} + i\infty} B_s(\kappa) \mathbf{V}_{s,\kappa,0}^{+(8)}(\xi_s, \eta_s) d\kappa \right], \quad (6)$$

где $A_s(\lambda)$, $B_s(\lambda)$ – неизвестные плотности; $z = \sqrt{v_s} z_s$;

$$\mathbf{V}_{s,\lambda,0}^{\pm(2)}(\rho, z_s) = -e^{\pm \lambda z_s} J_1(\lambda \rho) \mathbf{e}_\rho \pm \frac{k_s}{\sqrt{v_s}} e^{\pm \lambda z_s} J_0(\lambda \rho) \mathbf{e}_z;$$

$$\mathbf{V}_{s,\kappa,0}^{\pm(8)}(\xi_s, \eta_s) = -P_\kappa^{(-1)}(q_s) P_\kappa^{(1)}(\mp p_s) \mathbf{e}_\rho \pm \frac{k_s}{\sqrt{v_s}} P_\kappa(q_s) P_\kappa(\mp p_s) \mathbf{e}_z;$$

$$k_s = \frac{b_{31} v_s}{(a_{33} - a_{31} v_s)}; \quad q_s = ch(\xi_s); \quad p_s = \cos(\eta_s);$$

$P_\kappa^m(x)$ – присоединенная функция Лежандра первого рода.

Для базисных перемещений в цилиндрических и сфероидальных координатах справедливы следующие теоремы сложения:

$$\mathbf{V}_{s,\lambda,0}^{\pm(2)}(\rho, z_s) = \int_{-\frac{1}{2} - i\infty}^{\frac{1}{2} + i\infty} g_{s,\lambda,0}^{(28)\kappa} \mathbf{V}_{s,\kappa,0}^{\pm(8)}(\xi_s, \eta_s) d\kappa, \quad \eta_s \in \left\{ \begin{array}{l} \left(\frac{\pi}{2}, \pi \right) \\ \left(0, \frac{\pi}{2} \right) \end{array} \right\}; \quad (7)$$

$$\mathbf{V}_{s,\kappa,0}^{\pm(8)}(\xi_s, \eta_s) = \int_0^{\infty} g_{s,\kappa,0}^{(82)\lambda} \mathbf{V}_{s,\lambda,0}^{\pm(2)}(\rho, z_s) d\lambda, \quad (8)$$

где

$$g_{s,\lambda,0}^{(28)\kappa} = \frac{i}{\pi} \left(\kappa + \frac{1}{2} \right) \operatorname{tg} \left[\pi \left(\kappa + \frac{1}{2} \right) \right] \tilde{k}_\kappa(c_s \lambda);$$

$$g_{s,\kappa,0}^{(82)\lambda} = 2c_s \frac{1}{\pi^2} \cos \left[\pi \left(\kappa + \frac{1}{2} \right) \right] \tilde{k}_\kappa(c_s \lambda);$$

$$\tilde{k}_k(x) = \sqrt{\frac{\pi}{2x}} K_{k+\frac{1}{2}}(x), \quad K_k(x) - \text{функция Макдональда.}$$

С помощью теорем сложения (7), (8) преобразуем решение отдельно к цилиндрическим и сфероидальным координатам:

$$\mathbf{U} = \sum_{s=10}^2 \int \left[A_s(\lambda) \mathbf{V}_{s,\lambda,0}^{-(2)}(\rho, z_s) + \mathbf{V}_{s,\lambda,0}^{+(2)}(\rho, z_s) \int_{-\frac{1}{2}-i\infty}^{-\frac{1}{2}+i\infty} B_s(\kappa) g_{s,\kappa,0}^{(82)\lambda} d\kappa \right] d\lambda; \quad (9)$$

$$\mathbf{U} = \sum_{s=1}^2 \int_{-\frac{1}{2}-i\infty}^{-\frac{1}{2}+i\infty} \left[\mathbf{V}_{s,\kappa,0}^{-(8)}(\xi_s, \eta_s) \int_0^{\infty} A_s(\lambda) g_{s,\lambda,0}^{(28)\kappa} d\lambda + B_s(\kappa) \mathbf{V}_{s,\kappa,0}^{+(8)}(\xi_s, \eta_s) \right] d\kappa, \quad (10)$$

$$\eta_s \in \left(0, \frac{\pi}{2} \right).$$

Переходя к напряжениям в (9), (10) на поверхностях Γ_1, Γ_2 ($\mathbf{n} = \mathbf{e}_z, \mathbf{n} = \mathbf{e}_{\eta_s}$) и удовлетворяя граничным условиям (2),(3), после некоторых преобразований получаем разрешающую систему

относительно неизвестных $A_s(\lambda) = \tilde{A}_s(\lambda) e^{\frac{\lambda h}{\sqrt{v_s}}}, B_s(\lambda)$:

$$\tilde{A}_j(\lambda) + \sum_{t=10}^2 \int \Omega_{j,t}(\lambda, \mu) \tilde{A}_t(\mu) d\mu = \frac{(-1)^{j+1} P(1+k_{3-j}) c_{44}}{\Delta_{2,\lambda} 2\pi \sqrt{v_{3-j}}}; \quad (11)$$

$$B_j\left(-\frac{1}{2} + i\tau\right) = \frac{(-1)^j}{\Delta_{1, -\frac{1}{2} + i\tau}} \sum_{r=1}^2 P_{\frac{1}{2} + i\tau}^{(2-r)}(-p_{3-j,0}) \chi_{r,3-j} \sum_{s=1}^2 P_{\frac{1}{2} + i\tau}^{(r-1)}(p_{s,0}) \chi_{3-r,s} \times \\ \times \int_0^{\infty} \tilde{A}_s(\lambda) e^{\frac{\lambda h}{\sqrt{v_s}}} g_{s,\lambda,0}^{(28) - \frac{1}{2} + i\tau} d\lambda, \quad (12)$$

где

$$\Omega_{j,t}(\lambda, \mu) = \frac{c_{44}^2}{\Delta_2} \sum_{s=1}^2 (-1)^{j+s+1} (1+k_s)(1+k_{3-j}) e^{h\left(\frac{\lambda}{\sqrt{v_s}} + \frac{\mu}{\sqrt{v_t}}\right)} \left(\frac{1}{\sqrt{v_{3-j}}} + \frac{1}{\sqrt{v_s}} \right) \times \\ \times \sum_{r=1}^2 \chi_{3-r,t} \chi_{r,3-s} 2i \int_0^{\infty} \frac{1}{\Delta_{1, -\frac{1}{2} + i\tau}} P_{\frac{1}{2} + i\tau}^{(r-1)}(p_{t,0}) P_{\frac{1}{2} + i\tau}^{(2-r)}(-p_{3-s,0}) g_{t,\mu,0}^{(28) - \frac{1}{2} + i\tau} g_{s,\frac{1}{2} + i\tau,0}^{(82)\lambda} d\tau;$$

$$\chi_{sm} = \begin{cases} 1, & s=1, \\ \frac{k_m}{\sqrt{v_m}}, & s=2; \end{cases} \Delta_{1,\kappa} = \sum_{r=1}^2 (-1)^r \frac{k_r}{\sqrt{v_r}} P_{\kappa}^{(r-1)}(-p_{1,0}) P_{\kappa}^{(2-r)}(-p_{2,0});$$

$$p_{j,0} = \cos \eta_{j0}; \Delta_2 = (1+k_1)(1+k_2) c_{44}^2 \left(\frac{1}{\sqrt{v_2}} - \frac{1}{\sqrt{v_1}} \right); \kappa = -\frac{1}{2} + i\tau.$$

3. Исследование оператора разрешающей системы

Теорема. При условии $h < d_1$ оператор системы (11), (12) является фредгольмовым.

Для этого необходимо показать, что

$$\sum_{j=1}^2 \sum_{t=1}^2 \int_0^{\infty} \int_0^{\infty} |\Omega_{j,t}(\lambda, \mu)| d\lambda d\mu < \infty.$$

Выражение слева может быть оценено сверху конечной линейной комбинацией с постоянными коэффициентами интегралов вида

$$\int_0^{\infty} \int_0^{\infty} e^{h \left(\frac{\lambda}{\sqrt{v_s}} + \frac{\mu}{\sqrt{v_t}} \right)} \left| \int_0^{\infty} \frac{1}{\Delta_{1, \frac{1}{2}+i\tau}} P_{\frac{1}{2}+i\tau}^{(r-1)}(p_{t,0}) P_{\frac{1}{2}+i\tau}^{(2-r)}(-p_{3-s,0}) g_{t,\mu,0}^{(28) \frac{1}{2}+i\tau} g_{s,\frac{1}{2}+i\tau,0}^{(82)\lambda} \right| d\tau d\lambda d\mu.$$

Сделав подстановку наших обозначений и поменяв порядок интегрирования, получим

$$\int_0^{\infty} \left| \frac{-\frac{i}{2c_t} P_{\frac{1}{2}+i\tau}^{(r-1)}(p_{t,0}) P_{\frac{1}{2}+i\tau}^{(2-r)}(-p_{3-s,0})}{\sum_{n=1}^2 (-1)^n \frac{k_n}{\sqrt{v_n}} P_{\frac{1}{2}+i\tau}^{(n-1)}(-p_{1,0}) P_{\frac{1}{2}+i\tau}^{(2-n)}(-p_{2,0})} \right| \frac{2\tau sh(\pi\tau)}{\pi^2} \times$$

$$\times \left[\int_0^{\infty} e^{\frac{hp_{t,0}}{d_1} c_t \mu} \frac{K_{i\tau}(c_t \mu)}{\sqrt{c_t \mu}} d(c_t \mu) \cdot \int_0^{\infty} e^{\frac{hp_{s,0}}{d_1} c_s \lambda} \frac{K_{i\tau}(c_s \lambda)}{\sqrt{c_s \lambda}} d(c_s \lambda) \right] d\tau.$$

Два внутренних интеграла являются интегральным преобразованием Конторовича–Лебедева, для нашего случая нужно положить

$$f(x) = e^{-x \cos(\alpha_m)} \div F(\tau) = \frac{\pi}{\sin(\alpha_m)} \frac{sh(\alpha_m \tau)}{sh(\pi\tau)}, \quad \alpha_m = \text{Arc cos} \left(-\frac{h}{d_1} p_{m,0} \right),$$

а также для оценки выражения, стоящего под знаком модуля, воспользуемся следующей асимптотикой:

$$P_{\omega}^{\nu}(\cos(x)) = \frac{\Gamma(\nu + \omega + 1)}{\Gamma\left(\omega + \frac{3}{2}\right)} \left(\frac{\pi}{2} \sin(x)\right)^{-\frac{1}{2}} \left\{ \cos\left[\left(\omega + \frac{1}{2}\right)x - \frac{\pi}{2} + \frac{\nu\pi}{2}\right] + O(\omega^{-1}) \right\},$$

где $\omega = -\frac{1}{2} + i\tau$, $\tau \rightarrow \infty$, $\varepsilon \leq x \leq \pi - \varepsilon$, $\varepsilon > 0$. Таким образом, последний интеграл можно оценить сверху следующим:

$$|W| \int_0^{\infty} e^{\tau(\eta_{t,0} - \eta_{3-s,0} + \eta_{1,0} + \eta_{2,0} - \pi)} \tau \frac{\text{sh}(\alpha_t \tau) \text{sh}(\alpha_s \tau)}{\text{sh}(\pi \tau)} d\tau, \quad |W| < \infty,$$

интеграл принимает максимальное значение при $h \rightarrow d_1$, а это значит,

$$\exists \gamma > 0: \alpha_m = \text{Arc cos}\left(-\frac{h}{d_1} \cos(\eta_{m,0})\right) = \pi - \eta_{m,0} - \gamma, \quad \text{оценим сверху}$$

последний интеграл следующим:

$$|W| \int_0^{\infty} e^{\tau(\eta_{t,0} - \eta_{3-s,0} + \eta_{1,0} + \eta_{2,0} - \pi)} \tau e^{\tau(-\pi + \pi - \eta_{t,0} + \pi - \eta_{s,0} - \gamma)} d\tau = |W| \int_0^{\infty} \tau e^{-\gamma \tau} d\tau = \frac{|W|}{\gamma^2} < \infty.$$

4. Анализ напряжений. В ходе численного решения были вычислены напряжения σ_z , σ_p в окрестности оси Z , а также σ_{η} , $\sigma_{\xi\eta}$ на поверхности неподвижного основания в виде двуполостного гиперboloида вращения. Геометрия задачи выбиралась таким образом, что выполнялись следующие соотношения: $\beta = \frac{d_1}{d_2} = 2$, $\alpha = \frac{d_1 - h}{d_1} = 0,1; 0,25; 0,5; 2,5$. Графики напряжений приведены на рис. 2 и 3.

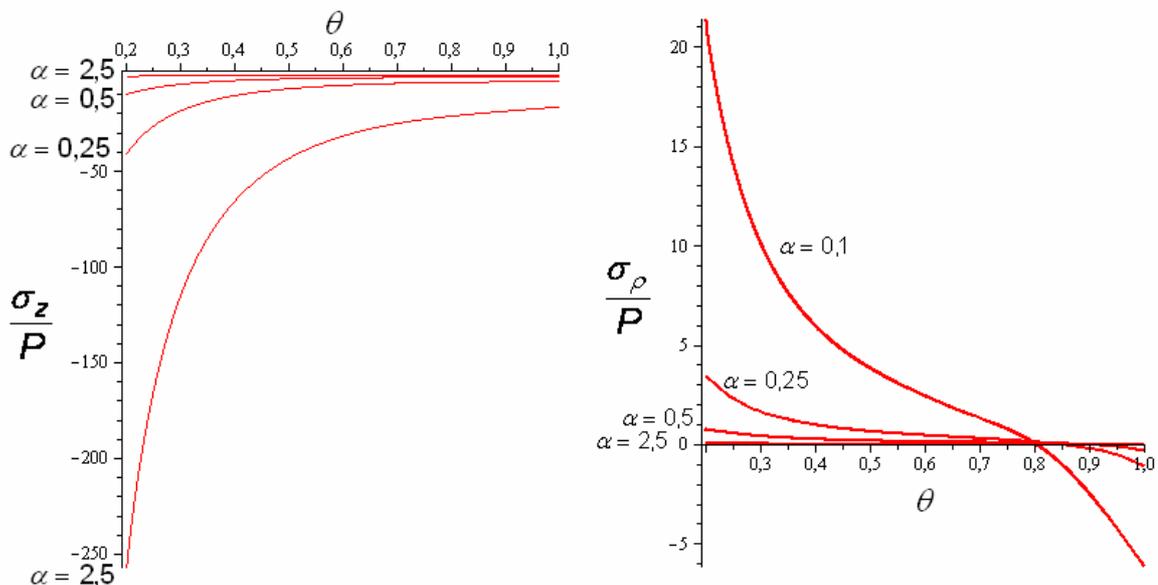


Рисунок 2 – Напряжения в окрестности оси Z , где $z = h + \theta(d_1 - h)$

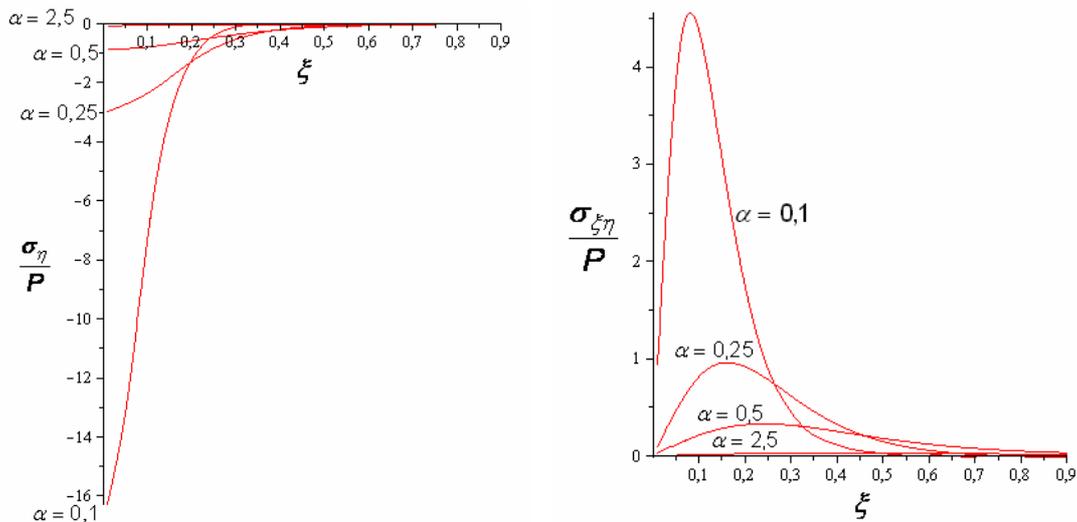


Рисунок 3 – Напряжения на основании в виде двуполостного гиперboloида

Список использованных источников

1. Мехтиев М.Ф. Асимптотическое поведение решения осесимметричной задачи теории упругости для трансверсально-изотропного полого конуса / М.Ф. Мехтиев, Н.А. Сардарова, Н.И. Фомина // Изв. РАН. МТТ. – 2003. – № 2. – С. 61–70.
2. Ding H.J. Analytical thermoelastodynamic solutions for a nonhomogeneous transversely isotropic hollow sphere / H.J. Ding, H.M. Wang, W.W. Chen // Appl. Mech. – 2002. – 72, № 8. – P. 545–553.
3. Подильчук Ю.Н. Пространственные задачи теории упругости и пластичности / Ю.Н. Подильчук. – К: Наук. думка, 1984. Т. 1: Граничные задачи статики упругого тела. – 303 с.
4. Подильчук Ю.Н. Темоупруга деформація трансверсально-изотропного вытянутого сфероїда / Ю.Н. Подильчук // Прикл. мех. – 1987. – 23, № 12. – С. 25–34.
5. Николаев А.Г. Круговая трещина в трансверсально изотропном сфероиде под действием нормальной нагрузки / А.Г. Николаев, Ю.А. Щербакова // Теоретическая и прикладная механика. – 2003. – В. 38. – С. 9–14.
6. Ніколаєв О.Г. Аналіз напружено деформівного стану трансферсально ізотропного сфероїда зі сфероїдальною порожниною / О.Г. Ніколаєв, Ю.А. Щербакова // Вісн. Львів. ун-ту. Сер. Прикл. математ. та інформ. – 2007. – В. 12. – С. 176–181.
7. Николаев А.Г. Теоремы сложения перемещений трансверсально изотропных канонических тел / А.Г. Николаев // Рук. деп. в ГНТБ Украины 10.07.96, №1568 – Ук 96. – 52 с.

Поступила в редакцию 14.02.2010 г.

*Рецензент: д-р техн. наук, проф. А. Г. Гребеников,
Национальный аэрокосмический университет
им. Н. Е. Жуковского «ХАИ», Харьков*