

МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ НАПРЯЖЕННО-ДЕФОРМИРОВАННОГО СОСТОЯНИЯ ПОРИСТОГО МАТЕРИАЛА

В данный момент проводится огромное количество исследований, связанных с разработкой моделей композиционных материалов и их применением в различных конструкциях. Композиционные материалы с их уникальными физико-механическими характеристиками с каждым годом вытесняют из употребления в передовых отраслях машиностроения, таких, как авиация и космонавтика, стали и цветные сплавы. Эта общая тенденция весьма устойчива, что делает данную область исследования очень перспективной.

Применение композитных материалов требует, однако, тщательного расчета и обоснования, так как механизмы деформирования и разрушения новых материалов еще очень слабо изучены. Существующие математические модели композитов в большинстве своем основаны на теории стохастических процессов и широком применении метода конечных элементов (МКЭ). Очень актуальной проблемой является создание численно-аналитических моделей для исследования локального напряженно-деформированного состояния (НДС) и получения асимптотически точных решений. Основой подавляющего большинства всех таких моделей являются пространственные задачи теории упругости в различных постановках.

Разные подходы к исследованию НДС моделей композиционных материалов приведены в работах [1 – 3]. Анализ напряжений в окрестности одной полости канонической формы в изотропном и трансверсально-изотропном материалах стал возможным благодаря точным решениям уравнений теории упругости в канонических областях, полученных Ю. Н. Подильчуком [4]. Исследование НДС в многосвязных областях на основе разработанного обобщенного метода Фурье (ОМФ) проводилось в работах [5 – 8].

В настоящей работе предложена модель НДС пористого материала, основанная на изучении локального поля напряжений в окрестности двух сфероидальных полостей разной геометрической формы с помощью ОМФ. Приведено сравнение полученных результатов с расчетами, независимо выполненными МКЭ.

Данная методика может быть распространена на материал с различными включениями (зернистый композит).

1. Постановка задачи

Рассматривается упругое пространство с двумя непересекающимися сфероидальными полостями Ω_i , расположенными на одной оси симметрии, с центрами, сдвинутыми друг относительно друга на a (рис. 1). Уравнения граничных поверхностей полостей в цилиндрических координатах (ρ, z_i, φ) имеют вид

$$\Gamma_i : z_i^2 / d_{1i}^2 + \rho^2 / d_{2i}^2 = 1, \quad (1)$$

где d_{1i}, d_{2i} - большая и малая полуоси сфероидов соответственно, $i = 1, 2$.

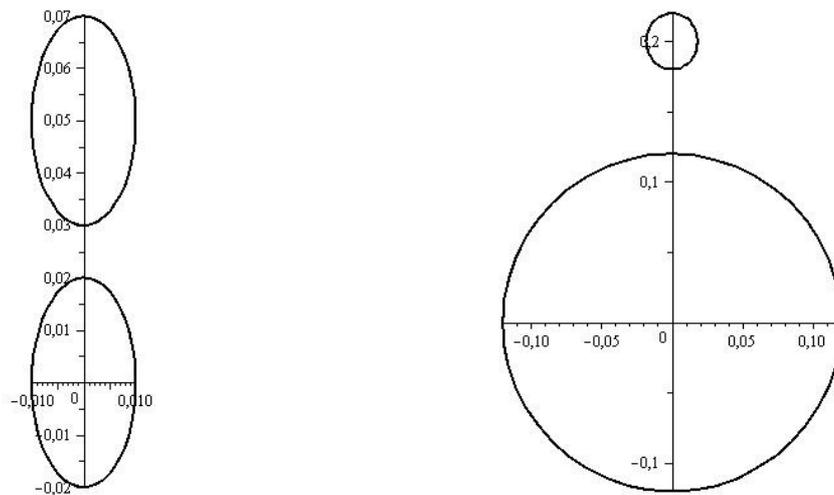


Рисунок 1 - Схематическое представление геометрической интерпретации задачи

Считается, что одна из полостей свободна от напряжений, а к другой приложено гидростатическое давление. В математической постановке исследуемое поле напряжений может быть получено в результате решения следующей краевой задачи:

$$\Delta \vec{U} + \frac{1}{1-2\mu} \vec{\nabla} \operatorname{div} \vec{U} = 0; \quad (2)$$

$$F\vec{U}_{\Gamma_1} = \sigma_0 \vec{n}; \quad (3)$$

$$F\vec{U}_{\Gamma_2} = 0, \quad (4)$$

где $\vec{U}, F\vec{U}$ - функции перемещений и напряжений соответственно; μ - коэффициент Пуассона; σ_0 - гидростатическое давление; \vec{n} - вектор нормали к поверхности.

Вводятся две сфероидальные системы координат (ξ_i, η_i, ϕ) , связанные с введенными цилиндрическими координатами формулами:

$$\begin{cases} c_1 sh\xi_1 \sin\eta_1 = c_2 sh\xi_2 \sin\eta_2; \\ c_1 ch\xi_1 \cos\eta_1 = a + c_2 ch\xi_2 \cos\eta_2, \end{cases} \quad (5)$$

где a - расстояние между центрами; c_i - параметры сфероидальных систем координат. Уравнения поверхностей полостей (1) в сфероидальных координатах могут быть записаны в виде $\xi_i = \xi_{i0}$. Условие непересечения граничных поверхностей имеет вид

$$d_{11} + d_{12} \leq a. \quad (6)$$

2. Построение решения краевой задачи (2) - (4)

Введем следующую пару линейно независимых частных решений уравнения Ламе для сфероида [9]:

$$\bar{U}_{1,n,0}^{\pm(5)}(\xi, \eta, \phi) = c/(2n+1) \bar{\nabla} \left[u_{n-1,0}^{\pm(5)}(\xi, \eta, \phi) - u_{n+1,0}^{\pm(5)}(\xi, \eta, \phi) \right]; \quad (7)$$

$$\bar{U}_{2,n,0}^{\pm(5)}(\xi, \eta, \phi) = \left[z \bar{\nabla} + (4\mu - 3) \bar{e}_z \right] u_{n,0}^{\pm(5)}(\xi, \eta, \phi) - cq_0^2 \bar{\nabla} u_{n\pm 1,0}^{\pm(5)}(\xi, \eta, \phi); \quad (8)$$

$$u_{n,m}^{\pm(5)}(\xi, \eta, \phi) = \begin{cases} Q_n^{-m}(ch\xi) \\ P_n^{-m}(ch\xi) \end{cases} P_n^m(\cos\eta) e^{im\phi}, \quad (9)$$

где $P_n^m(x)$, $Q_n^m(x)$ - присоединенные функции Лежандра 1-го и 2-го рода; $q_0 = ch\xi_0$. В решениях (7) – (8), отвечающих граничной поверхности Γ_i , надо выбрать $\xi = \xi_{0i}$. Формулы (7) – (8) в координатной форме имеют вид

$$\bar{U}_{1,n,0}^{\pm(5)} = -u_{n,1}^{\pm(5)} \bar{e}_\rho - u_{n,0}^{\pm(5)} \bar{e}_z; \quad (10)$$

$$\bar{U}_{2,n,0}^{\pm(5)} = -qu_{1,n,1}^{\pm(5)} \bar{e}_\rho - \left[qu_{1,n,0}^{\pm(5)} + (3 - 4\mu) u_{n,0}^{\pm(5)} \right] \bar{e}_z + c(q^2 - q_0^2) \bar{\nabla} u_{n\pm 1,0}^{\pm(5)}. \quad (11)$$

Знак «+» в верхнем индексе формул соответствует внешним решениям уравнения Ламе, «-» - внутренним.

Координатная запись напряжений, отвечающих базисным решениям в точках поверхности $\xi_i = \xi_{0i}$ на площадках с нормалью $\vec{n} = -\bar{e}_{\xi_i}$, имеет вид

$$F\bar{U}_{i,n,0}^{\pm(5)} = 2G \frac{h}{c} \left[s_{n,1}^{\pm(i)} P_n^{(1)}(\cos\eta) \bar{e}_\rho + s_{n,0}^{\pm(i)} P_n(\cos\eta) \bar{e}_z \right], \quad (12)$$

где G - модуль сдвига;

$$s_{n,1}^{\pm(1)} = -\frac{d}{d\xi} u_{n,1}^{\pm}; \quad s_{n,1}^{\pm(2)} = -\left[q^2 \frac{d}{d\xi} (u_{1,n,1}^{\pm}/q) - 2\mu \cdot u_{n,0}^{\pm} \right];$$

$$s_{n,0}^{\pm(1)} = -\frac{d}{d\xi} u_{n,0}^{\pm}; \quad s_{n,0}^{\pm(2)} = -\left[q^2 \frac{d}{d\xi} (u_{1,n,0}^{\pm}/q) + (1-2\mu) \cdot \frac{d}{d\xi} u_{n,0}^{\pm} \right];$$

$$u_{n,m}^{\pm}(\xi) = \begin{cases} Q_n^{-m}(q) \\ P_n^{-m}(q) \end{cases}; \quad u_{1,n,m}^{\pm}(\xi) = \begin{cases} (n+m+1)Q_{n+1}^{-m}(q) \\ (n-m)P_{n-1}^{-m}(q) \end{cases}; \quad (13)$$

$$u_{1,n,m}^{\pm}(\xi) = \begin{cases} (n+m+1)Q_{n+1}^{-m}(q) \\ (n-m)P_{n-1}^{-m}(q) \end{cases}, \quad \begin{matrix} q = ch\xi_{0i}; \\ h = 1/\sqrt{q^2 - \cos^2 \eta}. \end{matrix} \quad (14)$$

Общее решение задачи строим как суперпозицию базисных внешних решений уравнения Ламе:

$$\vec{U} = \sum_{i=1}^2 \sum_{n=0}^{\infty} \left[a_n^{(i)} \vec{U}_{i,n,0}^{+(5)}(\xi_1, \eta_1, \phi) + b_n^{(i)} \vec{U}_{i,n,0}^{+(5)}(\xi_2, \eta_2, \phi) \right]. \quad (15)$$

Для удовлетворения граничных условий на сфероидальных полостях необходимо преобразовать общее решение в отдельности к каждой сфероидальной полости. Для этого используем теоремы сложения решений (7) – (8), отнесенных к разным началам:

$$\vec{U}_{i,n,0}^{+(5)}(\xi_1, \eta_1, \phi) = \sum_{s=0}^{\infty} \left\{ h_{ns}^{(ii)12} \vec{U}_{i,s,0}^{-(5)}(\xi_2, \eta_2, \phi) + \delta_{i2} h_{ns}^{(21)12} \vec{U}_{1,s,0}^{-(5)}(\xi_2, \eta_2, \phi) \right\}; \quad (16)$$

$$\vec{U}_{i,n,0}^{+(5)}(\xi_2, \eta_2, \phi) = \sum_{s=0}^{\infty} \left\{ h_{ns}^{(ii)21} \vec{U}_{i,s,0}^{-(5)}(\xi_1, \eta_1, \phi) + \delta_{i2} h_{ns}^{(21)21} \vec{U}_{1,s,0}^{-(5)}(\xi_1, \eta_1, \phi) \right\};$$

$$\vec{U}_{i,n,0}^{+(5)}(\xi_1, \eta_1, \phi) = \sum_{j=1}^2 \sum_{s=0}^{\infty} \left[h_{ns}^{(11)12} + \delta_{j1} \delta_{i2} h_{ns}^{(21)12} \right] \cdot \vec{U}_{j,s,0}^{-(5)}(\xi_2, \eta_2, \phi); \quad (17)$$

$$\vec{U}_{i,n,0}^{+(5)}(\xi_2, \eta_2, \phi) = \sum_{j=1}^2 \sum_{s=0}^{\infty} \left[h_{ns}^{(11)21} + \delta_{j1} \delta_{i2} h_{ns}^{(21)21} \right] \cdot \vec{U}_{j,s,0}^{-(5)}(\xi_1, \eta_1, \phi);$$

где δ_{ij} - символ Кронекера;

$$h_{ns}^{(11)12} = \sum_{k=n}^{\infty} \left(s + \frac{1}{2} \right) \frac{c_1}{c_2} (-1)^{k+s} \beta_{kn} Q_{s,k}^{(1)}; \quad h_{ns}^{(22)12} = h_{ns}^{(11)12}; \quad (18)$$

$$h_{ns}^{(21)12} = \sum_{k=n}^{\infty} \left(s + \frac{1}{2} \right) \frac{c_1}{c_2} (-1)^{k+s} \left[\beta_{kn} c_2 q_{20}^2 Q_{s+1,k+1}^{(1)} - c_1 q_{10}^2 \beta_{k+1,n+1} Q_{s,k+2}^{(1)} \right];$$

$$h_{ns}^{(11)21} = \sum_{k=s}^{\infty} \left(s + \frac{1}{2} \right) (-1)^{k+n+1} \beta_{ks} Q_{n,k}^{(1)}; \quad h_{ns}^{(22)21} = h_{ns}^{(11)21}; \quad (19)$$

$$h_{ns}^{(21)21} = \sum_{k=s}^{\infty} \left(s + \frac{1}{2} \right) (-1)^{k+n+1} \left[\beta_{ks} c_2 q_{20}^2 Q_{n+1,k+1}^{(1)} - c_1 q_{10}^2 \beta_{k+1,s+1} Q_{n,k+2}^{(1)} \right]; \quad (20)$$

$$\beta_{kn} = \sqrt{\pi} (c_1/2)^k \frac{\varepsilon_{kn}}{\Gamma((k-n)/2+1)\Gamma((k+n)/2+3/2)}; \quad (21)$$

$$\varepsilon_{kn} = \begin{cases} 1 \Leftarrow k-n=2l \\ 0 \Leftarrow k-n=2l+1 \end{cases}; \quad Q_{s,k}^{(1)} = \left(\frac{1}{\sqrt{a^2 - c_2^2}} \right)^k Q_s^k \left(\frac{a}{c_2} \right). \quad (22)$$

Запись вектора перемещений в координатах с началом O_1 :

$$\begin{aligned} \vec{U} &= \sum_{i=1}^2 \sum_{n=0}^{\infty} a_n^{(i)} \vec{U}_{i,n,0}^{+(5)}(\xi_1, \eta_1, \phi) + \sum_{i=1}^2 \sum_{n=0}^{\infty} b_n^{(i)} \sum_{j=1}^2 \sum_{s=0}^{\infty} \left[h_{ns}^{(11)21} + \delta_{j1} \delta_{i2} h_{ns}^{(21)21} \right] \times \\ &\times \vec{U}_{j,s,0}^{-(5)}(\xi_1, \eta_1, \phi) = \sum_{i=1}^2 \sum_{n=0}^{\infty} a_n^{(i)} \vec{U}_{i,n,0}^{+(5)}(\xi_1, \eta_1, \phi) + \vec{U}_{i,n,0}^{-(5)}(\xi_1, \eta_1, \phi) \times \\ &\times \sum_{j=1}^2 \sum_{s=0}^{\infty} b_s^{(j)} \left[h_{ns}^{(11)21} + \delta_{i1} \delta_{j2} h_{ns}^{(21)21} \right]. \end{aligned} \quad (23)$$

Переходя к напряжениям на поверхности Γ_1 , в координатах $(\vec{n} = -\vec{e}_\xi)$ получаем

$$\begin{aligned} F\vec{U} &= -2G \frac{h_1}{c_1} \sum_{i=1}^2 \sum_{n=0}^{\infty} a_n^{(i)} \left[s_{n,1}^{+(i)}(\xi_1) P_n^{(1)} \vec{e}_\rho + s_{n,0}^{+(i)}(\xi_1) P_n \vec{e}_z \right] + \\ &+ \left[s_{n,1}^{-(i)}(\xi_1) P_n^{(1)} \vec{e}_\rho + s_{n,0}^{-(i)}(\xi_1) P_n \vec{e}_z \right] \sum_{j=1}^2 \sum_{s=0}^{\infty} b_s^{(j)} \left[h_{ns}^{(11)21} + \delta_{i1} \delta_{j2} h_{ns}^{(21)21} \right]. \end{aligned} \quad (24)$$

Запись вектора перемещений в координатах с началом O_2 :

$$\begin{aligned} \vec{U} &= \sum_{i=1}^2 \sum_{n=0}^{\infty} b_n^{(i)} \vec{U}_{i,n,0}^{+(5)}(\xi_2, \eta_2, \phi) + \sum_{i=1}^2 \sum_{n=0}^{\infty} a_n^{(i)} \sum_{j=1}^2 \sum_{s=0}^{\infty} \left[h_{ns}^{(11)12} + \delta_{j1} \delta_{i2} h_{ns}^{(21)12} \right] \times \\ &\times \vec{U}_{j,s,0}^{-(5)}(\xi_2, \eta_2, \phi) = \sum_{i=1}^2 \sum_{n=0}^{\infty} b_n^{(i)} \vec{U}_{i,n,0}^{+(5)}(\xi_2, \eta_2, \phi) + \vec{U}_{i,n,0}^{-(5)}(\xi_2, \eta_2, \phi) \times \\ &\times \sum_{j=1}^2 \sum_{s=0}^{\infty} a_s^{(j)} \left[h_{ns}^{(11)12} + \delta_{i1} \delta_{j2} h_{ns}^{(21)12} \right]. \end{aligned} \quad (25)$$

Переходя к напряжениям на поверхности Γ_2 , в координатах $(\vec{n} = -\vec{e}_\xi)$ получаем

$$\begin{aligned}
F\vec{U} = & -2G \frac{h_2}{c_2} \sum_{i=1}^2 \sum_{n=0}^{\infty} b_n^{(i)} \left[s_{n,1}^{+(i)}(\xi_2) P_n^{(1)} \vec{e}_\rho + s_{n,0}^{+(i)}(\xi_2) P_n \vec{e}_z \right] + \\
& + \left[s_{n,1}^{-(i)}(\xi_2) P_n^{(1)} \vec{e}_\rho + s_{n,0}^{-(i)}(\xi_2) P_n \vec{e}_z \right] \sum_{j=1}^2 \sum_{s=0}^{\infty} a_s^{(j)} \left[h_{ns}^{(11)12} + \delta_{i1} \delta_{j2} h_{ns}^{(21)12} \right].
\end{aligned} \tag{26}$$

После удовлетворения граничным условиям получаем бесконечную систему линейных алгебраических уравнений относительно $a_n^{(i)}, b_n^{(i)}$:

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^2 \left\{ a_n^{(i)} s_{n,1}^{+(i)}(\xi_1) + s_{n,1}^{-(i)}(\xi_1) \sum_{j=1}^2 \sum_{s=0}^{\infty} b_s^{(j)} \left[h_{ns}^{(11)21} + \delta_{i1} \delta_{j2} h_{ns}^{(21)21} \right] \right\} &= \frac{d_{11} \sigma_0}{2G} \delta_{n1}; \\
\sum_{i=1}^2 \left\{ a_n^{(i)} s_{n,0}^{+(i)}(\xi_1) + s_{n,0}^{-(i)}(\xi_1) \sum_{j=1}^2 \sum_{s=0}^{\infty} b_s^{(j)} \left[h_{ns}^{(11)21} + \delta_{i1} \delta_{j2} h_{ns}^{(21)21} \right] \right\} &= -\frac{d_{21} \sigma_0}{2G} \delta_{n1}; \\
\sum_{i=1}^2 \left\{ b_n^{(i)} s_{n,1}^{+(i)}(\xi_2) + s_{n,1}^{-(i)}(\xi_2) \sum_{j=1}^2 \sum_{s=0}^{\infty} a_s^{(j)} \left[h_{ns}^{(11)12} + \delta_{i1} \delta_{j2} h_{ns}^{(21)12} \right] \right\} &= 0; \\
\sum_{i=1}^2 \left\{ b_n^{(i)} s_{n,0}^{+(i)}(\xi_2) + s_{n,0}^{-(i)}(\xi_2) \sum_{j=1}^2 \sum_{s=0}^{\infty} a_s^{(j)} \left[h_{ns}^{(11)12} + \delta_{i1} \delta_{j2} h_{ns}^{(21)12} \right] \right\} &= 0.
\end{aligned} \tag{27}$$

$$n = 1, 2, \dots \quad a_0^{(i)} = b_0^{(i)} = 0$$

Оператор, порождаемый матрицей системы (27), является вполне непрерывным в гильбертовом пространстве l_2 при условии непересечения граничных поверхностей. Тогда из условия ограниченности оператора системы, альтернативы Гильберта и единственности разрешимости исходной задачи следует разрешимость системы методом редукции [9].

3. Численные результаты и их анализ

Для исследования напряженно-деформированного состояния в окрестности двух вытянутых сфероидов, один из которых нагружен гидростатическим давлением, рассмотрим две характерные модели, приведенные на рис. 1. Первая модель (А) представляет собой два одинаковых сфероидов с межосевым расстоянием a , которое изменяется следующим образом: $a = (2.2; 2.5; 3; 4) d_{12}$, где d_{12} - малая полуось сфероидов. Вторая модель (Б) представляет собой неодинаковые сфероиды с почти равными полуосями, являясь приближением модели «сфера - сфера», которая подробным образом изучена в работе [9], что позволяет сравнивать полученное решение с уже известными

результатами. Межосевое расстояние в этой модели изменяем следующим образом: $a = (8;10;12;15)d_{12}$, где d_{12} - малая полуось малого сфероида.

На рис. 2 - 5 приведены распределения напряжений на полостях в зависимости от расстояния между ними. Расчеты показали, что при сближении полостей происходит разгрузка нагруженной полости, т.е. перераспределение напряжений между полостями. Максимально допустимое сближение полостей в рамках линейной задачи $a = (2.2;8)d_{12}$ для первой и второй моделей соответственно.

На рис. 6 - 10 приведено сравнение результатов решения двумя независимыми методами: аналитическим и с применением МКЭ. Сходство результатов достаточно хорошее. Некоторые отклонения в МКЭ можно объяснить рядом объективных причин: приближительный характер расчета методом конечных элементов пространственных задач ввиду достаточно крупных элементов и ограниченного ресурса ЭВМ; сильное влияние краевого эффекта на картину локального НДС. Указанных недостатков частично можно избежать, отодвигая как можно дальше границу области от локальной зоны, являющейся объектом исследования. Однако удаление границы приводит к резкому увеличению количества КЭ, что негативно сказывается на быстродействии программы и точности результатов.

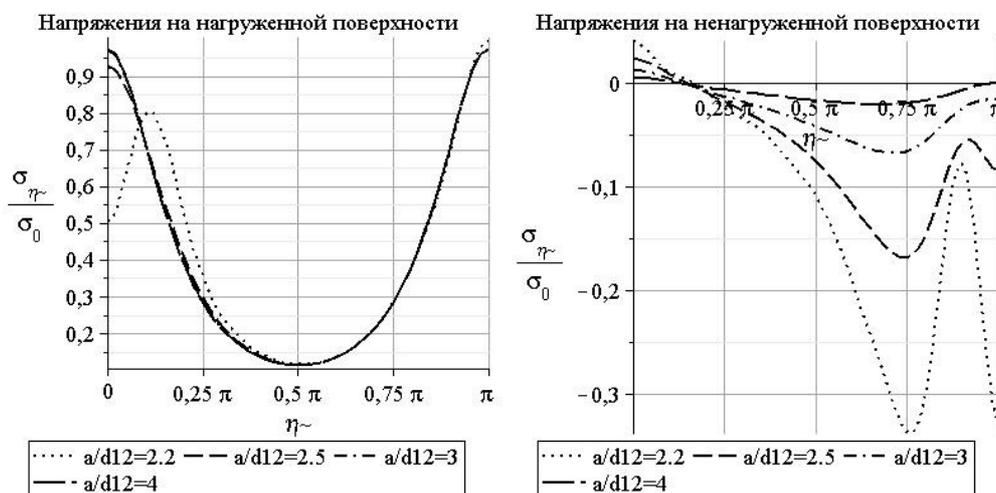


Рисунок 2 – Напряжения σ_{η} на поверхности полостей в зависимости от изменения расстояния между ними для модели «А»

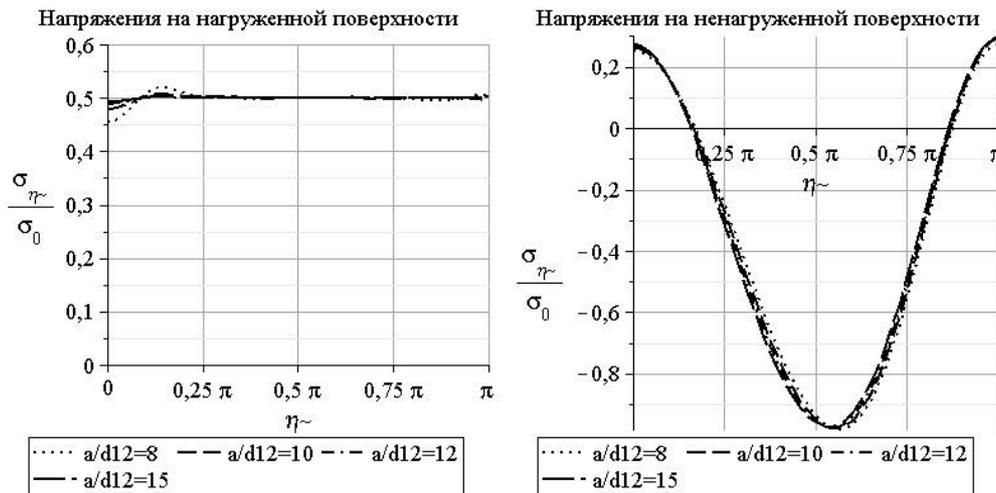


Рисунок 3 – Напряжения σ_{η} на поверхности полостей в зависимости от изменения расстояния между ними для модели «Б»

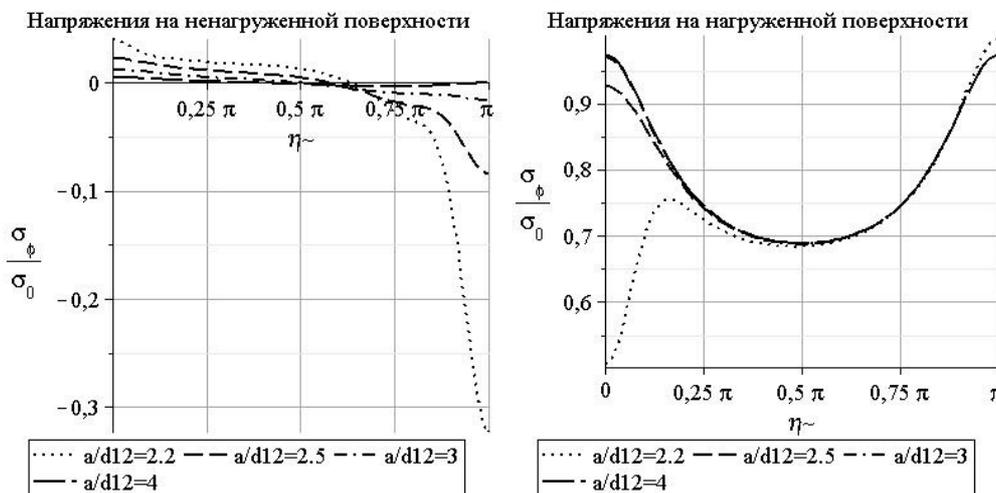


Рисунок 4 – Напряжения σ_{ϕ} на поверхности полостей в зависимости от изменения расстояния между ними для модели «А»

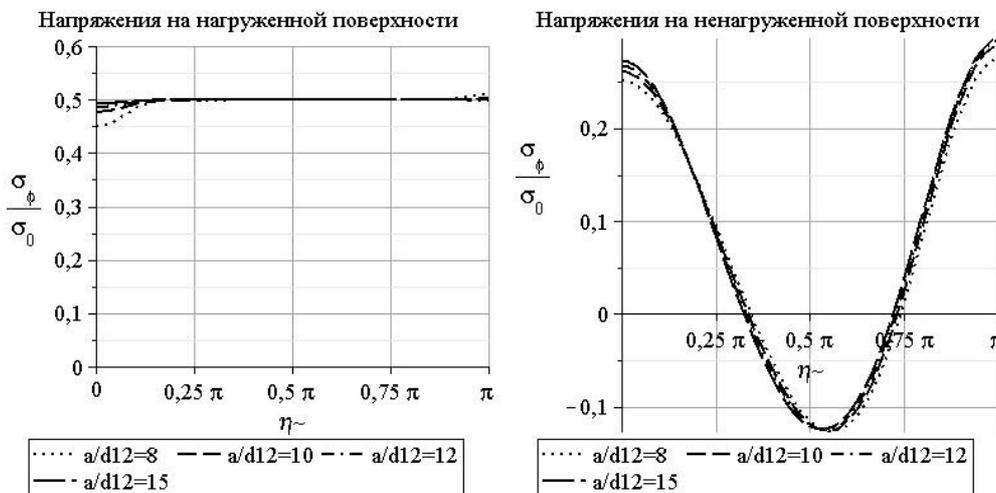


Рисунок 5 – Напряжения σ_{ϕ} на поверхности полостей в зависимости от изменения расстояния между ними для модели «Б»

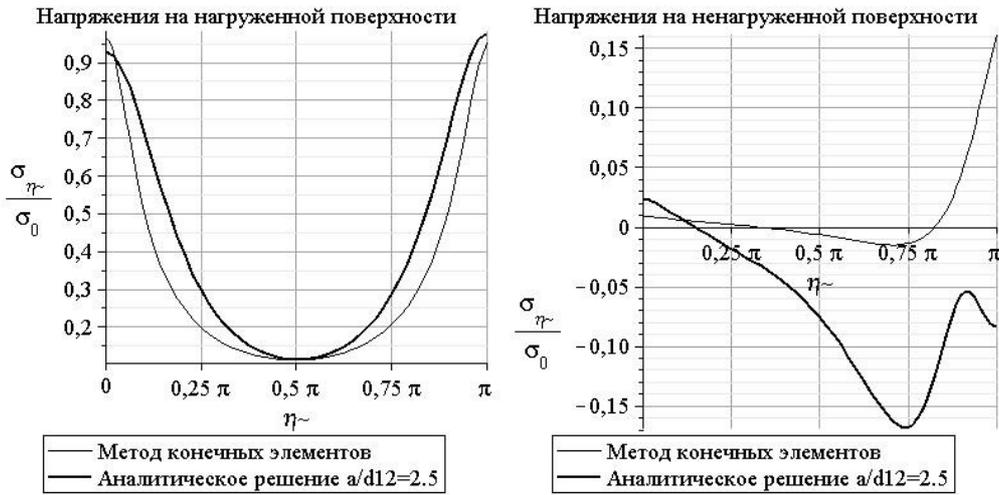


Рисунок 6 – Напряжения σ_{η} на поверхности полостей в сравнении с МКЭ для модели «А»

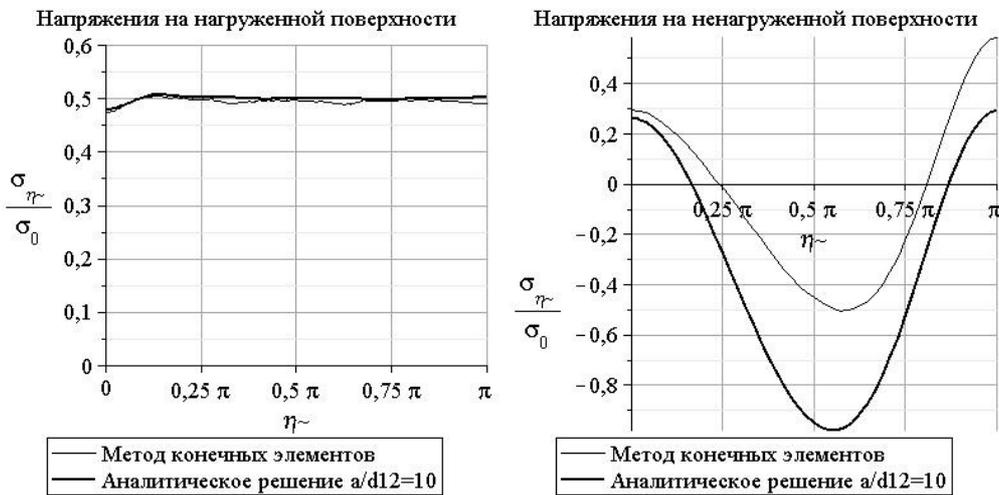


Рисунок 7 – Напряжения σ_{η} на поверхности полостей в сравнении с МКЭ для модели «Б»

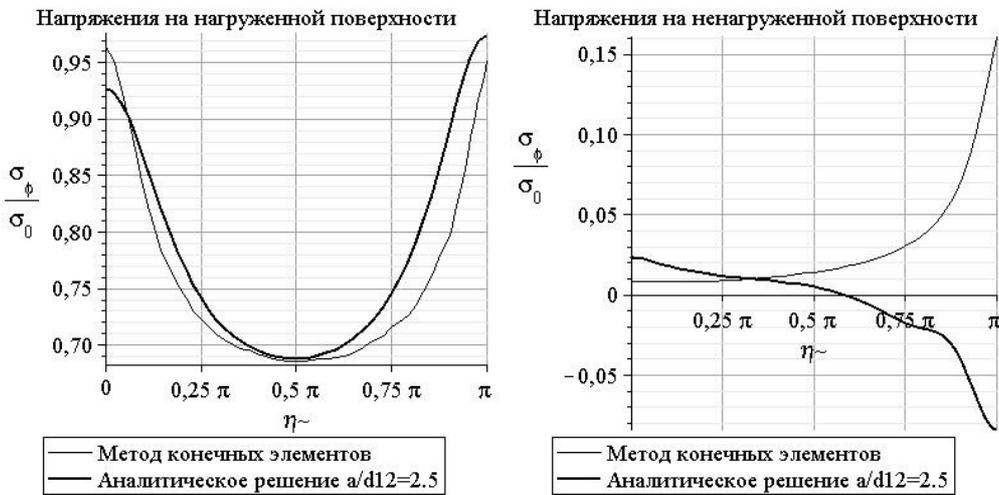


Рисунок 8 – Напряжения σ_{ϕ} на поверхности полостей в сравнении с МКЭ для модели «А»

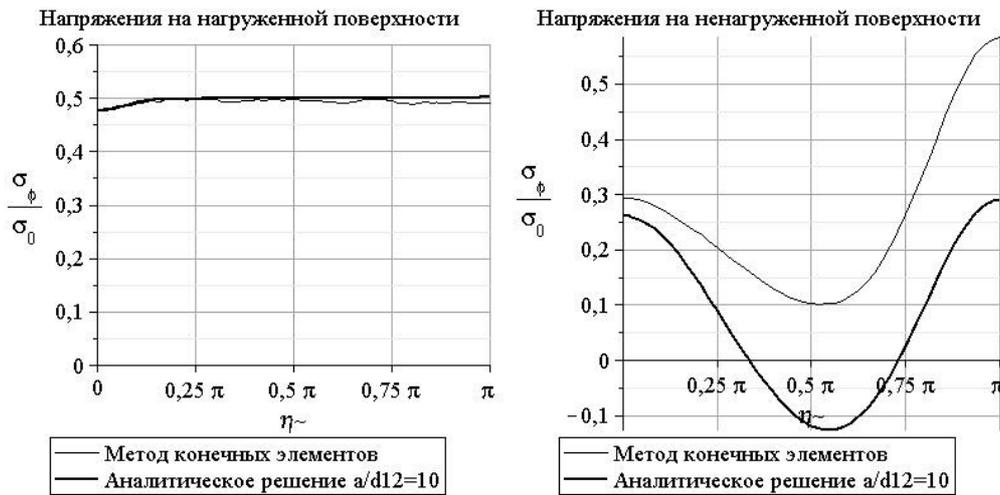


Рисунок 9 – Напряжения σ_ϕ на поверхности полостей в сравнении с МКЭ для модели «Б»

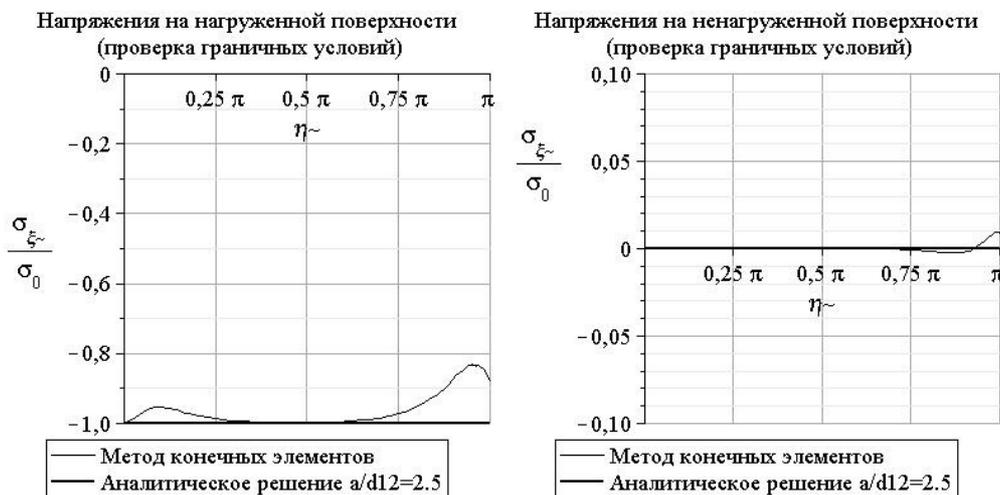


Рисунок 10 – Напряжения σ_ξ на поверхности полостей в сравнении с МКЭ для модели «А»

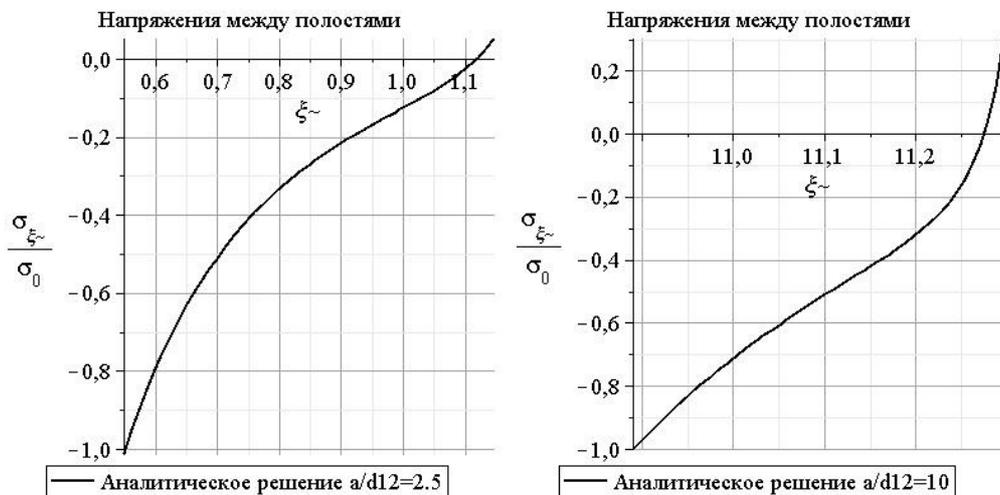


Рисунок 11 – Напряжения σ_ξ между полостями для моделей «А» и «Б» соответственно.

Список использованных источников

1. Головчан В. Т. Анизотропия физико-механических свойств композитных материалов / В. Т. Головчан. – К.: Наук. думка, 1987. – 304 с.
2. Куц В. И. Напряженное состояние и эффективные упругие модули среды, нормированной периодически расположенными сфероидальными включениями / В. И. Куц // Прикладная механика. – 1995. – Т. 31, № 3. – С. 32 - 39.
3. Структурные механизмы формирования механических свойств зернистых полимерных композитов / отв. ред. А. И. Мошев. – Екатеринбург: УрО РАН, 1997. – 507 с.
4. Подильчук Ю. Н. Пространственные задачи теории упругости и пластичности. - Т.1: Граничные задачи статики упругого тела / Ю.Н.Подильчук. – К.: Наук. думка, 1984. – 303 с.
5. Николаев А. Г. Теоремы сложения решений уравнений Ламе / А. Г. Николаев. – Х.: Харьк. авиац. ин-т, 1993. – 109 с. – Деп. в ГНТБ Украины 21.06.93, № 1178 – Ук 93.
6. Николаев А. Г. Круговая трещина в трансверсально-изотропном сфероиде под действием нормальной нагрузки / А.Г.Николаев, Ю. А. Щербакова // Теоретическая и прикладная механика. – 2003. – Вып. 38 . – С. 9 - 14.
7. Ніколаєв О. Г. Аналіз напружено-деформованого стану трансверсально-ізоτροпного сфероїда зі сфероїдальною порожниною / О. Г. Ніколаєв, Ю. А. Щербакова // Вісник Львівського ун-ту. Сер. Прикладна математика та інформатика. – 2007. Вип.12. – С. 176 – 181.
8. Николаев А. Г. Напряженное состояние трансверсально-изотропного пространства с двумя сфероидальными полостями / А.Г.Николаев, Ю. А. Щербакова // Вопросы проектирования и производства конструкций летательных аппаратов: Сб. науч. тр. Нац. аэрокосм. ун-та им. Н. Е. Жуковского «ХАИ». – Вып. 4(51). - Х.: НАКУ, 2007. – С. 49 – 54.
9. Ніколаєв О. Г. Узагальнений метод Фур'є в просторових задачах теорії пружності для канонічних многозв'язних тіл: Автореф. дис. на здоб. наук. ступ. д-ра фіз.-мат. наук. / О. Г. Ніколаєв. – Дніпропетровськ, 1997. – 36 с.

*Поступила в редакцию 04.06.09.
Рецензент: д-р техн. наук, проф. А.Г. Гребеников,
Национальный аэрокосмический университет
им. Н.Е. Жуковского «ХАИ», г. Харьков*