

УДК 519.85

О. С. ПИЧУГИНА

*Харьковский национальный университет радиоэлектроники, Украина***ОДНО ОБОБЩЕНИЕ ГИПЕРКУБ-ТОПОЛОГИИ СЕТИ ПЕРЕДАЧИ ДАННЫХ**

Предлагается обобщение популярной гиперкуб-топологии сети передачи данных, состоящее в дополнении соответствующего графа n -куба Q_n ребрами срезов гиперкуба параллельными плоскостями. Исследованы свойства дополненного графа гиперкуба Q'_n , в частности, обосновано существенное сокращение средней длины кратчайшего пути по сравнению с Q_n . Предложена модель оценки эффективности модификации мультимедийной системы за счет новых коммуникационных соединений. Обоснована целесообразность построения кластеров с Q'_n -топологией из гиперкуб-кластеров.

Ключевые слова: *распределенные вычисления, мультимедийный компьютер, кластер, гиперкуб, граф, диаметр.*

Введение

Гиперкуб – это популярная топология многопроцессорных вычислительных систем [1,2]. Этот частный случай топологии типа решетки интересен тем, что граф гиперкуба Q_n является геометрическим, что позволяет, наряду с графовым подходом, применять методы полиэдральной комбинаторики к его исследованию. Свойства графа Q_n хорошо изучены, например, известен его диаметр, кратчайшие маршруты, средняя их длина, его двудольность и т.п. [3]. Это позволяет оценивать данную топологию, сравнивать и выбирать оптимальную с точки зрения потенциальных задач, решаемых в проектируемой сети. В силу привлекательности топологии, гиперкуб исследовался в различных направлениях с целью улучшения той или иной характеристики, в частности, в литературе [4-9] предложен ряд его обобщений таких как неполный, обобщенный, расширенный, улучшенный, отборный, сбалансированный, сложенный гиперкуб, гиперкуб Баньяна, куб Мебиуса, суперкуб, скрученный и пересеченный кубы; кубически связанные циклы, локально имитирующие структуру гиперкуба графы; его двудольные обобщения такие как медианные графы и частичные кубы, а также недвудольные – Хэмминг-графы, монотонные по расстоянию и $(0, \lambda)$ -графы.

Естественной задачей построения компьютерных систем является снижение стоимости и увеличение быстродействия [2,10]. Эти две цели, как правило, взаимоисключают друг друга. В самом деле, рассмотрим систему с фиксированным числом узлов. Самой быстродействующей и самой дорогой будет система с топологией полного графа, самой недорогой и медленной – на основе топологии пути. Поэтому исследователи ставят задачи совершенство-

вать ту или иную топологию, которая уже зарекомендовала себя как эффективная, в одном из двух направлений: достичь уменьшения показателя эффективности «стоимость/быстродействие» за счет сокращения числа ребер либо добавить небольшое число ребер, несущественно увеличивающую стоимость по сравнению с увеличением быстродействия.

Данная статья посвящена второму направлению, в котором мы предлагаем усовершенствование топологии гиперкуба. А именно, предлагается еще одно обобщение Q_n , в котором использована его связь еще с одним геометрическим графом – графом 0-1-перестановок. Остовный граф многогранника перестановок исследован в [11], а его обобщение в виде структурного графа перестановок в [12]. Граф 0-1-перестановок является еще одним его обобщением, некоторые свойства которого могут быть получены из соответствующих свойств общего перестановочного многогранника [13].

Новый граф Q'_n отличается от Q_n дополнительными ребрами, что позволяет ожидать сокращение длины кратчайших маршрутов. Таким образом, Q'_n -топология сети может служить альтернативой гиперкубу, целесообразность использования которой зависит от стоимости модификации и выигрыша по времени и, соответственно, по объему передаваемой информации, который при этом достигается.

Цель статьи – исследование свойств дополненного графа Q'_n и обоснование эффективности использования его топологии в построении многопроцессорных вычислительных систем.

1. Теоретическая часть

Постановка задачи. Пусть существует кластер S с топологией в виде графа H с узлами V и реб-

рами E , среднее кратчайшее расстояние (the average shortest path, ASP) между узлами которого равно 1. Владельцы кластера решают вопрос об его модификации за счет добавления дополнительных физических соединений между компьютерами. Ставится вопрос, какую конфигурацию этих соединений выбрать и как организовать маршрутизацию, чтобы увеличить эффективность использования S .

Обозначим число узлов и ребер (порядок и размер) графа H через N и M :

$$H = (V, E), |H| = |V| = N, \|H\| = |E| = M. \quad (1)$$

По условию модификация системы осуществляется только за счет увеличения E , т.е. новая сеть S' представима графом $H' = (V, E')$, $|H'| = |V| = N, \|H'\| = |E'| = M' = M + \Delta M, \Delta M > 0$. (2)

Поскольку множество вершин H и H' совпадает, над данными графами можно производить арифметические операции [14]. Так разницей H' и H будет граф ΔH с теми же вершинами и множеством ребер ΔE :

$$\Delta H = (V, \Delta E): \Delta E = E' \setminus E, |\Delta E| = \Delta M. \quad (3)$$

Обозначим через l' – ASP в H' , тогда $\Delta l = l' - l$ – абсолютное сокращение ASP в H' по сравнению с H . В самом деле, поскольку добавление ребер никак не уменьшает ASP, следовательно $l \geq l'$ и $\Delta l \geq 0$. Пусть

$$a = \frac{\text{средняя цена узла}}{\text{средняя цена соединения}}. \quad (4)$$

– t, t' – среднее (ожидаемое) время передачи стандартного сообщения по между узлами S, S' , соответственно;

– t_{indep}, t_{dep} – затраты времени на передачу такого сообщения не зависящие от длины маршрута и зависящие, соответственно. Так в t_{indep} входит время на подготовку сообщения, в t_{dep} – время передачи служебных данных. Время передачи одного слова данных по одному каналу передачи данных включается в t_{indep} или t_{dep} в зависимости от того, передается ли сообщение целиком или пакетами.

Запишем соотношение затрат на построение кластеров S', S :

$$\delta_{expenses}(a) = \frac{a \cdot N + M'}{a \cdot N + M} = 1 + \frac{\Delta M}{a \cdot N + M}. \quad (5)$$

Поскольку интенсивности передачи стандартного сообщения в S, S' – $\frac{1}{t}, \frac{1}{t'}$, а их соотношение в сетях S', S будет

$$\delta_{speed} = \frac{t}{t'} = \frac{t_{indep} + t_{dep} \cdot l}{t_{indep} + t_{dep} \cdot l'} = 1 + \frac{t_{dep} \cdot \Delta l}{t_{indep} + t_{dep} \cdot l'}. \quad (6)$$

Мы хотим выяснить, начиная с какого порогового значения параметра a модификация S в S' целесообразна, т.е. $a^1 - ? : \delta_{expenses}(a^1) = \delta_{speed}$, или

$$\forall a > a^1 \delta_{expenses}(a) < \delta_{speed}. \quad (7)$$

Учитывая (5)-(6), выражение (7) переписывается так: $\frac{\Delta M}{a \cdot N + M} < \frac{t_{dep} \cdot \Delta l}{t_{indep} + t_{dep} \cdot l'}$, откуда

$$a > (t_{indep} + t_{dep} \cdot l') \frac{\Delta M}{t_{dep} \cdot \Delta l \cdot N} - \frac{M}{N} = a^1. \quad (8)$$

Поскольку все составляющие первого слагаемого a^1 неотрицательны, из (8) имеем оценку:

$$a > a^2 \geq a^1, \quad a^2 = \frac{\Delta M \cdot l'}{\Delta l \cdot N} - \frac{M}{N}. \quad (9)$$

В (9) a^2 будет близко к пороговому значению a^1 при $t_{indep} \ll t_{dep}$. Удобство использования (9) вместо a^1 состоит в том, что не требует оценки параметров t_{indep}, t_{dep} . Поэтому мы предлагаем предварительное сравнение $a > a^2$. Если это условие выполнено, модификация однозначно целесообразна, если нет – производим уточнение с помощью a^1 .

Итак, остановимся на получении (9), для чего, помимо порядка и размеров графов H, H' , установим порядок маршрутизации и среднюю длину маршрутов в них.

Выберем в качестве базовой компьютерной архитектуры популярную гиперкуб-архитектуру [1-9]. В этом случае $H = Q_n$ – остовный граф n -мерного единичного куба $PB_n = [0, 1]^n$. Вершинами данного гиперкуба является все множество n -мерных булевых векторов – $vert PB_n = B_n$:

$$B_n = \{x \in R^n : x_i \in \{0, 1\}, i \in J_n\}, J_n = \{1, \dots, n\}.$$

Замечание 1. Множества, подобные B_n , совпадающие с вершинами своей выпуклой оболочки называются вершинно расположенными [15]. Их особенностью является то, что вершинно расположенными будут произвольные из подмножества.

Итак, для Q_n (1) приобретает форму:

$$Q_n = (B_n, E), |Q_n| = |B_n| = N, \|Q_n\| = |E| = M. \quad (10)$$

Известно также [3], что

$$N = 2^n, M = n2^{n-1}, \quad (11)$$

$$l = \frac{M}{2^n - 1}. \quad (12)$$

Q_n – n -регулярный, при этом смежные к $x \in B_n$ вершины (далее множество $N(x)$) находятся заменой одной нулевой координаты на единицу ли-

бо единичной – на ноль. В терминах расстояния Хэмминга (the Hamming distance) [4]:

$$Hd_{xy} = \sum_{i=1}^n |x_i - y_i|, \quad (13)$$

$N(x)$ представимо в виде:

$$N(x) = \{y \in B_n : Hd_{xy} = 1\}, \quad (14)$$

$d = |N(x)| = n - \text{степень регулярности графа.}$ (15)

Диаметр Q_n сравнительно большой:

$$\text{diam } Q_n = n. \quad (16)$$

Дополним Q_n некоторым количеством ребер и обозначим новый граф Q'_n , т.е. выбрав $H' = Q'_n$, $\Delta H = \Delta Q_n = Q'_n - Q_n$. (2),(3) переписываются соответственно: дополненный граф Q'_n n-куба и дополнение ΔQ_n к нему

$$Q'_n = (B_n, E') - (|Q'_n| = N, \|Q'_n\| = |E'| = M'); \quad (17)$$

$$\Delta Q_n = (B_n, \Delta E) = Q'_n - Q_n \quad (18)$$

$$(|\Delta Q_n| = N, \|\Delta Q_n\| = M' - M = \Delta M).$$

Граф дополнения ΔH представляет собой семейство несвязанных остовных графов срезов гиперкуба PB_n параллельными гиперплоскостями, соответствующими следующему разложению B_n :

$$\Pi_k = \left\{ x \in R^n : \sum_{i=1}^n x_i = k \right\}, k \in J_n^0 = J_n \cup \{0\}. \quad (19)$$

Обозначим

$$B_n(k) = B_n \cap \Pi_k, PB_n(k) = \text{conv } B_n(k), k \in J_n^0. \quad (20)$$

Согласно замечанию 1, $B_n(k)$ – вершинно расположено как подмножество B_n , т.е. $B_n(k) = \text{vert } PB_n(k)$.

Рассмотрим остовный граф многогранника $PB_n(k)$, который назовем графом k-го среза гиперкуба и обозначим $Q_n(k)$. Множество его вершин совпадает с $B_n(k)$, т.е.

$$Q_n(k) = (B_n(k), E_k), k \in J_n^0. \quad (21)$$

В объединении изолированные графы $\{Q_n(k)\}_k$ дают граф дополнения (18):

$$\Delta H = \bigcup_{k=0}^n Q_n(k). \quad (22)$$

При этом вершины (21) в целом дают B_n ($\bigcup_{k=0}^n B_n(k) = B_n = V$),

$$\Delta M = \sum_{k=0}^n \|Q_n(k)\|. \quad (23)$$

5.1. Свойства графов $Q_n(k), \Delta Q_n, Q'_n$

Сформулируем свойства графа Q'_n , аналогичные перечисленным выше для Q_n . Начнем со свойств его подграфа $Q_n(k)$.

Свойства графа $Q_n(k)$

Ряд свойств $Q_n(k)$ вытекает и того факта, что $B_n(k)$ представляет собой общее множество n-перестановок [13] из мультимножества, в котором два элемента различны. А именно, k единиц, остальные – нули, т.е. $B_n(k) = E_{n2}(G), G = \{0^{n-k}, 1^k\}$. Соответственно, $PB_n(k)$ – многогранник общих перестановок [13] из G ($PB_n(k) = P_{n2}(G)$).

1. Порядок графа $Q_n(k)$:

$$|Q_n(k)| = |B_n(k)| = \binom{n}{k}. \quad (24)$$

2. **Регулярность $Q_n(k)$.** Граф $Q_n(k)$ – d_k -регулярный со степенью регулярности:

$$d_k = k \cdot (n - k). \quad (25)$$

3. **Размер $Q_n(k)$** определяется из (24),(25):

$$\|Q_n(k)\| = \frac{1}{2} d_k \cdot |Q_n(k)| = \binom{n}{2} \cdot \binom{n-2}{k-1}. \quad (26)$$

Из (26), в частности, следует, что

$$\|Q_n(0)\| = \|Q_n(n)\| \Rightarrow E_0 = E_n = \emptyset. \quad (27)$$

4. **Критерий смежности вершин.** $\forall x \in B_n(k)$ множество $N_k(x)$ смежных вершин в графе $Q_n(k)$ образуется из x при помощи $0 \leftrightarrow 1$ транспозиции. В терминах (13) это представимо так:

$$N_k(x) = \{y \in B_n(k) : Hd_{xy} = 2\}. \quad (28)$$

Свойства графа ΔQ_n

1. **Порядок ΔQ_n .** Исходя из (11),(18),

$$|\Delta Q_n| = 2^n.$$

2. **Размер ΔQ_n .** В силу (22),(27), множество его ребер

$$\Delta E = \bigcup_{k=0}^n E_k = \bigcup_{k=1}^{n-1} E_k, \quad (29)$$

а, согласно (23),(26),(29),

$$\begin{aligned} \Delta M &= \|\Delta Q_n\| = \sum_{k=1}^{n-1} \|Q_n(k)\| = \binom{n}{2} \cdot \sum_{k=1}^{n-1} \binom{n-2}{k-1} = \\ &= \binom{n}{2} \cdot \sum_{k'=0}^{n-2} \binom{n-2}{k'} = n(n-1) \cdot 2^{n-3}. \end{aligned} \quad (30)$$

3. Критерий смежности вершин. Множество $\Delta N(x)$ смежных к $x \in B_n$ вершин в графе ΔQ_n образуется, как и в $Q_n(k)$, единственной $0 \leftrightarrow 1$ транспозицией.

Для представления этого критерия в форме (28) введем обозначение для номера среза гиперкуба для точки $x \in B_n$:

$$k(x) \in J_n^0 : x \in B_n(k(x)), \text{ иначе } k(x) = \sum_{i=1}^n x_i. \quad (31)$$

$$\text{Отсюда } \Delta N(x) = \{y \in B_n(k(x)) : Hd_{xy} = 2\}. \quad (32)$$

4. Регулярность. Число смежных вершин к $x \in B_n$ определяется из (25):

$$|\Delta N(x)| = d_{k(x)} = k(x) \cdot (n - k(x)). \quad (33)$$

Отсюда видно, что граф ΔN – нерегулярный при $n \geq 2$, при этом степень вершин варьируется от 0 для изолированных вершин $0, 1 \in R^n$ до $|\Delta N(x)| \leq \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor \cdot \left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil \leq 0.25n^2$ для крайних и центральных срезов.

Свойства графа Q_n'

1. Порядок графа Q_n' . Исходя из (11), (18),

$$|Q_n'| = 2^n. \quad (34)$$

2. Размер графа Q_n' определяем из (11),(30):

$$\|Q_n'\| = M' = M + \Delta M = n \cdot 2^{n-1} + n(n-1) \cdot 2^{n-3} = 2^{n-3} \cdot n(n-1+2^2) = n(n+3) \cdot 2^{n-3}. \quad (35)$$

3. Критерий смежности вершин. $\forall x \in B_n$ множество $N'(x)$ смежных вершин в графе Q_n' объединяет смежные вершины гиперкуба и графа перестановок $Q_n(k(x))$ (см. (14),(32)):

$$N'(x) = N(x) + \Delta N(x). \quad (36)$$

В форме (14) множество (36) представимо:

$$N'(x) = \{y \in B_n : Hd_{xy} \leq 2, |k(y) - k(x)| \leq 1\}, \quad (37)$$

4. Регулярность. Из (15),(33),(36) следует, что Q_n' – нерегулярный при $n > 2$. Степень $d'_{k(x)}$ вершины x зависит от номера среза $k(x)$:

$$d'_{k(x)} = n + k(x) \cdot (n - k(x)),$$

и изменяется в пределах $[n, d'^{\max}]$,

$$d'^{\max} = d^{\max} + n \leq 0.25n^2 + n. \quad (38)$$

5.2. Кратчайшие пути, ASP, диаметр графа Q_n'

Для определения параметра (9) осталось определить ASP l' в графе Q_n' . Мы определим кратчай-

шие пути Q_n' , перейдя далее к его усреднению в l' .

Введем обозначение для множества идентичных позиций $x, y \in B_n$ и их количества:

$$I_{xy} = \{i : x_i = y_i\}, |I_{xy}| = M_{xy}. \quad (39)$$

Поскольку I_{xy} – число совпадающих позиций x и y , а Hd_{xy} – различных, то справедливо:

$$M_{xy} = n - Hd_{xy}. \quad (40)$$

Пусть

$$I_{xy}^a = \{i \notin I_{xy} : x_i = a\}, |I_{xy}^a| = m_{xy}^a, \quad (41)$$

тогда, например, m_{xy}^0 – число нулевых позиций x , отличных от y .

Рассмотрим два произвольных узла $x, y \in B_n$. Построим кратчайший путь (the shortest path) $path(x, y)$ между ними и обозначим его длину (the shortest path length, SPL) в Q_n, Q_n' – l_{xy}, l'_{xy} соответственно. Упорядочим x, y так, чтобы

$$k(x) \leq k(y), \quad (42)$$

$$\delta = k(y) - k(x) \quad (43)$$

разница между номерами срезов точек y и x .

Алгоритм построения $path(x, y)$.

Этап 1. Стартуем с x . На первом этапе преодолеваем δ срезов по ребрам E гиперкуба. Для этого первые δ нулевых позиций x из множества $J_n \setminus I_{xy}$ заменяем единичными, обозначив полученную точку z . Для этой новой точки характерно:

$$M_z = M_y, I_z^0 = I_x^0 \Rightarrow m_{zx}^0 = m_{xz}^0, Hd_{xz} = Hd_{xy} - \delta,$$

$$m_{zx}^0 = m_{zx}^1 = \frac{Hd_{xz}}{2}.$$

Этап 2. Осуществим m_{xy}^0 последовательных $0-1$ -транспозиций между I_z^0 и I_y^1 , что соответствует движению по ребрам ΔE . Поскольку $I_z^0 = I_y^1, I_z^1 = I_y^0$, в результате будет получена y .

$$l'_{xy} = \delta + m_{xy}^1. \quad (44)$$

Упростим (44): с одной стороны, по (40), (39),

$$m_{xy}^0 = n - M_{xy} - m_{xy}^1 = Hd_{xy} - m_{xy}^1. \quad (45)$$

С другой стороны, согласно (43) и учитывая, что $I_x^0 = I_y^1, I_x^1 = I_y^0$, а значит

$$m_{xy}^0 = m_{yx}^1, m_{xy}^1 = m_{yx}^0, \quad (46)$$

в силу (43),(45), имеем

$$\begin{aligned} \delta &= k(y) - k(x) = (M_{xy} + m_y^1) - (M_{xy} + m_x^1) = \\ &= m_{yx}^1 - m_{xy}^1 = m_{xy}^0 - m_{xy}^1 = \\ &= (Hd_{xy} - m_{xy}^1) - m_{xy}^1 = Hd_{xy} - 2m_{xy}^1. \end{aligned} \quad (47)$$

Подставляем (47) в (44) и получаем:

$$l'_{xy} = Hd_{xy} - m^1_{xy}. \quad (48)$$

Формула (48), с учетом (46), может быть переписана и в следующей форме:

$$l'_{xy} = Hd_{xy} - m^0_{yx}. \quad (49)$$

(48), (49) также могут быть переписаны в виде:

$$l'_{xy} = Hd_{xy} - \min(m^0_{xy}, m^1_{xy}) = Hd_{xy} - \min(m^0_{yx}, m^1_{yx}). \quad (50)$$

Чтобы обосновать (50) достаточно показать, что $\min(m^0_{xy}, m^1_{xy}) = m^1_{xy}$ или $m^1_{xy} \leq m^0_{xy}$.

Предположим, что последнее неравенство не выполнено, т.е.

$$m^1_{xy} > m^0_{xy}, \quad (51)$$

следовательно $m^1_{xy} > m^1_{yx}$ или $M_{xy} + m^1_{xy} > M_{yx} + m^1_{yx}$. Поскольку M_{xy} (см. (39)) соответствует числу общих единичных позиций x, y , имеем:

$$\sum_{i=1}^n x_i = k(x) > k(y) = \sum_{i=1}^n y_i. \quad (52)$$

(52) противоречит (42), т.е. предположение (51) неверно. Таким образом, (50) доказано.

(50) свидетельствует о том, что при фиксированном Hd_{xy} SPL между x, y тем больше, чем ближе x к $\mathbf{0}$ или y к $\mathbf{1}$; тем меньше, чем ближе x и y к центральному срезу $m^1_{xy} = \lceil 0.5n \rceil$, на котором $l'_{xy} \approx Hd_{xy} - 0.5n$.

Оценка ASP в Q'_n . Перейдем к оценке l' , для чего берем математическое ожидание (48):

$$l' = E(l'_{xy})_{x,y \in B_n} = E(Hd_{xy})_{x,y \in B_n} - E(m^1_{xy})_{x \in B_n}. \quad (53)$$

Заметим, что в Q_n кратчайший путь между x, y строится заменой отличных позиций в x на их дополнение до единицы. Т.о. SPL равна числу несовпадающих позиций или расстоянию Хэмминга между x, y : $l_{xy} = Hd_{xy}$, а его математическое ожидание $l = E(l_{xy})_{x,y \in B_n} = E(Hd_{xy})_{x,y \in B_n}$. Как видно, первое слагаемое в (53) совпадает с ASP в Q_n и (53) переписывается в виде $l' = l - E(\min(m^1_{xy}, m^0_{xy}))_{x,y \in B_n}$, и подставим (12):

$$l' = \frac{M}{2^n - 1} - E(\min(m^1_{xy}, m^0_{xy}))_{x,y \in B_n}. \quad (54)$$

2. Практическая часть

На рис. 1 показан графы Q'_3, Q'_4 с метками вершин. На рис.2 изображены графы Q'_5 и Q'_6 (Gerhi), размер вершин которых пропорционален их степени. Видно, что степень вершины увеличивает-

ся при приближении к центральному в $[0.5n]$ -срезу, но не слишком существенно.

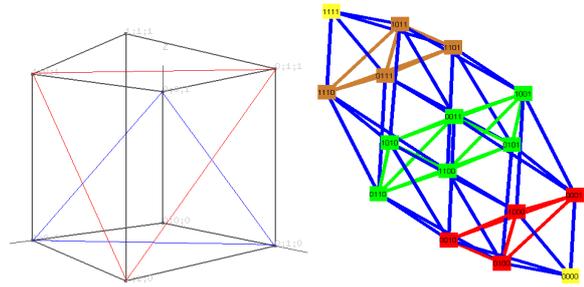


Рис. 1. Графы Q'_3 (слева), Q'_4 (справа)

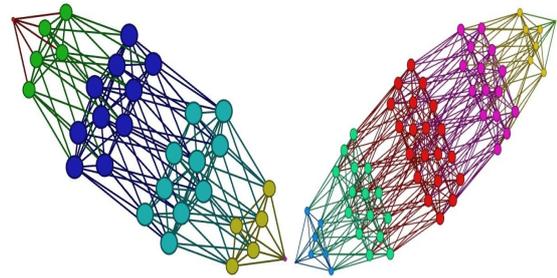


Рис. 2. Графы Q'_5 (слева), Q'_6 (справа)

В табл. 1 показаны основные характеристики Q_n, Q'_n ($n = \overline{2,6}$), а также величины d^{\max} (см. (38)).

Таблица 1

Характеристики Q_n, Q'_n ($n = \overline{2,6}$)

n	2	3	4	5	6
N	4	8	16	32	64
M	4	12	32	80	192
M'	5	18	56	160	432
l	1.33	1.71	2.13	2.58	3.05
l'	1.17	1.39	1.65	1.93	2.21
a ²	5	17.17	47.7	120	284
d ^{max}	3	5	8	11	15

Как видно, для небольших кластеров, насчитывающих десятки компьютеров, грубая оценка при помощи a^2 показывает целесообразность модификации на базе топологии Q'_n . К тому же $d^{\max} \leq 15$, т.е. для формирования такой топологии передачи данных достаточно возможностей аппаратной коммутации современных компьютеров.

На рис. 3 показаны графики ASP для Q_n, Q'_n , $n = \overline{2,6}$, откуда видно, что достаточно быстро $\frac{1}{l'} \rightarrow \frac{1}{2}$. Если гипотеза о данной асимптотической

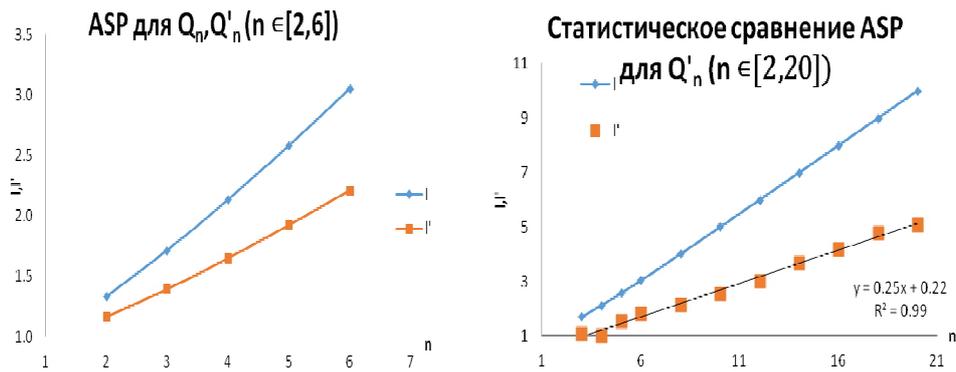


Рис. 3. Сравнение l, l' (слева), l, \bar{l}' (справа)

зависимости верна, для a^2 имеет место (см. (9)):

$$a^2 \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \frac{\Delta M - M}{N} = \frac{n(n-3)2^{n-3} - n2^{n-1}}{2^n} = \frac{n(n-5)}{8}.$$

Проверим эту гипотезу экспериментально для n ($n \leq 20$). С этой целью для фиксированного n сгенерируем $l=100$ пар булевых векторов $\{x^{ln}, y^{ln}\}_{l \in J_{100}} \subset R^n$, а расстояния $\{l_{x^{ln}, y^{ln}}\}_{l \in J_{100}}$ между ними усредним в выборочном среднем ASP $l' \approx \bar{l}' = \frac{1}{100} \sum_{l=1}^{100} l_{x^{ln}, y^{ln}}$. На рис. 3 видно, что гипотеза подтверждается.

Оценка a^2 порогового значения показателя (4) далее может быть существенно улучшена за счет подстановки параметров t_{indep}, t_{dep} конкретной сети в (8) и определения точного порогового значения a^1 . В том случае, если все же модификация на основе дополненного гиперкуба Q'_n нецелесообразна, при этом задача увеличения эффективности системы за счет незначительного удорожания остается актуальной, можно предложить два пути:

- 1) сокращение стоимости прокладки дополнительных соединений;
- 2) рассмотрение других модификаций топологии гиперкуба за счет добавления новых связей.

В первом случае может быть решена дополнительная задача оптимального размещения компьютеров и соединения их в срезы с целью минимизации длины соединений. Еще один способ – организация части соединений на аппаратном уровне и сокращение, тем самым, общей стоимости дополнительных физических соединений.

Заключение

В данной статье предлагается методология оценки эффективности модификации существующей сети за счет дополнительных соединений. В отличие от традиционных подходов, в которых от-

дельно анализируются показатели стоимости компьютерной сети и показатели быстродействия, мы предлагаем интегрированный показатель оценки цена/быстродействие. Он представляет собой пороговое значение соотношения a стоимости узла и соединения, вычисляемом на основании временных показателей конкретной сети и средней длины маршрута в исходной и модифицированной сетях. В качестве основы для модификации выбрана популярная гиперкуб-топология, а именно, использованы геометрические свойства многогранника гиперкуба образовывать в срезах многогранники 0-1-перестановок. Дополненный граф гиперкуба Q'_n объединил в себе геометрические графы гиперкуба и 0-1-перестановок, что позволило найти необходимые характеристики для определения порогового значения a , установить порядок маршрутизации и обосновать заведомую целесообразность модификации в топологию Q'_n для сетей, насчитывающих не более 64-ти компьютеров.

Следует отметить, что обычной практикой является использование диаметра графа при сравнении топологий. На примере графа Q'_n , диаметр которого не уменьшается по сравнению с Q_n ($\text{diam } Q'_n = \text{diam } Q_n$), при этом средняя длина маршрута значительно меньше ($\bar{l}' < \bar{l}$) показано, что использование средней длины кратчайшего маршрута или ее статистической оценки предпочтительнее.

На наш взгляд, представляет интерес, как с теоретической, так и с практической точек зрения, дальнейшее исследование свойств графа Q'_n и других модификаций гиперкуба, например геометрического графа 0-1 размещений с возможными ограничениями на кратности нулей и единиц. Так, например, представляется, что компьютерные системы с указанными топологиями, будут надежными за счет множества путей минимальной длины между произвольными узлами. Изучение условий

безотказной работы таких систем - перспективное направление исследования [2, 7-9].

Отдельный теоретический интерес представляют полученные новые свойства графа 0-1-перестановок $Q_n(k)$, который тоже может быть использован в качестве топологии компьютерных систем. Преимуществом $Q_n(k)$ является малый диаметр, простота маршрутизации, хорошая масштабируемость. В самом деле, если для увеличения гиперкуб-системы требуется увеличение числа узлов минимум вдвое, для $Q_n(k)$ можно подобрать конфигурацию n, k при заданном $|Q_n(k)|$ в значительно большем числе случаев. Мы рекомендуем применять $Q_n(k)$ -топологию для растущих компьютерных систем, в которых перекоммутация осуществляется легко, при этом стоит задача максимального использования вводимых компьютеров.

Литература

1. Quinn, M. *Parallel Programming in C with MPI and OpenMP* [Text] / M. Quinn. – Dubuque, Iowa: McGraw-Hill Science/Engineering/Math, 2003. – 544 p.
2. Tripathy, C. R. *On a New Multicomputer Interconnection Topology for Massively Parallel Systems* [Text] / C. R. Tripathy, N. Adhikari // *International Journal of Distributed and Parallel Systems*. – 2011. – No. 4. – P. 162-180.
3. Harary, F. *A survey of the theory of hypercube graphs* [Text] / F. Harary, J. P. Hayes, H.-J. Wu // *Computers & Mathematics with Applications*. – 1988. – Vol. 15, No. 4. – P. 277-289.
4. Klavžara, S. *Graphs which locally mirror the hypercube structure* [Text] / S. Klavžara, J. Koolenb, H. M. Mulderc // *Information Processing Letters*. – 1999. – Vol. 71, No. 2. – P. 87-90.
5. Tzeng, N.-F. *Traffic Analysis and Simulation Performance of Incomplete Hypercubes* [Text] / N.-F. Tzeng, H. Kumar // *IEEE Transactions on Parallel and Distributed Systems*. – 1996. – Vol. 7, No. 7. – P. 740-754.
6. Bhuyan, L. N. *Generalized Hypercube and Hyperbus Structures for a Computer Network*. *Computers* [Text] / L. N. Bhuyan, D.P. Agrawal [Text] // *IEEE Transactions on Computers*. – 1984. – Vol. C-33, No. 4. – P. 323-333.
7. Duh, D.-R. *A fast pessimistic diagnosis algorithm for generalized hypercube multicomputer systems* [Text] / D.-R. Duh, C.-H. Chen, K.-N. Chang // *Journal of Supercomputing*. – 2012. – Vol. 61, No. 3. – P. 605-618.
8. Barpanda, N. K. *Network Reliability Evaluation of Fault Tolerant Varietal Hypercube Network* [Text] / N. K. Barpanda, S. Jena, R. K. Dash // *International Journal of Advanced Research in Computer Science*. – 2014. – Vol. 5, No. 4. – P. 132-135.

9. Karavay, M. *An extended generalized hypercube as a fault-tolerant system area network for multiprocessor systems* [Text] / M. Karavay, V. Podlazov // *Automation & Remote Control*. – 2015. – Vol. 76, No. 2 – P. 336-352.

10. Kiasari, A. E. *An accurate mathematical performance model of adaptive routing in the star graph* [Text] / A. E. Kiasari, H. Sarbazi-Azad, M. Ould-Khaoua // *Future Generation Computer Systems*. – 2008. – Vol. 24, No. 6. – P. 461-474.

11. Емеличев, В. А. *Многогранники, графы, оптимизация (комбинаторная теория многогранников)* [Текст] / В. А. Емеличев, М. М. Ковалев, М. К. Кравцов. – М. : Наука. Главная редакция физико-математической литературы, 1981. – 344 с.

12. Donec, G. A. *Construction of Hamiltonian paths in graphs of permutation polyhedra* [Text] / G. A. Donec, L. M. Kolechkina // *Cybernet. Systems Anal.* – 2010. – Vol. 46, No. 1. – P. 7-13.

13. Стоян, Ю. Г. *Теорія і методи евклідової комбінаторної оптимізації* [Текст] / Ю. Г. Стоян, О. О. Ємець. – К. : Ін-т системн. дослідж. освіти, 1993. – 188 с.

14. Beineke, L. W. *Topics in Algebraic Graph Theory* [Text] / L. W. Beineke, R. J. Wilson, P. J. Cameron, Eds. – New York : Cambridge University Press, 2004. – 294 p.

15. Стоян, Ю. Г. *Математические модели и оптимизационные методы геометрического проектирования* [Текст] / Ю. Г. Стоян, С. В. Яковлев. – К. : Наук. Думка, 1986. – 268 с.

References

1. Quinn, M. *Parallel Programming in C with MPI and OpenMP*. Dubuque, Iowa, McGraw-Hill Science/Engineering/Math. Publ., 2003. 544 p.
2. Tripathy, C. R., Adhikari, N. *On a New Multicomputer Interconnection Topology for Massively Parallel Systems*. *International Journal of Distributed and Parallel Systems*, 2011, no. 4, pp. 162-180.
3. Harary, F., Hayes, J. P., Wu, H.-J. *A survey of the theory of hypercube graphs*. *Computers & Mathematics with Applications*, 1988, vol. 15, no. 4, pp. 277-289.
4. Klavžara, S., Koolenb, J., Mulderc, H. M. *Graphs which locally mirror the hypercube structure*. *Information Processing Letters*, 1999, vol. 71, no. 2, pp. 87-90.
5. Tzeng, N.-F., Kumar, H. *Traffic analysis and simulation performance of incomplete hypercubes*. *IEEE Transactions on Parallel and Distributed Systems*, 1996, vol. 7, no. 7, pp. 740-754.
6. Bhuyan, L.N., Agrawal, D.P. *Generalized Hypercube and Hyperbus Structures for a Computer Network*. *IEEE Transactions on Computers*, 1984, vol. C-33, no. 4, pp. 323-333.
7. Duh, D.-R., Chen, C.-H., Chang, K.-N. *A fast pessimistic diagnosis algorithm for generalized hypercube multicomputer systems*. *Journal of Supercomputing*

ting, 2012, vol. 61, no. 3, pp. 605–618. doi: 10.1007/s11227-011-0620-6

8. Barpanda, N. K., Dash, R. K., Jena, S., Network Reliability Evaluation of Fault Tolerant Varietal Hypercube Network. *International Journal of Advanced Research in Computer Science*, 2014, vol. 5, no. 4, pp. 132-135.

9. Karavay, M., Podlazov, V. An extended generalized hypercube as a fault-tolerant system area network for multiprocessor systems. *Automation & Remote Control*, 2015, vol. 76, no. 2, pp. 336–352. doi: 10.1134/S0005117915020137

10. Kiasari, E., Sarbazi-Azad, H., Ould-Khaoua, M. An accurate mathematical performance model of adaptive routing in the star graph. *Future Generation Computer Systems*, 2008, vol. 24, no. 6, pp. 461–474. doi: 10.1016/j.future.2007.06.010

11. Emelichev, V. A., Kovalev, M. M., Kravtsov M. K. *Mnogogranniki, grafy, optimizatsiya (kombinatornaya teoriya mnogogrannikov)* [Polytopes, graphs

and optimisation (Combinatorial theory of polytopes). Moscow, Nauka, Glavnaya redaktsiya fiziko-matematicheskoy literatury Publ., 1981. 344 p.

12. Donec, G. A., Kolechkina, L. M. Construction of Hamiltonian paths in graphs of permutation polyhedra. *Cybernet. Systems Anal.*, 2010, vol. 46, no. 1, pp. 7–13. doi:10.1007/s10559-010-9178-1

13. Stoyan, Yu. H., Yemets', O. O. *Teoriya i metody evklidovoyi kombinatornoyi optimizatsiyi* [Theory and methods of Euclidean combinatorial optimization]. Kyiv, In-t systemn. doslidzh. osvity Publ., 1993. 188 p.

14. Beineke, L. W., Wilson, R. J., Cameron, P. J. *Topics in Algebraic Graph Theory*. New York, Cambridge University Press Publ., 2004. 294 p.

15. Stoyan, Yu. G., Yakovlev, S. V. *Matematicheskie modeli i optimizatsionnye metody geometricheskogo proektirovaniya* [Mathematical models and optimization methods in Geometric Design] Kiev: Naukova Dumka Publ., 1986. 268 p.

Поступила в редакцію 21.03.2016, рассмотрена на редколлегии 14.04.2016

ОДНЕ УЗАГАЛЬНЕННЯ ГІПЕРКУБ-ТОПОЛОГІЇ МЕРЕЖІ ПЕРЕДАЧІ ДАНИХ

О. С. Пічугіна

Пропонується узагальнення популярної гіперкуб-топології мережі передачі даних, що полягає в доповненні відповідного графа n -куба Q_n ребрами зрізів гіперкуба паралельними площинами. Досліджено властивості доповненого графа гіперкуба Q'_n , зокрема, обґрунтовано суттєве скорочення середньої довжини найкоротшого шляху порівняно з Q_n . Запропоновано модель оцінки ефективності модифікації мультикомп'ютерної системи за рахунок нових комунікаційних з'єднань. Обґрунтовано доцільність побудови кластерів, що мають Q'_n -топологію, з гіперкуб-кластерів.

Ключові слова: розподілені обчислення, мультикомп'ютер, кластер, гіперкуб, граф, діаметр.

A GENERALIZATION OF THE HYPERCUBE TOPOLOGY OF A DATA TRANSMISSION NETWORK

O. S. Pichugina

A generalization of the popular hypercube-topology of data transmission network, consisting in complementing the corresponding n -cube graph Q_n by edges of the hypercube cuts by parallel hyperplanes, is presented. Properties of the complemented hypercube graph Q'_n are studied, in particular, noticeable reducing the average shortest path length against Q_n is justified. A model of effectiveness assessment of modifications of a multicomputer system by new communication links is presented. The expediency of designing clusters with Q'_n -topologies from hypercube clusters is demonstrated.

Key words: distributed computing, a multicomputer cluster, a hypercube, a graph, a diameter.

Пічугіна Оксана Сергеевна – канд. физ.-мат. наук, докторант кафедры прикладной математики, Харьковский национальный университет радиоэлектроники, Харьков, Украина, e-mail: pichugina_os@mail.ru.

Pichugina Oksana Sergeevna - Candidate of Physical and Mathematical Science, Doctoral Student of The Department of Applied Mathematics, Kharkiv National University of Radio Electronics, Kharkov, Ukraine, e-mail: pichugina_os@mail.ru.