УДК 658.51.012

Л. Г. РАСКИН, О. М. ПИГНАСТЫЙ

Национальный Технический Университет "ХПИ", Украина

МЕТОД РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ КОНТИНУАЛЬНОГО ЛИНЕЙНОГО ПРОГРАММИРОВАНИЯ С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ ОРТОГОНАЛЬНЫХ СИСТЕМ ФУНКЦИЙ

В статье излагается метод решения задачи континуального линейного программирования. Цель работы заключается в разработке точных методов решения задачи в классе полиномов Лежандра. Продемонстрирован алгоритм построения точного решения задачи. Основываясь на свойствах полиномов Лежандра, получено точное решение задачи континуального линейного программирования, в котором подынтегральные выражения функционала и ограничений представлены степенными функциями. Аналитически доказано, что полученное решение является линейной комбинацией дельта функций. Показано, что оптимизационная задача отыскания параметров искомой план-функции содержит вдвое меньше переменных, чем в каноническом методе. Сформулированы рекомендации по построению оптимизационного алгоритма. Существует возможность обобщения предложенной технологии решения задачи в направлении использования других систем ортогональных многочленов.

Ключевые слова: *континуальное линейное программирование, полиномы Лежандра, дельта-функции.*

Введение

Многочисленные задачи в технике, экономике, экологии и т.д. приводят к однотипной математической модели: найти функцию $X(R)$, максимизирующую функционал:

$$\int_{R_1}^{R_2} C(R)X(R)dR, \qquad R \in [R_1, R_2] \tag{1}$$

и удовлетворяющую ограничения

$$\int_{R_1}^{R_2} A_i(R)X(R)dR = B_i, \quad i = 1,2,...,m, \tag{2}$$

$$X(t) \geq 0. \tag{3}$$

Одна из простейших реальных задач, приводящих к модели (1)-(3), формулируется следующим образом. На вход радиолокационного устройства линейной системы с известной амплитудно-частотной характеристикой $A(f)$ подается сигнал, спектральная плотность мощности которого описывается функцией $S(f)$. Суммарная мощность сигнала ограничена величиной S_0. Ставится задача синтеза входного сигнала $S(f)$ такого, чтобы его мощность на выходе системы была максимальной. Формальная модель задачи: найти функцию $S^*(f)$, максимизирующую

$$M(S(f)) = \int_0^\infty A(f)S(f)df,$$

и удовлетворяющую ограничениям

$$\int_0^\infty S(f)df = S_0, \; S(f) \geq 0, \; f \in [0, \infty).$$

Задачи вида (1)-(3) по форме соответствуют изопараметрической задаче вариационного исчисления. Однако в силу линейности оптимизируемого функционала (1) они не могут быть решены методами классического вариационного исчисления, что привело к разработке специальных методов ее решения. В частности, в [1], [2] решение задачи синтеза сигнала с единственным ограничением получено с использованием численных методов. Для решения общей задачи (1)-(3) в [3] предложен аналитический метод континуального линейного программирования. При этом показано, что точное решение задачи нужно искать в классе линейных комбинаций δ-функций, то есть

$$X(R) = \sum_{i=1}^{m} x^*{}_i \delta(t - t_k). \tag{4}$$

Метод обеспечивает точное решение задачи с использованием итерационной процедуры, включающей построение опорного плана, проверку его оптимальности и, если она не достигнута, переход к новому опорному плану, лучшему, чем предыдущий. В [3] показано, что скорость сходимости итерационной процедуры существенно зависит от выбора начального опорного плана и при решении конкретных задач может оказаться медленной. Это обстоятельство делает целесообразным построение альтернативного метода решения задачи (1)-(3).

Цель статьи – развитие технологии решения задачи континуального линейного программирования с использованием систем ортогональных многочленов.

1. Постановка задачи континуального линейного программирования (КЛП) в классе полиномов Лежандра

Введем переменную t [3, с.24]:

$$t=\frac{2R-R_2-R_1}{R_2-R_1},\quad R=\frac{t(R_2-R_1)+R_2+R_1}{2},$$

с учетом которой приведем задачу КЛП (1)-(3) к следующему виду:

$$\int_{R_1}^{R_2} C(R)X(R)dR = \frac{(R_2-R_1)}{2}\int_{-1}^{1} C\left(\frac{t(R_2-R_1)+R_2+R_1}{2}\right) * X\left(\frac{t(R_2-R_1)+R_2+R_1}{2}\right)dt, \quad (5)$$

$$\int_{R_1}^{R_2} A_i(R)X(R)dR = \frac{(R_2-R_1)}{2}\int_{-1}^{1} A_i\left(\frac{t(R_2-R_1)+R_2+R_1}{2}\right) * X\left(\frac{t(R_2-R_1)+R_2+R_1}{2}\right)dt, \quad (6)$$

$$X\left(\frac{t(R_2-R_1)+R_2+R_1}{2}\right)>0. \quad (7)$$

Введем $c(t)$ $a_i(t)$, $x(t)$:

$$c(t)=\frac{(R_2-R_1)}{2}\cdot C\left(\frac{t(R_2-R_1)+R_2+R_1}{2}\right), \quad (8)$$

$$a_i(t)=\frac{(R_2-R_1)}{2}\cdot A_i\left(\frac{t(R_2-R_1)+R_2+R_1}{2}\right), \quad (9)$$

$$x(t)=X\left(\frac{t(R_2-R_1)+R_2+R_1}{2}\right)\geq 0 \quad (10)$$

и представим задачу КЛП (1)-(3) в каноническом виде:

$$\int_{-1}^{1} c(t)x(t)dt \quad (11)$$

$$\int_{-1}^{1} a_i(t)x(t)dt=b_i,\quad i=1,2,..,m, \quad (12)$$

$$x(t)\geq 0, \quad (13)$$

где $c(t)$, $a_i(t)$ в силу интегрируемости $C(R)$, $A_i(R)$ на интервале $R\in[R_1,R_2]$ являются интегрируемыми функциями на интервале $t\in[-1,1]$.

2. Решение задачи КЛП в классе полиномов Лежандра

Решение $x(t)$ задачи КЛП представим на интервале $t\in[-1,1]$ в виде разложения по полиномам Лежандра $P_n(t)$ (рис. 1) [4, с.64–74]:

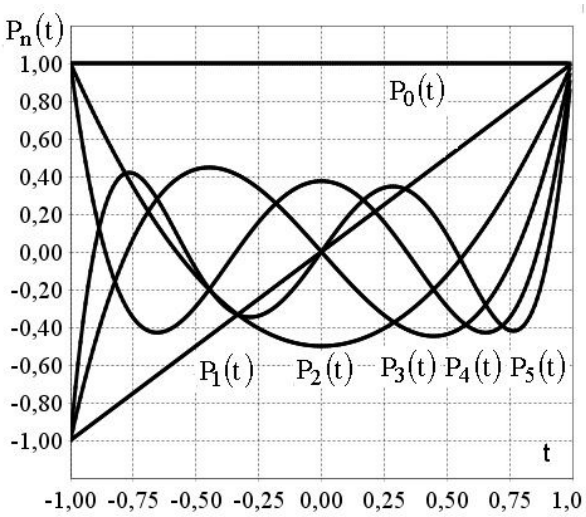

Рис. 1. Полиномы Лежандра $P_n(t)$, n=0,1,2,3,4,5

$$x(t)=\sum_{n=0}^{\infty}\gamma_n P_n(t),\quad \gamma_n=\frac{2n+1}{2}\int_{-1}^{1}x(t)P_n(t)dt, \quad (14)$$

$$P_n(t) = \frac{1}{2^n n!} \frac{d^n \left(t^2 - 1\right)^n}{dt^n}. \qquad (15).$$

Представив заданные функции $c(t)$ (8), $a_i(t)$ (9) в виде сходящегося ряда:

$$c(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \sigma_n P_n(t), \sigma_n = \frac{2n+1}{2} \int_{-1}^{1} c(t) P_n(t) dt, \qquad (16)$$

$$a_i(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \alpha_{i,n} P_n(t), \alpha_{i,n} = \frac{2n+1}{2} \int_{-1}^{1} a_i(t) P_n(t) dt, \qquad (17)$$

выполним интегрирование выражений (11)-(13) [4, с. 71]:

$$\int_{-1}^{1} c(t) x(t) dt = \int_{-1}^{1} \sum_{n=0}^{\infty} \sigma_n P_n(t) \sum_{k=0}^{\infty} \gamma_k P_k(t) dt =$$
$$= \sum_{n=0}^{\infty} \sigma_n \gamma_n \int_{-1}^{1} P_n^2(\tau) d\tau = \sum_{n=0}^{\infty} \sigma_n \gamma_n \frac{2}{2n+1}, \qquad (18)$$

$$\int_{-1}^{1} a(t) x(t) dt = \int_{-1}^{1} \sum_{n=0}^{\infty} \alpha_{i,n} P_n(t) \sum_{k=0}^{\infty} \gamma_k P_k(t) dt =$$
$$= \sum_{n=0}^{\infty} \alpha_{i,n} \gamma_n \int_{-1}^{1} P_n^2(\tau) d\tau = \sum_{n=0}^{\infty} \alpha_{i,n} \gamma_n \frac{2}{2n+1}, \qquad (19)$$

получим постановку задачи, состоящую в максимизации функции

$$\sum_{n=0}^{\infty} \sigma_n \gamma_n \frac{2}{2n+1} \to \max, \qquad (20)$$

удовлетворяющую ограничениям

$$\sum_{n=0}^{\infty} \alpha_{i,n} \gamma_n \frac{2}{2n+1} = b_i, i = 1,2,..., m, \qquad (21)$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \gamma_n P_n(t) \geq 0, \quad t \in [-1,1]. \qquad (22)$$

Рассмотрим решение задачи (11)-(13) для случая:

$$C(t) = \begin{cases} 1, & t \in [r_1, r_2], \ r_1 \geq -1, r_2 \leq 1, \\ 0, & t \in [r_1, r_2], \end{cases} \qquad (23)$$

$$a_i(t) = t^i, \quad i = 0,1,2,3,...m, \quad t \in [-1, 1]. \qquad (24)$$

Разложение функций (23), (24) по полиномам Лежандра имеет вид

$$t^i = \sum_{n=0}^{i} \alpha_{i,n} P_n(t), \quad i = 1,2,..., m, \qquad (25)$$

$$\alpha_{i,n} = \frac{2n+1}{2} \int_{-1}^{1} t^i P_n(t) dt. \qquad (26)$$

Решение системы линейных алгебраических уравнений (21) дает набор $(\gamma_0, \gamma_1, .., \gamma_m)$.

Ключевым элементом метода является представление численных значений параметров γ_n, $n = 0,1,..,m$ через значения ортогональных функций, в частности полиномов Лежандра, на системе точек $t_0, t_1, ..., t_m$, принадлежащих интервалу $[-1, 1]$.

Введем набор $(\omega_0, \omega_1, .., \omega_m)$, являющийся решением системы уравнений (19)

$$\gamma_n = \frac{2n+1}{2} \sum_{k=0}^{m} \omega_k P_n(t_k). \qquad (27)$$

В развернутой форме эта система имеет вид:

$$\begin{cases} \omega_0 P_0(t_0) + \omega_1 P_0(t_1) + ... + \omega_m P_0(t_m) = \gamma_0 \cdot 2, \\ \omega_0 P_1(t_0) + \omega_1 P_1(t_1) + ... + \omega_m P_1(t_m) = \gamma_1 \cdot \frac{2}{3}, \\ .... \\ \omega_0 P_m(t_0) + \omega_1 P_m(t_1) + ... + \omega_m P_m(t_m) = \gamma_m \cdot \frac{2}{m+1}. \end{cases} \qquad (28)$$

Решение системы (28) дает аналитическое описание коэффициентов $(\omega_0, \omega_1, .., \omega_m)$ через набор неизвестных переменных $T = \{t_0, t_1, ..., t_m\}$ в виде $(\omega_0(T), \omega_1(T), .., \omega_m(T))$. В матричной форме система (20) имеет вид

$$AW = B, \qquad (29)$$

$$A = \begin{pmatrix} P_0(t_0) & P_0(t_1) & ... & P_0(t_m) \\ P_1(t_0) & P_1(t_1) & ... & P_1(t_m) \\ ... & ... & ... & ... \\ P_m(t_0) & P_m(t_1) & ... & P_m(t_m) \end{pmatrix},$$

$$W = \begin{pmatrix} \omega_0 \\ \omega_1 \\ .... \\ \omega_m \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} \gamma_0 \cdot 2 \\ \gamma_1 \cdot \frac{2}{3} \\ .... \\ \gamma_m \cdot \frac{2}{2m+1} \end{pmatrix}.$$

Решение системы (29) имеет вид

$$W = A^{-1}B, \qquad (30)$$

и может быть записано в скалярной форме с использованием формул Крамера. Теперь, подставив (30) в (14), получим

$$x(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \gamma_k P_k(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{m} \omega_k(T) \frac{2n+1}{2} P_n(t_k) P_n(t) =$$
$$= \sum_{k=0}^{m} \omega_k(T) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2n+1}{2} P_n(t_k) P_n(t). \qquad (31)$$

Так как

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{2n+1}{2} P_n(t_k) P_n(t) == \delta(t - t_k), \qquad (32)$$

то (31) упрощается к виду

$$x(t) = \sum_{k=0}^{m} \omega_k(T) \delta(t - t_k). \qquad (33)$$

Несмотря на внешнее сходство полученного решения (33) с решением (4), они отличаются по существу. В решении (4) число неизвестных величин $(z_0, z_1, .., z_m)$, $(R_0, R_1, .., R_m)$ вдвое меньше числа переменных в решении (33), так как параметры $\omega_k(T)$ $k = 0,1,2,..., m$, с учетом (30) в явной форме, зависят от выбора $\{t_0, t_1, ..., t_m\}$. Кроме того, характер процедур отыскания параметров $(z_0, z_1, .., z_m)$, $(R_0, R_1, .., R_m)$ в решении (4) различен, а процедура отыскания компонентов набора $T = \{t_0, t_1, ..., t_m\}$ в решении (33) однотипна. Эти обстоятельства определяют несомненные достоинства предлагаемого метода решения задачи.

Полученное соотношение (33), определяющее решение задачи, подставляем в (1), задавая, таким образом, явное выражение для критерия оптимизации

$$\sum_{k \in N_0}^{m} \omega_k(T) c(t_k), \quad \omega_k(T) \geq 0, \qquad (34)$$

$$N_0 = \{k : t_k \in [r_1, r_2], \ -1 \leq t_k < t_{k+1} \leq 1, \ k = 0,1,2,...,m-1\}. \qquad (35)$$

Максимизация (34) по набору $T = \{t_0, t_1, ..., t_m\}$ дает решение задачи. Важно отметить, что при этом получена специфическая задача условной оптимизации, в которой любой набор $T = \{t_0, t_1, ..., t_m\}$, получаемый в результате решения задачи максимизации (32), определяет с использованием (35) соответствующий набор $W = (\omega_0(T), \omega_1(T), .., \omega_m(T))$, удовлетворяющий ограничениям (2) по построению, но не обязательно обеспечивающий $\omega_k(T) \geq 0$, $k = 0,1,2,..., m$.

Сформулированная задача математического программирования может быть решена с использованием любого метода с последовательным улучшением плана, например, метода Нелдера-Мида. К сожалению, ограничение (35) затрудняет возможность непосредственного использования более мощных методов оптимизации первого и второго порядка.

3. Пример решения с использованием ортогональной системы функций

Рассмотрим точное решение задачи (1)-(3) для функций $C(R) = 1 - R^2$, $A_0(R) = 1$ [3, с.24]:

$$\int_{-1}^{1} (1 - R^2) X(R) dR, \quad \int_{-1}^{1} X(R) dR = S_0, \quad X(t) \geq 0. \qquad (36)$$

Используя соотношения (8), (9), представим задачу (36) в виде

$$\int_{-1}^{1} c(t) x(t) dt, \ c(t) = 1 - t^2, \ \int_{-1}^{1} a_0(t) x(t) dt = S_0, \ a_0(t) = 1.$$

Функции $c(t)$, $a_0(t)$ разложим в ряд по полиномам Лежандра:

$$c(t) = P_0(t) - \left(\frac{1}{3} P_0(t) + \frac{2}{3} P_2(t)\right) = \frac{2}{3} P_0(t) - \frac{2}{3} P_2(t),$$
$$a_0(t) = P_0(t), \quad t \in [-1,1], \qquad (37)$$

в которых $1 = P_0(t)$, $t^2 = \left(\frac{1}{3} P_0(t) + \frac{2}{3} P_2(t)\right)$. Это позволяет записать задачу (36) следующим образом:

$$\frac{4}{3}\gamma_0 - \frac{4}{15}\gamma_2 \to \max, \ 2\gamma_0 = S_0, \ \sum_{n=0}^{\infty} \gamma_n P_n(t) \geq 0. \qquad (38)$$

Используя (27), запишем

$$\gamma_0 = \frac{\omega_0}{2}, \ \omega_0 = 2\gamma_0 = S_0, \ \gamma_2 = \omega_0 \frac{5}{2} P_2(t_k). \quad (39)$$

Подставим γ_0, γ_2 в (38), определим t_k, при котором выражение принимает максимальное значение:

$$\frac{4}{3}\gamma_0 - \frac{4}{15}\omega_0 \frac{5}{2} P_2(t_n) = \frac{4}{3}\gamma_0 (1 - P_2(t_k)) \to \max. \quad (40)$$

Функция имеет максимальное значение функционала (37), достигается при $P_2(t_k) \to \min$. Откуда следует $P_2(t_k = 0) = -0{,}5$. Таким образом:

$$M = \int_{-1}^{1} c(t)x(t)dt = \frac{4}{3}\gamma_0 - \frac{4}{15}\gamma_2 \to \max = S_0 \quad (41)$$

при

$$x(t) = S_0 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2n+1}{2} P_n(0) P_n(t). \quad (42)$$

На рис. 2 показано поведение значения M функционала (41) в зависимости от количества полиномов в решении $x(t)$ (48) для $S_0 = 1$. Видно, что при $n > 2$ функционал не изменяет своего значения, остается постоянным. Такой результат обусловлен конечным числом полиномов $P_n(t)$ в разложении для $c(t)$ (37). Однако соблюдение неравенства $x(t) \geq 0$ выполняется для $N \to \infty$.

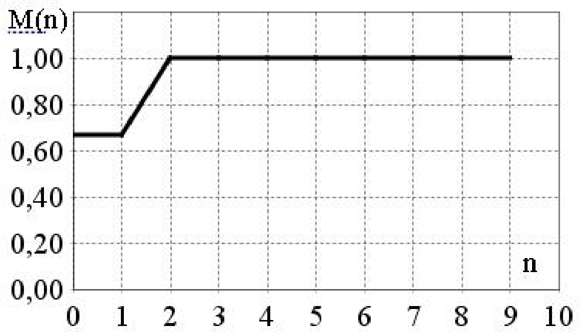

Рис. 2. Значения функционала M (41) от количества полиномов Лежандра $P_n(t)$ в решении $x(t)$

Выводы

1. Предложен точный метод решения задачи КЛП, использующий ортогональную систему полиномов Лежандра.

2. Достоинства метода:

- радикальное снижение (в два раза) числа варьируемых переменных по сравнению с альтернативным методом [3];
- возможность использования для оптимизации простых в реализации методов последовательного улучшения плана;
- конструктивно обеспечиваемое удовлетворение системных ограничений (2) на каждом шаге оптимизации;
- возможность обобщения предложенной технологии решения задачи КЛП в направлении использования других систем ортогональных многочленов.

Литература

1. Lesnik, C. The Numerical Synthesis of a Radar Signal Based on Iterative Method [Text] / C. Lesnik Z. Opilski, T. Pustelny // Acta Physica Polonica. – 2011. – № 4 (120). – С. 693–697.

2. Numerical Analysis of Different Communication Signals [Text] / A. Kabakchiev, V. Kyovtorov, B. Bedzev, C. Kabakchiev, A. Lazarov // Cybernetics and Information Technologies. – 2010. – № 4 (10). – С. 75-90.

3. Раскин, Л. Г. Прикладное линейное континуальное программирование [Текст] / Л. Г. Раскин, И. О. Кириченко, О. В. Серая. – Харьков : Оберіг, 2014. – 292 с.

4. Лебедев, Н. Н. Специальные функции и их приложения [Текст] / Н. Н. Лебедев. – Москва-Ленинград : Физматгиз, 1963. – 360 с.

Поступила в редакцию 11.06.2015, рассмотрена на редколлегии 11.09.2015

МЕТОД ВИРІШЕННЯ ЗАВДАННЯ КОНТИНУАЛЬНОГО ЛІНІЙНОГО ПРОГРАМУВАННЯ З ВИКОРИСТАННЯМ ОРТОГОНАЛЬНИХ СИСТЕМ ФУНКЦІЙ

Л. Г. Раскін, О. М. Пігнастий

У статті описано спосіб вирішення задачі синтезу сигналу на вході лінійної системи за критерієм максимальної вихідної потужності. Метою роботи є розробка точних методів вирішення розглянутої задачі в класі поліномів Лежандра. Грунтуючись на властивостях поліномів Лежандра, отримано точне рішення задачі методами теорії континуального лінійного програмування, в якому підінтегральне вираження функціоналу та обмежень представлено рядами кінцевого ступеня. Аналітично доведено, що отримане рішення є граничним випадком лінійної комбінації дельта функцій. Показано, що оптимізаційна задача відшукання параметрів план-функції містить удвічі менше змінних, ніж у канонічному методі. Дано рекомендації з побудови оптимізаційного алгоритму. Існує можливість узагальнення запропонованої технології вирішення завдання в напрямку використання інших систем ортогональних многочленів.

Ключові слова: континуальне лінійне програмування, поліноми Лежандра, дельта функція, алгоритм, задача синтезу сигналу, лінійна система.

METHOD OF SOLVING PROBLEMS OF THE CONTINUAL LINEAR PROGRAMMING WITH THE USE OF ORTOGONAL SYSTEMS OF FUNCTIONS

L. G. Ruskin, O. M. Pignasty

The article describes the method of solving the problem of the synthesis of the signal at the input of a linear-system by the criterion of maximum output power. The purpose of work is to develop accurate methods of solving the problem in the class of Legendre polynomials. Demonstrated ability to build the exact solution of the problem and the conditions under which the decision is allowed. Based on the properties of Legendre polynomials, an exact solution of the problem of continual linear programming in which the integrands and functional limitations are presented in rows of finite degree. Analytically, it is proved that the solution obtained is a limiting case of the linear combination of delta functions. It is shown that the parameters of the optimization problem of finding the unknown functions plan contains half the variables than in the canonical method. Recommendations are given for the construction of the optimization algorithm. There is a possibility of extending the proposed technology solution in the direction of using other systems of orthogonal polynomials.

Key words: continual linear programming, Legendre polynomials, delta function, signal synthesis problem, linear system.

Раскин Лев Григорьевич – д-р техн. наук, проф., зав. каф. компьютерного мониторинга и логистики, Национальный технический университет «ХПИ», Харьков, Украина.

Пигнастый Олег Михайлович – д-р техн. наук, доцент, доцент кафедры компьютерного мониторинга и логистики, Национальный Технический университет «ХПИ», Харьков, Украина, e-mail: pom7@bk.ru.