

УДК 621.391:004.94

А. А. РОЕНКО

Национальный аэрокосмический университет им. Н. Е. Жуковского «ХАИ», Украина

АНАЛИЗ ТОЧНОСТИ ИЗВЕСТНЫХ ОЦЕНОК ПАРАМЕТРА ФОРМЫ ОБОБЩЕННОГО ГАУССОВА РАСПРЕДЕЛЕНИЯ

Модель случайных процессов на основе обобщенного гауссова распределения достаточно широко используется в области обработки аудио и видеоданных и изображений на протяжении последних десятилетий. В работе рассмотрены существующие процедуры оценивания одного из параметров модели, параметра формы, влияющего на степень тяжести хвостов распределения. Указаны основные свойства и особенности расчета оценки максимального правдоподобия, оценок на основе моментов случайных величин, энтропии и производных от ее параметров, метода глобальной сходимости, а также двух новых недавно предложенных оценок. Проведен сравнительный анализ точности указанных процедур на выборках с размером, соответствующим значениям в методах обработки на основе дискретного косинусного преобразования.

Ключевые слова: параметр формы, обобщенное гауссово распределение.

Введение

Повышение эффективности большинства современных систем и методов обработки сигналов напрямую связано с возможностью точно моделировать плотность распределения вероятности (ПРВ) обрабатываемых данных. Данная ситуация характерна, например, для сжатия и фильтрации изображений, автоматических методов оценивания дисперсии шума и т.п. [1, 2]. Стоит заметить, что в настоящее время упомянутые методы в большинстве своем основаны на различных ортогональных преобразованиях, таких как дискретное вейвлет-, косинусное и синусное преобразования, преобразование Адамара-Волша [3]. В результате, точное описание распределения спектральных коэффициентов приобретает большое значение и является одной из наиболее важных задач [2, 4, 5].

Долгое время общепринятым подходом к решению данного вопроса было применение гауссова распределения или ПРВ Лапласа. Однако детальные исследования показали, что распределение коэффициентов ортогональных преобразований для ряда сигналов и изображений может быть существенно негауссовым. В конце 90х годов прошлого столетия в нескольких работах было показано, что так называемое обобщенное гауссово распределение (ОГР) в отличие от ПРВ Лапласа позволяет с высокой степенью точности описывать поведение коэффициентов дискретного вейвлет- и косинусного преобразований для большого количества тестовых изображений [6, 7]. С этого момента ОГР стало часто использоваться для описания свойств данных в различных областях. Кроме описанных выше задач, в настоящее время ОГР широко используется в видеообра-

ботке [3], в задачах внедрения водяных знаков в изображения [8], для моделирования речевых сигналов [9] и т.д.

ОГР включает в себя как распределения с колоколообразной формой максимума, так и ПРВ с пикообразной верхушкой. Распределение модели симметрично относительно параметра сдвига и однозначно характеризуется двумя параметрами - формы p и масштаба σ [10]. В зависимости от значения параметра p ОГР может принимать вид как Гауссовой ПРВ или распределения Лапласа, так и равномерной ПРВ. Таким образом, тяжесть хвостов модели может изменяться в больших пределах. Данное свойство также отражает важность задачи оценивания параметра формы для эффективного описания свойств обрабатываемых данных.

Целью данной статьи является:

- обзор известных оценок параметра формы ОГР и их свойств;
- сравнительный анализ точности недавно предложенных оценок параметра формы ОГР с известными оценками данного параметра при помощи расчета смещенности и дисперсии оценок для выборок, размер которых соответствует значениям, имеющим место в методах обработки на основе дискретного косинусного преобразования (ДКП).

1. Обобщенное гауссово распределение

Аналитически ОГР записывается в следующем виде [10]:

$$f(x) = \frac{p \cdot A(p, \sigma)}{2\Gamma(1/p)} \exp(-A(p, \sigma)|x - s|^p), \quad (1)$$

где $\Gamma(x) = \int_0^\infty t^{x-1} e^{-t} dt$ – гамма-функция;

$$A(p, \sigma) = \sigma^{-1} \sqrt{\Gamma(3/p) / \Gamma(1/p)};$$

s – параметр сдвига (обычно равен 0);

σ и p – соответственно, параметры масштаба и формы.

Возможные значения параметра p находятся в пределах $(0; +\infty)$. Существует несколько частных случаев: $p=2$ - Гауссово распределение; ОГР с $p=1$ соответствует ПРВ Лапласа; распределение при p стремящемся к $+\infty$ асимптотически приближается к равномерной ПРВ [10]. При $p \leq 1$ ОГР имеет пикообразную форму максимума (т.е. в точке максимума наблюдается разрыв производной), в то время как при $p > 1$ максимум ПРВ является колоколообразным. В общем случае, чем меньше значение параметра p (для $p \leq 2$), тем тяжелее хвосты ПРВ (рис. 1).

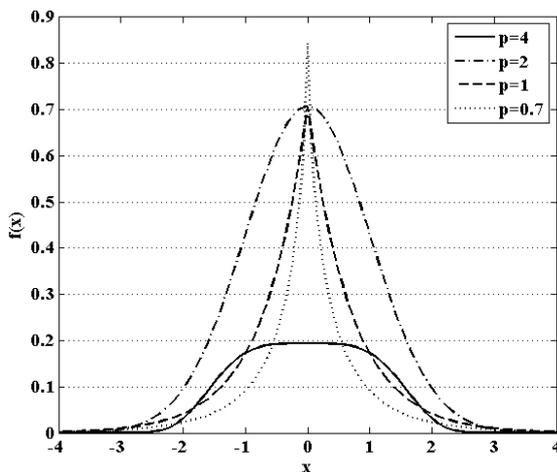


Рис. 1. Зависимость тяжести хвостов ОГР от значения параметра формы

2. Методы оценивания параметра p

2.1. Недавно предложенные оценки

Две из предложенных недавно четырех новых оценок параметра p , основаны на использовании четвертого центрального момента (μ_4) и робастной величины коэффициента эксцесса (так называемого, процентильного коэффициента эксцесса - ПКЭ). Оценки были разработаны благодаря обнаруженным зависимостям μ_4 и ПКЭ от значения параметра p , которые имеют монотонно возрастающий или убывающий характер [11].

Рассмотрим выборку данных $\{x_1, x_2, \dots, x_N\}$ входного сигнала X , который описывается ОГР с параметрами $s=0$ и $\sigma=1$. Тогда, оценки на основе четвертого центрального момента (\hat{p}_{μ_4}) и ПКЭ ($\hat{p}_{ПКЭ}$) можно представить следующим образом:

$$\mu_4 = \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N (x_n - m_x)^4 = D(p), \quad \hat{p}_{\mu_4} = D^{-1}(\hat{\mu}_4), \quad (2)$$

$$\mu_{ПКЭ} = \frac{1}{2} \frac{Q_3 - Q_1}{P_{90} - P_{10}} = C(p), \quad \hat{p}_{ПКЭ} = C^{-1}(\hat{\mu}_{ПКЭ}), \quad (3)$$

где Q_1, Q_3, P_{90}, P_{10} - первый и третий квартили, 90-й и 10-й процентиля, соответственно.

Вид зависимостей $D(p)$ и $C(p)$ также, как и детальный анализ оценок (2) и (3) можно найти в [11].

В качестве идеи для дальнейшего увеличения точности оценивания параметра p было предложено комбинировать оценки (2) и (3) для того, чтобы воспользоваться наилучшими качествами каждой из них. Основой для одной из предложенных оценок является алгоритм “жесткого переключения” между \hat{p}_{μ_4} и $\hat{p}_{ПКЭ}$ [11] (КОМБ1):

$$\hat{p}_{КОМБ1} = \begin{cases} \hat{p}_{ПКЭ}, & \text{если } \hat{p}_{\mu_4} \geq 1 \\ \hat{p}_{\mu_4}, & \text{если } \hat{p}_{\mu_4} < 1 \end{cases} \quad (4)$$

Вторая предложенная оценка является взвешенной комбинацией значений \hat{p}_{μ_4} и $\hat{p}_{ПКЭ}$ [11] (КОМБ2):

$$\hat{p}_{КОМБ2} = \begin{cases} \hat{p}_{\mu_4}, & \text{если } \hat{p}_{\mu_4} > 2 \\ \left(\frac{2 - \hat{p}_{\mu_4}}{2} \right) \hat{p}_{ПКЭ} + \frac{\hat{p}_{\mu_4}}{2} \hat{p}_{\mu_4}, & \text{если } \hat{p}_{\mu_4} \leq 2 \end{cases} \quad (5)$$

Обе оценки построены на том, что, когда $p < 1$, оценка \hat{p}_{μ_4} обладает меньшей дисперсией по сравнению с $\hat{p}_{ПКЭ}$. При $p \geq 1$ наблюдается противоположная ситуация и большая точность может быть получена за счет применения $\hat{p}_{ПКЭ}$ (более детально см. в [11]).

Рассмотренные оценки не являются единственными. Существует достаточно большое количество методов оценивания параметров ОГР. Большинство оценок параметра p можно разделить на 4 группы: а) оценки на основе критерия максимального правдоподобия; б) оценки на основе моментов случайных величин различных порядков; в) метод глобальной сходимости (МГС); г) методы на основе расчета энтропии и подобных ей параметров.

2.2. Оценка максимального правдоподобия

Для случайной величины X функция максимального правдоподобия определяется как [10]:

$$L(X; p, \sigma) = \log \prod_{n=1}^N f(x_n; p, \sigma) = \sum_{n=1}^N \log f(x_n; p, \sigma). \quad (6)$$

Оценка максимального правдоподобия (ОМП) для параметра формы может быть получена путем взятия первой производной от (6) относительно p и приравнивания полученного выражения к 0. Тогда необходимо решить следующее уравнение [10]:

$$g(p) = 1 + \frac{\psi(1/\hat{p})}{\hat{p}} - \frac{\sum_{n=1}^N |x_n|^{\hat{p}} \log |x_n|}{\sum_{n=1}^N |x_n|^{\hat{p}}} + \frac{\log \left(\frac{\hat{p}}{N} \sum_{n=1}^N |x_n|^{\hat{p}} \right)}{\hat{p}} = 0. \quad (7)$$

Полученное выражение принадлежит к классу трансцендентных уравнений, не имеет аналитического решения и может быть разрешено только численными методами. Для этого во многих работах, связанных с ОМП параметра p , предлагается использовать итерационный метод Ньютона-Рафсона (см., например, [9, 12]):

$$p_{k+1} = p_k - \frac{g(p_k)}{g'(p_k)}, \quad k = 0, 1, 2, \dots, \quad (8)$$

где $g'(p_k)$ – производная функции $g(p_k)$.

Точное выражение для $g'(p_k)$ может быть найдено в [13]. Однако у данного подхода есть несколько недостатков. Прежде всего, было замечено, что в ряде случаев для достижения требуемой точности необходимо выполнение достаточно большого числа итераций (порядка сотен) вследствие слабой сходимости (8). Во-вторых, расчет $g'(p_k)$ и $g(p_k)$ требует значительных вычислительных затрат. В-третьих, в общем случае, алгоритм (8) обладает локальной сходимостью, т.е. начальное приближение, p_0 , должно быть достаточно близко к реальному значению (p_{true}), для того, чтобы $p_k \rightarrow p_{true}$ при $k \rightarrow \infty$. Стандартный подход к определению начального значения алгоритма Ньютона-Рафсона – расчет одной из оценок на основе моментов случайных величин (данный класс оценок будет описан ниже) [9, 12]. Стоит отметить, что на практике значения данных оценок могут быть значительно завышены либо занижены. В таких случаях алгоритм (8) расходится и приводит к некорректным результатам.

Для преодоления данных трудностей, был применен итерационный метод Регулы-Фалси на основе алгоритма Секанта [14]. Его основной идеей является замена производной $g'(p_k)$ аппроксимацией в виде конечных разностей с малым шагом:

$$g'(p_k) = \frac{g(p_k) - g(p_{k-1})}{p_k - p_{k-1}}. \quad (9)$$

Тогда, для заданных p_0 и p_1 , итерационный алгоритм можно записать как [14]:

$$p_{k+1} = p_k - \frac{p_k - p_{k-1}}{g(p_k) - g(p_{k-1})} g(p_k), \quad k = 1, 2, \dots \quad (10)$$

Следующие условия должны выполняться для функции $g(p)$ [14]:

$$g(p_{k-1})g(p_k) < 0. \quad (11)$$

Одним из основных вопросов алгоритма Регулы-Фалси является вопрос о выборе начальных значений p_0 и p_1 . В [15] было предложено оценивать p_0 одним из методов на основе моментов случайных величин. Затем p_1 находится из набора $\{p_0 \pm \Delta_l\}$ ($l=1, 2, \dots$; Δ_l – заданное заранее значение шага, равное 0,25) с учетом условия $g(p_0)g(p_1) < 0$. Обычно p_1 вычисляется за один либо два шага.

2.3. Оценки на основе моментов случайных величин

Абсолютный момент r -го порядка для сигнала с ОГР записывается в следующем виде [7, 10]:

$$m_r = \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N |x_n|^r. \quad (12)$$

С другой стороны абсолютный момент ОГР аналитически определяется как [7, 10]:

$$M_r = \int_{-\infty}^{\infty} |x|^r f(x, p, \sigma) dx = A^{-r} (p, \sigma) \frac{\Gamma((r+1)/p)}{\Gamma(1/p)}. \quad (13)$$

Основная идея оценок на основе моментов случайных величин состоит в приравнивании момента r -го порядка, вычисленного для сигнала, и момента распределения, рассчитанного теоретически, т.е. $m_r = M_r$ [10]. В более общем случае, любая оценка данного класса методов может быть записана в виде отношения двух моментов определенных порядков в следующем обобщенном виде [7, 16]:

$$\frac{M_{r1}}{(M_{r2})^{r1/r2}} = \frac{m_{r1}}{(m_{r2})^{r1/r2}} \quad (14)$$

или равнозначно

$$\frac{\Gamma((r1+1)/p)}{\Gamma^{r1/r2}((r2+1)/p) \Gamma^{(1-r1/r2)}(1/p)} = \frac{m_{r1}}{(m_{r2})^{r1/r2}}, \quad (15)$$

где $r1$ и $r2$ – порядки моментов случайных величин.

В оценке, предложенной в [7] (MRM), используются первый и второй абсолютные моменты, т.е. $r1=1$ и $r2=2$:

$$R(p) = \frac{m_1}{\sqrt{m_2}} = \sqrt{\frac{\Gamma^2(2/p)}{\Gamma(1/p)\Gamma(3/p)}}. \quad (16)$$

В этом случае, оценка параметра p записывается следующим образом:

$$\hat{p}_{MRM} = R^{-1} \left(\frac{\hat{m}_1}{\sqrt{\hat{m}_2}} \right). \quad (17)$$

Другая оценка на основе моментов (KRM) предложена в [13, 16] и применяет второй и четвертый моменты случайных величин:

$$K(p) = \frac{m_2}{\sqrt{m_4}} = \sqrt{\frac{\Gamma^2(3/p)}{\Gamma(1/p)\Gamma(5/p)}} \quad (18)$$

и окончательно

$$\hat{p}_{KRM} = K^{-1} \left(\frac{\hat{m}_2}{\sqrt{\hat{m}_4}} \right). \quad (19)$$

Заметим, что $R(p)$ и $K(p)$ являются монотонно возрастающими функциями (см. рис. 2).

2.4. Метод глобальной сходимости

Еще один метод оценивания параметра p предложен в [17]. Его основой является предположение, что если X описывается ОГР, то

$$Z(p) \triangleq \frac{M_{2p}}{(M_p)^2} - (1+p) = 0, \quad (20)$$

где $Z(p)$ - выпуклая функция и выражение (20) имеет единственный корень на интервале $(0; \infty)$.

В работе [17] указано, что состоятельная оценка $Z(p)$ может быть представлена в виде:

$$Z_N(p) \triangleq \frac{m_{2p}}{m_p^2} - (1+p), \quad (21)$$

поэтому условие $Z_N(p)=0$ может быть использовано для нахождения оценки параметра p . В [13, 17] для поиска корня уравнения $Z_N(p)=0$ предложено применять итерационный алгоритм Ньютона-Рафсона:

$$p_{k+1} = p_k - \frac{Z_N(p_k)}{Z'_N(p_k)}, \quad k = 0, 1, 2, \dots \quad (22)$$

Однако для данного подхода характерны те же особенности, которые наблюдались для случая ОМП. Поэтому, для решения уравнения $Z_N(p)=0$ также предложено использовать метод Регулы-Фалси.

2.5. Оценки на основе энтропии и подобных ей параметров

Другой класс оценок использует соответствие энтропии ОГР (рассчитанной теоретически) и энтропии, рассчитанной по выборке данных. Дифференциальная энтропия для сигнала с ОГР определяется следующим образом [18]:

$$\begin{aligned} H(x) &= - \int_{-\infty}^{\infty} f(x, p, \sigma) \log f(x, p, \sigma) dx = \\ &= \log_2 \left(\frac{2}{p} \sqrt{\frac{\Gamma^3(1/p)}{\Gamma(3/p)}} \right) + \frac{1}{p \log 2}. \end{aligned} \quad (23)$$

Предположим, что $H(X)$ - значение энтропии выборки данных, полученной на выходе оптимального ограниченного равномерного порогового квантователя с шагом Δ [18]. Тогда

$$H(X) = H(x) - \log_2 \Delta. \quad (24)$$

Подставляя $H(x)$ в (21), получаем:

$$\begin{aligned} H(X) - \frac{1}{2} \log_2 \frac{m_2}{\Delta^2} &= \tilde{H}_2(p) = \\ &= \log_2 \left(\frac{2}{p} \sqrt{\frac{\Gamma^3(1/p)}{\Gamma(3/p)}} \right) + \frac{1}{p \log 2}, \end{aligned} \quad (25)$$

где правая часть выражения зависит только от значения p .

Тогда оценку параметра формы ОГР можно записать как (ОЭ2):

$$\hat{p}_{OЭ2} = \tilde{H}_2^{-1} \left(\hat{H}(X) - \frac{1}{2} \log_2 \frac{\hat{m}_2}{\Delta^2} \right), \quad (26)$$

где $\hat{H}(X)$ и \hat{m}_2 - энтропия и второй момент, соответственно, рассчитанные для обрабатываемой выборки данных.

В [9] данный подход был обобщен и в результате получена обобщенная оценка на основе энтропии:

$$\hat{p}_{OЭr} = \tilde{H}_r^{-1} \left(\hat{H}(X) - \frac{1}{r} \log_2 \frac{\hat{m}_r}{\Delta^r} \right), \quad (27)$$

которая включает оценку (26) в качестве частного случая при $r=2$.

Для визуального анализа, на рис. 2 показана функция $\tilde{H}_r(p)$ для $r=2, 3$ и 4 . Видно, что $\tilde{H}_2(p)$ имеет максимум при $p=2$, в то время как $\tilde{H}_3(p)$ и $\tilde{H}_4(p)$ являются монотонно возрастающими функциями на интервале значений p $(0; 3)$. В данной работе наряду со случаем $r=2$ будут исследованы оценки, полученные для случаев с $r=3$ (ОЭ3) и $r=4$ (ОЭ4).

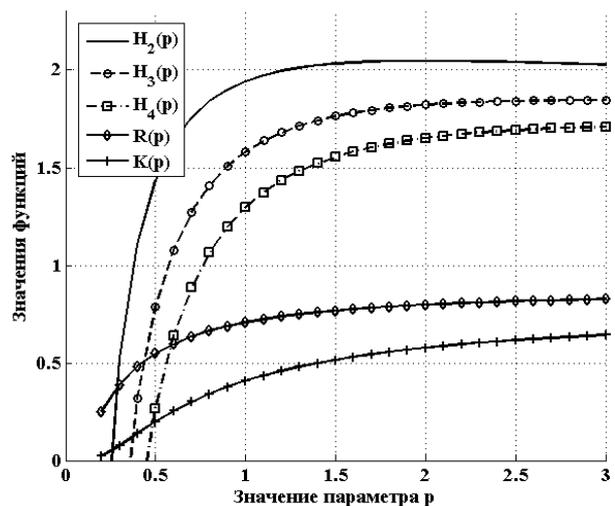


Рис. 2. Вид функции $\tilde{H}_r(p)$ при $r=2, 3$ и 4 , а также функции $R(p)$ и $K(p)$ на основе моментов случайных величин

3. Сравнительный анализ точности

Анализ точности рассмотренных оценок был проведен для выборок размером $N=1000$ и $N=4000$ отсчетов и числом реализаций в одном эксперименте $M=1000$. Такие значения параметров соответствуют ситуации при обработке изображения размером 512×512 пикселей одним из методов на основе ДКП в неперекрывающихся блоках размером 8×8 пикселей [11].

Прежде всего, проанализируем точность двух предложенных оценок КОМБ1 и КОМБ2. На рис. 3 приведены значения дисперсии $\sigma_{КОМБ1}$ и $\sigma_{КОМБ2}$, полученные для выборок размером $N=4000$, а также значения дисперсии ОМП в качестве предела точности, который может быть достигнут в методах оценивания параметра p .

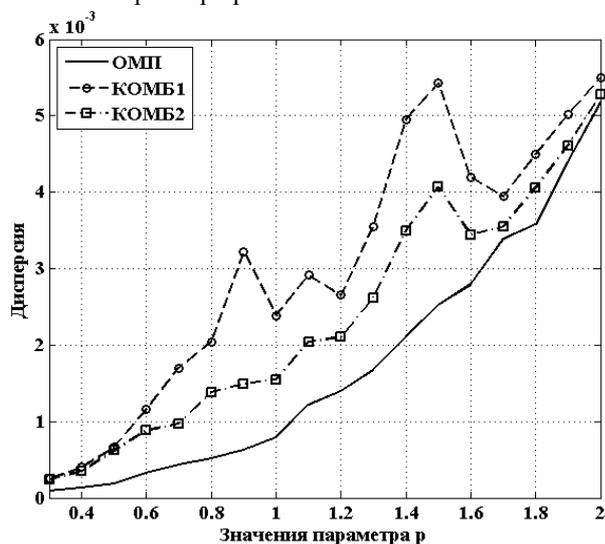


Рис. 3. Зависимость дисперсии предложенных оценок КОМБ1, КОМБ2, а также ОМП от значения параметра p

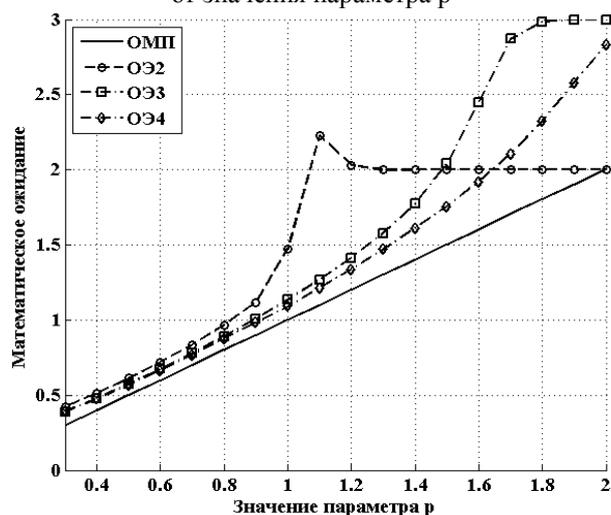


Рис. 4. Смещенность ОЭ-оценок с $\tau=2, 3$ и 4

Анализ зависимостей показывает, что оценка КОМБ2 характеризуется большей точностью по

сравнению с КОМБ1 для всех рассматриваемых значений p . Потому оценка КОМБ1 далее рассматриваться не будет. Отметим, что проигрыш оценки КОМБ2 оценке $\sigma_{ОМП}$ составляет не более 2 раз практически на всем диапазоне значений p кроме случаев $p=1,4$ и $1,5$.

Кроме анализа значений дисперсии, также были проведены исследования свойств смещенности оценок. Приведенные зависимости (рис. 4) показывают, что все рассмотренные ОЭ-методы являются смещенными: ОЭ2 для всех $p > 0,9$, ОЭ3 и ОЭ4 для всех $p > 1,2$.

Данную ситуацию можно объяснить большой крутизной функций $\tilde{H}_r(p)$ при $p > 0,9$ (см. рис. 2). В результате, когда оцениваемое значение энтропийной функции (левая часть выражения (23)) даже незначительно отклоняется от истинного значения, будет наблюдаться сильное смещение оценки $\hat{p}_{ОЭr}$. Стоит также отметить возможную неоднозначность в определении значения p в случае использования оценки ОЭ2. Функция $\tilde{H}_2(p)$ достигает своего максимального значения при $p=2$ и затем начинает спадать. Это означает, что одно и то же значение функции может соответствовать двум различным значениям параметра p на интервале $[1, 3, 4]$.

Заметим, что для избежания исключительных ситуаций было введено следующее ограничение. Если рассчитанное значение функции оказывалось больше своего максимального значения, то текущее значение усекалось до максимального. Именно данной операцией объясняется горизонтальность характеристик оценок ОЭ2 и ОЭ3 для $p > 1,2$ и $p > 1,7$, соответственно. Исходя из полученных результатов, далее будет исследоваться только оценка ОЭ4.

Зависимости, приведенные на рис. 5, показывают, что остальные рассмотренные оценки являются практически несмещенными.

Анализ точности ОМП, MRM, KRM, МГС и КОМБ2 оценок (см. рис. 6) показывает, что, как и предполагалось, наилучшие результаты наблюдаются для ОМП. Практически такими же значениями дисперсии для $p \leq 1$ обладает МГС-оценка. При $p > 1$ точность МГС несколько снижается, но проигрыш ОМП не превышает 20%. Отметим, что для расчета как ОМП, так и МГС оценки необходимо использование итерационного алгоритма, который может требовать значительных затрат вычислительных ресурсов.

Среди оценок на основе моментов случайных величин лучшей точностью обладает MRM-оценка. Значения ее дисперсии немного превышают показатели ОМП и МГС для $p \leq 1$, однако практически совпадают с ОМП для $p > 1$. Точность KRM-оценки оказалась наихудшей среди рассмотренных оценок для

всех анализируемых значений параметра p . Исключением является оценка ОЭ4, значения дисперсии которой превышают показатели KRM при $p > 1$.

Точность предложенной оценки КОМБ2 оказалась несколько хуже точности ОМП, МГС и MRM-оценок, однако разница не превышает 50% (по сравнению с максимальным значением дисперсии ОМП). Стоит заметить, что точность КОМБ2-оценки практически совпадает с показателями MRM-оценки при $p < 0,6$ и $p > 1,6$, а иногда может быть даже меньше (при $p \leq 0,5$).

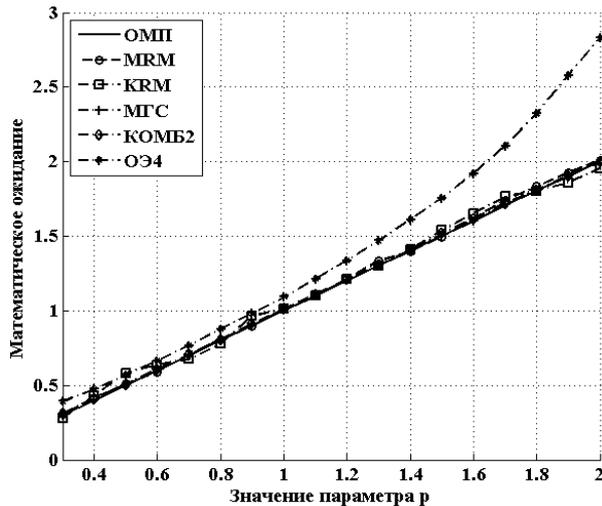


Рис. 5. Смещенность оценок ОМП, MRM, KRM, МГС и КОМБ2

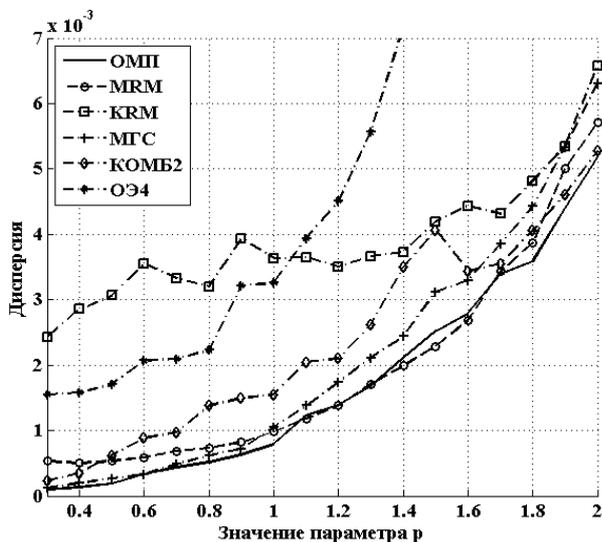


Рис. 6. Зависимость дисперсии оценок ОМП, MRM, KRM, МГС и КОМБ2 от параметра p

Отметим также, что оценки на основе моментов случайных величин являются значительно менее затратными в вычислительном плане по сравнению с ОМП и МГС. Данное замечание также верно и для предложенных оценок КОМБ1 и КОМБ2.

Заключение

Показано, что наибольшая точность в оценивании значения параметра формы ОГР может быть получена оценкой максимального правдоподобия и методом глобальной сходимости. Для реализации обоих методов необходимо использование достаточно требовательных в вычислительном плане итеративных алгоритмов. Практически такой же точностью обладает оценка на основе расчета моментов случайной величины MRM. Несколько большие значения дисперсии характерны для предложенной оценки КОМБ2, полученной на основе четвертого центрального момента и робастной формы коэффициента эксцесса. Основным преимуществом последних двух оценок является их относительная простота в вычислительном плане. Оценки на основе энтропии оказались смещенными для всех значений $p > 1$, что в основном связано с большой крутизной их базовых функций.

Литература

1. *Locally Adaptive DCT Filtering for Signal-Dependent Noise Removal [Text]* / R. Oktem, K. Egiazarian, V. Lukin, N. Ponomarenko, O. Tsymbal // *EURASIP Journal on Advances in Signal Processing*. – 2007. – Article ID 42472. – 10 p.
2. *Blind evaluation of additive noise variance in textured images by nonlinear processing of block DCT coefficients [Text]* / N. Ponomarenko, V. Lukin, S. Abramov, K. Egiazarian, J. Astola // *Image Processing: Algorithms and Systems II: proc. of Internat. Conf. – Santa Clara, USA, 2003. – SPIE Vol. 5014. – P. 178-189.*
3. *Bovik, A. Handbook on Image and Video Processing [Text]* / A. Bovik. – USA, Academic Press, 2000. – 891 p.
4. *Saad, M. DCT-Statistics Model-Based Blind Image Quality Assessment [Text]* / M. Saad, A. Bovik, C. Charrier // *Proc. of ICIP. – 2011. – 4 p.*
5. *Zoran, D. Scale Invariance and Noise in Natural Images [Text]* / D. Zoran, Y. Weiss // *Proceedings of ICCV. – 2009. – P. 2209-2216.*
6. *Muller, F. Distribution shape of two-dimensional DCT coefficients of natural images [Text]* / F. Muller // *Electron. Lett. – 1993. – Vol. 29, No 22. – P. 1935-1936.*
7. *Mallat, S. A theory of multiresolution signal decomposition: the wavelet representation [Text]* / S. Mallat // *IEEE Trans. Pattern Anal. Machine Intel. – 1989. – Vol. 11, No 7. – P. 674-693.*
8. *Briassouli, A. Hidden Messages in Heavy Tails: DCT-Domain Watermark Detection Using Alpha-Stable Models [Text]* / A. Briassouli, P. Tsakalides, A. Stouraitis // *IEEE Transactions on Multimedia. – 2005. – Vol. 7, No 4. – P. 700-715.*

9. Kokkinakis, K. *Exponent parameter estimation for generalized Gaussian probability density functions with application to speech modeling [Text]* / K. Kokkinakis, A. K. Nandi // *Signal Processing*. – 2005. – Vol. 85. – P. 1852-1858.
10. Varanasi, M. *Parametric generalized Gaussian density estimation [Text]* / M. Varanasi, B. Aazhang // *Journal of Acoust. Soc. Amer.* – 1989. – Vol. 4, No 86. – P. 1404-1415.
11. Roenko, A. *New estimators for tail heaviness parameter of generalized Gaussian distribution [Text]* / A. Roenko, D. Kurkin, V. Lukin // *Mediterranean Conf. on Embed. Computing*. – 2012. – P. 96-99.
12. Joshi, R. L. *Comparison of generalized Gaussian and Laplacian modeling in DCT image coding [Text]* / R. L. Joshi, T. R. Fisher // *IEEE Signal Proc. Lett.* – 1995. – Vol. 5, No 2. – P. 81-82.
13. Yu, S. *A review of estimating the shape parameter of generalized Gaussian distribution [Text]* / S. Yu, A. Zhang, H. Li // *Journal of Comput. Inform. Systems*. – 2012. – Vol. 8, No 21. – P. 9055-9064.
14. Ralston, A. *First Course in Numerical Analysis [Text]* / A. Ralston, P. Rabinowitz. – New York : McGraw-Hill, 1978. – 558 p.
15. Pi, M. *Improve maximum likelihood estimation for subband GGD parameters [Text]* / M. Pi // *Pattern Recognition Lett.* – 2006. – No 27. – P. 1710-1713.
16. Sharifi, K. *Estimation of shape parameter for generalized Gaussian distribution in subband decompositions of video [Text]* / K. Sharifi, A. Garcia // *IEEE Transactions on Circuits and Systems for Video Technology*. – 1995. – No 5. – P. 52-56.
17. Song, K. S. *A globally convergent and consistent method for estimating the shape parameter of a generalized Gaussian distribution [Text]* / K. S. Song // *IEEE Transactions on Information Theory*. – 2006. – No 52. – P. 510-527.
18. Aiazzi, B. *Estimation based on entropy matching for generalized Gaussian PDF modeling [Text]* / B. Aiazzi, L. Alparone, S. Baronti // *IEEE Signal Processing Letters*. – 1999. – No 6. – P. 138-140.

Поступила в редакцію 16.02.2015, рассмотрена на редколлегии 20.03.2015

АНАЛІЗ ТОЧНОСТІ ВІДОМИХ ОЦІНОК ПАРАМЕТРУ ФОРМИ УЗАГАЛЬНЕНОГО ГАУСОВА РОЗПОДІЛУ

О. О. Роєнко

Модель випадкових процесів на основі узагальненого гаусова розподілу достатньо широко використовується у області обробки аудіо та відеоданих та зображень протягом останніх десятиріч. У роботі розглянуто відомі процедури оцінювання одного з параметрів моделі, параметру форми, що впливає на ступінь важкості хвостів розподілу. Наведено основні властивості та особливості розрахунку максимально правдоподібною оцінки, оцінок на базі моментів випадкових величин, ентропії та похідних від неї параметрів, методу глобальної збіжності, а також двох нещодавно запропонованих оцінок. Проведено порівняльний аналіз точності вказаних процедур на вибірках з розміром, що відповідає значенням у методах обробки на основі дискретного косинусного перетворення.

Ключові слова: параметр форми, узагальнений гаусов розподіл.

ACCURACY ANALYSIS OF KNOWN SHAPE PARAMETER ESTIMATORS OF GENERALIZED GAUSSIAN DISTRIBUTION

A. A. Roenko

Last decades model of stochastic processes on the basis of the generalized Gaussian distribution have been widely used in audio, video data and image processing. This paper highlights the known procedures for estimation one of the model's parameter, namely, shape parameter, which influences the distribution tail heaviness. Main characteristics and evaluation features of maximum likelihood and moment-based estimators as well as global convergence method, entropy-matching estimators and two recently proposed procedures are considered. Accuracy analysis of the estimators is done using samples of size corresponded to that of discrete cosine transform based processing methods.

Keywords: shape parameter, generalized Gaussian distribution.

Роєнко Алексей Александрович – канд. техн. наук, доцент каф. «Приема, передачи и обработки сигналов», Национальный аэрокосмический университет им. Н. Е. Жуковского «Харьковский авиационный институт», г. Харьков, Украина, e-mail: roenkomail@mail.ru.