

УДК 519.6: 629.7.036.3

В.М. ГУСЯТИН, М.В. ГУСЯТИН

Харьковский национальный университет радиоэлектроники «ХНУРЭ», Украина

СГЛАЖИВАНИЕ ТРИАНГУЛИРОВАННОЙ ПОВЕРХНОСТИ МЕТОДОМ СФЕРИЧЕСКОЙ ИНТЕРПОЛЯЦИИ В ЗАДАЧАХ КОМПЬЮТЕРНОЙ ГРАФИКИ

Рассматривается метод сглаживания триангулированной поверхности с использованием сферической интерполяции. Исходными являются данные для триангулированной поверхности. Метод позволяет при заданных трех точках и нормалях локально строить гладкую поверхность требуемой формы. В статье приведены основные соотношения для построения поверхности. Такой подход к сглаживанию триангулированной поверхности позволяет повысить реалистичность синтеза её изображений методом обратного трассирования. Это особенно важно при построении систем визуализации для тренажеров транспортных средств различного назначения.

Ключевые слова: моделирование поверхностей, квадрик, интерполяция, метод обратного трассирования.

Введение

В современной компьютерной графике важнейшей задачей является повышение реалистичности синтезируемых сцен [1]. Выполнение требования высокой реалистичности предъясняется, например, при проектировании систем визуализации тренажеров авиационных или других транспортных средств различного назначения, при создании художественных или научно-популярных фильмов с применением компьютерной графики и др. Одним из возможных путей решения этой проблемы является применение метода обратного трассирования при решении задач синтеза изображений [2, 3]. В процессе развития компьютерной графики разработано большое количество 3D моделей различных объектов, в основном с триангулированной поверхностью, ориентированных на синтез их изображений методом прямого трассирования [2]. Для уменьшения отрицательного эффекта восприятия триангулированной поверхности в процессе ее синтеза применяют различные методы интерполяции освещенности в пределах треугольника. Основными являются методы Гуро и Фонга [1, 2]. Однако все эти методы не устраняют нарушение геометрии поверхности, возникшее в процессе ее триангуляции. Метод обратного трассирования активно развивается в последние годы [3]. Этот метод позволяет синтезировать изображение аналитически описываемых поверхностей. Наличие такой особенности у этого метода дает возможность использовать иной подход улучшения качества визуализации полигональных объектов. В этом случае возможно интерполяцию освещенности треугольников исключить и заменить

ее интерполяцией треугольника некоторой криволинейной поверхностью, что позволяет повысить реалистичность синтеза изображений полигональных объектов [4-12]. Такой подход также решает важную задачу совместимости метода обратного трассирования с накопленной базой моделей и программного обеспечения, которые ориентированы на метод прямого трассирования. Таким образом, поиск новых методов моделирования гладких геометрических форм пространственных полигональных поверхностей с целью их дальнейшей визуализации методом обратного трассирования по-прежнему является актуальной задачей на данном этапе развития компьютерной графики.

Анализ литературы

Моделирование криволинейных поверхностей, интерполирующих точки, которые заданы в пространстве, является одной из важнейших задач компьютерной графики. Приведем в качестве примера ряд методов решения этой задачи [5-12]. Одним из самых удобных математических методов описания криволинейных форм объектов является их представление при помощи кусков параметрических кривых, поверхностей или сплайнов [4-8]. Недостатком такого представления является сложность соединения кусков поверхностей между собой с выполнением условия непрерывности, как самой поверхности, так и ее производной. Использование сплайнов более высоких порядков обеспечивает непрерывное соединение участков поверхностей [5, 6]. Такой подход дает хорошие по качеству результаты, однако для каждого треугольника необ-

ходимо формирование параметрических сплайнов четвертой и пятой степени, что существенно повышает требования к производительности аппаратных средств [5, 6]. Параметрическое описание предусматривает, что исходной позицией проекционного луча, строящего изображение, является точка на конструируемой поверхности, что затрудняет применение алгоритмов синтеза изображений с использованием метода обратного трассирования. Эта особенность параметрических поверхностей заставила исследователей обратиться к алгебраическим поверхностям [7-12]. Авторами работ [7, 8] предлагается использовать для интерполяции алгебраические поверхности высоких порядков. Недостатком такого подхода является сложность расчета коэффициентов таких поверхностей, которая ограничивает использование этого подхода для интерполяции сеток, конфигурация которых меняется при анимации синтезируемых объектов. В [9] предлагается для интерполяции исходной сетки высокой детализации использовать алгебраическую поверхность второго порядка. В целом данный метод имеет достаточно высокую ресурсоемкость. По мнению автора этого метода, он может быть использован в системах интерактивного объемно-ориентированного геометрического моделирования. В случае использования метода обратного трассирования операция нахождения точки пересечения проекционного луча с поверхностью синтезируемого объекта существенно упрощается, если для интерполяции поверхности, заданной полигонами, используются алгебраические поверхности, записанные в неявной форме [10]. В работах [11, 12] предлагается использовать метод сферической интерполяции, который основан на использовании простейшего квадрата – сферы. Такой подход также ускоряет нахождение точки пересечения проекционного луча с интерполирующей поверхностью методом обратного трассирования.

Метод конструирования поверхности

1. *Область интерполяции и формирование нормалей.* В процессе моделирования поверхности, интерполирующей произвольно расположенные точки в пространстве, важно определиться с областью интерполяции и векторным полем направляющих. Авторами в [12] область интерполяции определена локально для трех заданных точек (вершин треугольника) в пространстве. Для произвольно заданных точек $p_1(x_1, y_1, z_1) - p_3$ на плоскости треугольника построено векторное поле направляющих (vg-vector guide), на которых собственно и будут лежать точки интерполирующей поверхности. Метод позволяет построить векторное поле направ-

ляющих как локально для одного треугольника, так и смежных треугольников, так как имеются общие направляющие, расположенные на общем ребре и принадлежащие полям обоих треугольников. Каждый вектор поля направляющих [12] запишем в таком виде

$$vg\left\{\left(x_p - x'_p\right), \left(y_p - y'_p\right), \left(z_p - z'_p\right)\right\}, \quad (1)$$

где $p'(x'_p, y'_p, z'_p)$ точка, задающая конец вектора и лежащая на плоскости параллельной плоскости треугольника.

В соответствии с методом все множество точек пространства, лежащих на любом векторе поля направляющих, имеют в проекции на треугольник только одну единственную точку для каждого из векторов.

На рисунке 1 в системе координат (с/к)XYZ показан набор произвольно расположенных трех точек $p_1(x_1, y_1, z_1) - p_3$, определяющих положение треугольника в пространстве выбранной системы координат. Эти исходные данные дополняются единичными нормальными в каждой точке $n_1\{n_{1x}, n_{1y}, n_{1z}\} - n_3$.

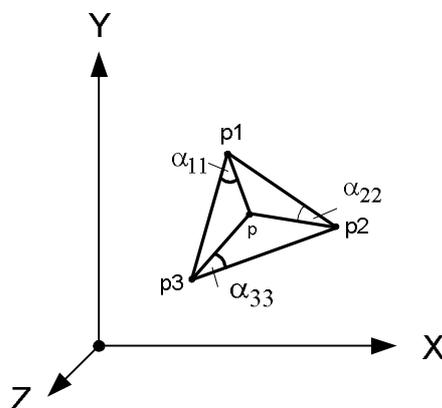


Рис. 1. Геометрические элементы задачи

Нормали могут быть, как и точки, заданы, либо получены расчетом с учетом расположения точек. Как один из вариантов, направление нормалей в точке может быть рассчитано по методу Гуро.

2. *Соотношения для построения опорных сфер.* Основной особенностью метода интерполяции является использование такого квадрата как сфера для построения поверхности произвольной формы между тремя точками. Наличие нормалей к будущей поверхности в каждой точке, через которые она проходит, позволяет получить наряду со связностью (C0) [1, 11] и непрерывность первой производной,

т.е. гладкость (C1) конструируемой поверхности в этих точках. Для конструирования поверхности выполним построение опорных сфер. Опорные сферы являются общими для смежных треугольников и позволяют просто достичь связности C0 и C1 между сплайнами конструируемой поверхности для каждого из треугольников. Для этого через концы отрезков, заданных ребрами треугольника, например, через точки p_1, p_2 проведем две сферы с центрами o_1 и o_2 :

$$|r_1 - ro_1| = R_1; |r_2 - ro_2| = R_2, \quad (2)$$

где r_1, r_2 - радиус-векторы точек p_1, p_2 ; ro_1, ro_2 - радиус-векторы точек центра сфер, а R_1, R_2 - радиусы этих сфер.

При этом центр o_1 одной сферы должен находиться на прямой, проходящей через точку p_1 и совпадающей с нормалью n_1 в этой точке. Центр o_2 второй сферы должен находиться на прямой, проходящей через точку p_2 и совпадающей с нормалью n_2 . Определим координаты центров этих сфер. Для этого запишем нормали с учетом их компонент:

$$n_1 \{n_{1x}, n_{1y}, n_{1z}\}; n_2 \{n_{2x}, n_{2y}, n_{2z}\}. \quad (3)$$

Запишем уравнение плоскости $F_{1,2}$, проходящей через середину отрезка p_1p_2 и перпендикулярно к этому отрезку. Пусть это будет точка $p_{1,2}(x_{1,2}, y_{1,2}, z_{1,2})$. Тогда уравнение плоскости $F_{1,2}$ в векторной форме имеет вид: $(r - r_{1,2}) \cdot \overline{p_1p_2} = 0$.

Перепишем это уравнение в координатной форме:

$$(x - x_{1,2})(x_2 - x_1) + (y - y_{1,2})(y_2 - y_1) + (z - z_{1,2})(z_2 - z_1) = 0. \quad (4)$$

И окончательно, используя уравнение (4), запишем уравнение плоскости $F_{1,2}$ в общей форме:

$$Ax + By + Cz + D = 0, \quad (5)$$

где $A = x_2 - x_1$; $B = y_2 - y_1$;

$$C = z_2 - z_1; D = -(x_{1,2}A + y_{1,2}B + z_{1,2}C).$$

Запишем уравнения прямых, проходящих через точки p_1 и p_2 параллельно к соответствующим нормальям n_1 и n_2 . Для точки p_1 имеем:

$$(x - x_1)/n_{1x} = (y - y_1)/n_{1y} = (z - z_1)/n_{1z}.$$

По аналогии для точки p_2

$$(x - x_2)/n_{2x} = (y - y_2)/n_{2y} = (z - z_2)/n_{2z}. \quad (6)$$

Найдем точки пересечения плоскости (5) с прямыми (6). Для этого перепишем уравнения прямых (6) в параметрической форме:

$$\begin{aligned} x &= x_1 + n_{1x}t; y = y_1 + n_{1y}t; z = z_1 + n_{1z}t; \\ x &= x_2 + n_{2x}t; y = y_2 + n_{2y}t; z = z_2 + n_{2z}t. \end{aligned} \quad (7)$$

Подставим (7) в (5) и найдем соответственно для каждой из прямых (6) значения параметров t_1 и t_2 в точке пересечения их с плоскостью (5).

Тогда для прямой, проходящей через точку p_1 , имеем:

$$t_1 = -(Ax_1 + By_1 + Cz_1 + D)/(An_{1x} + Bn_{1y} + Cn_{1z}).$$

По аналогии для прямой, проходящей через точку p_2 , имеем:

$$\begin{aligned} t_2 &= -(Ax_2 + By_2 + Cz_2 + D)/ \\ &/ (An_{2x} + Bn_{2y} + Cn_{2z}). \end{aligned} \quad (8)$$

Подставив t_1 и t_2 в (7), найдем координаты центра сфер o_1 и o_2 :

$$\begin{aligned} x_{o_1} &= x_1 + n_{1x}t_1, y_{o_1} = y_1 + n_{1y}t_1, \\ z_{o_1} &= z_1 + n_{1z}t_1; \\ x_{o_2} &= x_2 + n_{2x}t_2, y_{o_2} = y_2 + n_{2y}t_2, \\ z_{o_2} &= z_2 + n_{2z}t_2. \end{aligned} \quad (9)$$

Окончательно, после подстановки (9) в (2) для определения радиусов, уравнения опорных сфер в векторной форме имеют вид:

$$|r - ro_1| = R_1; |r - ro_2| = R_2. \quad (10)$$

По аналогии можно построить остальные четыре опорные сферы.

3. Основные соотношения для построения интерполирующих сфер и поверхности.

Рассмотрим пример построения куска гладкой поверхности локально для треугольника. Предварительно определим углы $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ при вершинах треугольника (рисунок 1). Например, угол при вершине 1 определяется соотношением:

$$\alpha_1 = \arccos((p_3 - p_1)(p_2 - p_1)) / (|p_3 - p_1| |p_2 - p_1|). \quad (11)$$

Для произвольно выбранной точки p на поверхности треугольника строим систему углов $\alpha_{11}, \alpha_{22}, \alpha_{33}$. По аналогии с (11) имеем, например, для угла α_{11} соотношение:

$$\alpha_{11} = \arccos((p_3 - p_1)(p - p_1)) / (|p_3 - p_1| |p - p_1|). \quad (12)$$

Для каждой вершины треугольника строим интерполирующую сферу, кривизна которой, например, k_1 при вершине 1 изменяется следующим образом

$$k_1 = k_{13}(1 - u_1) + k_{12}u_1,$$

где k_{12}, k_{13} - кривизна соответствующих опорных сфер, $u_1 = \alpha_{11} / \alpha_1$.

Координаты центра интерполирующей сферы при вершине 1 запишем в таком виде:

$$\begin{aligned} o_{i1}(x) &= p_1x + v_1x / k_1, \\ y &= p_1y + v_1y / k_1, \\ z &= p_1z + v_1z / k_1. \end{aligned} \quad (13)$$

Радиус для этой сферы равен:

$$R_{i1} = |p_1 - o_{i1}|. \quad (14)$$

По аналогии можно получить соотношения кривизны k_2, k_3 , координаты центров o_{i2}, o_{i3} и радиусов R_{i2}, R_{i3} для остальных двух интерполирующих сфер. Окончательно, запишем соотношения для трех интерполирующих сфер:

$$|r - o_{i1}| = R_{i1}, \quad |r - o_{i2}| = R_{i2}, \quad |r - o_{i3}| = R_{i3}. \quad (15)$$

Для конструирования поверхности найдем соотношения для барицентрических координат b_1, b_2, b_3 точки p :

$$\begin{aligned} b_1 &= (|p - p_3| \sin \alpha_{33}) (|p_2 - p_3|) / 2s, \\ b_2 &= (|p - p_1| \sin \alpha_{11}) (|p_3 - p_1|) / 2s, \\ b_3 &= (|p - p_2| \sin \alpha_{22}) (|p_1 - p_2|) / 2s, \end{aligned} \quad (16)$$

где S - площадь треугольника.

Через произвольно заданную точку p на поверхности треугольника проведем прямую параллельную вектору поля направляющих vg в этой точке.

$$r = r_p + vg * t^0, \quad (17)$$

где r_p - радиус-вектор точки p .

Подставляем (17) в уравнения интерполирующих сфер (15) и находим значения t^0 , при которых выполняется пересечение прямой (17) соответственно со сферами (15). Пусть это будут: для первой сферы t_{11}^0, t_{12}^0 , для второй t_{21}^0, t_{22}^0 , для третьей t_{31}^0, t_{32}^0 . Подставим эти значения в уравнение (17) и получим для каждой точки пересечения значения координат в с/к XYZ. Для каждой сферы имеем по две точки пересечения. Пусть это будут: для первой, второй и третьей сферы соответственно:

$$\begin{aligned} p_{11}^0(x_{11}^0, y_{11}^0, z_{11}^0), p_{12}^0(x_{12}^0, y_{12}^0, z_{12}^0); \\ p_{21}^0(x_{21}^0, y_{21}^0, z_{21}^0), p_{22}^0(x_{22}^0, y_{22}^0, z_{22}^0); \\ p_{31}^0(x_{31}^0, y_{31}^0, z_{31}^0), p_{32}^0(x_{32}^0, y_{32}^0, z_{32}^0). \end{aligned} \quad (18)$$

Для правильного выбора корней в решениях (18) для каждой сферы соответственно определим функцию, используя уравнение плоскости, проведенной соответственно через точки p_1, p_2 и p_3 .

$$L = (p - p_1)(p_2 - p_1)(p_3 - p_1). \quad (19)$$

Подставим в равенство (19) координаты центров интерполирующих сфер o_{i1}, o_{i2} и o_{i3} . По результатам этих подстановок получим эталонные значения знаков этих функций:

$$os_1 = L(o_{i1}), \quad os_2 = L(o_{i2}), \quad os_3 = L(o_{i3}). \quad (20)$$

Подставляя (18) в (19) и попарно сравнивая результат с (20), выбираем из пары корней тот, который имеет знак, противоположный знакам os_1, os_2 и os_3 или равен нулю. Пусть, например, это будут p_{11}^0, p_{21}^0 и p_{31}^0 .

Запишем выражения для векторов, которые параллельны, имеют на поверхности треугольника общую начальную точку p , а конечной точкой для каждого из них являются точки пересечения с соответствующей интерполирующей сферой:

$$\begin{aligned} s_{11} &= p_{11}^0(t) - p, \\ s_{21} &= p_{21}^0(t) - p, \\ s_{31} &= p_{31}^0(t) - p. \end{aligned} \quad (21)$$

Окончательно выражение для радиуса – вектора r_s задающего точку на конструируемой поверхности, например, для треугольника p_1, p_2, p_3 запишем в виде соотношения:

$$r_s = r_p + (s_{11}b_1 + s_{21}b_2 + s_{31}b_3). \quad (22)$$

В уравнении (22) во втором слагаемом (сумма в скобках) барицентрические координаты учитывают степень влияния соответствующей интерполирующей сферы на формирование точки конструируемой поверхности.

4. *Математическое моделирование*. Моделирование предлагаемого метода выполнено с использованием математического пакета Wolfram Mathematica. Наряду с построением интерполяционной поверхности с помощью пакета выполнена оценка погрешности конструируемой поверхности. В качестве эталонных поверхностей выбраны цилиндр, конус и тор. Для таких разных поверхностей погрешность будем оценивать как относительную погрешность отклонения точек конструируемой поверхности от эталонных, лежащих на направляющей прямой. Запишем в нашем случае относительную погрешность в следующей форме:

$$\delta = \Delta / M, \quad (23)$$

где Δ – абсолютная погрешность отклонения точек конструируемой поверхности от эталонных, лежащих на направляющей прямой; M – некоторый параметр, имеющий максимальное значение, для той или иной эталонной поверхности. В нашем случае это максимальное значение диаметра эталонных поверхностей.

В таблице 1 приведены результаты оценки максимальной δ_{\max} и средней $\delta_{\text{ср}}$ погрешностей в соответствии с (23).

Таблица 1

Результаты оценки погрешности интерполяции

Эталон поверхности	Кол-во участков интерполяции/треугольников	δ_{\max}	$\delta_{\text{ср}}$
Цилиндр	8/16	0,0053	0,0014
Конус	8/8	0,0085	0,0023
Тор	48/96	0,015	0,0035

Выводы

Метод позволяет построить гладкую поверхность как локально для трех точек, так и для ансамбля произвольно расположенных точек в пространстве. Дальнейшая работа авторов направлена на улучшение предлагаемого метода и на решение задачи визуализации таких поверхностей методом обратного трассирования.

Литература

1. *Computer Graphics. Principles and practice [Text]* / John F. Hughes, Andries Van Dam, Morgan Mcguire, David F. Sklar, James D. Foley, Steven K. Feiner, Kurt Akeley. – by Addison-Wesley Publishing Company, Inc. 1996, – 1175 p.
2. *Иванов, В.П. Трехмерная компьютерная графика [Текст]* / В.П. Иванов, А.С. Батраков. – М: Радио и связь, 1995. – 224 с.
3. *Hurley, J. Ray Tracing Goes Mainstream [Text]* / J. Hurley // Intel Technology Journal “Compute-Intensive, Highly Parallel Applications and Uses”. – May 19, 2005. – Vol. 09, Issue 02. – P. 99-108.
4. *Hahmann, S. Polynomial Surface Interpolating Arbitrary Triangulations [Text]* / S. Hahmann, G.-P. Bonneau // IEEE Transaction On Visualization And Computer Graphics. – January-march 2003. – Vol. 9, No. 1. – P. 99-109.
5. *Barth, W. Efficient Ray Tracing for Bezier and B-Spline Surfaces [Text]* / W. Barth, W. Sturzlinger // Computers & Graphics. – 1993. – № 17(4). – P. 423-430.
6. *Campanga, S. Improving Bézier clipping and Chebyshev boxing for Ray Tracing Parametric Surfaces [Text]* / S. Campanga, P. Slusallek // Proceedings of international conference “3D Image Analysis and Synthesis '96”. – Erlangen, Germany: Erlangen University, 1996. – P. 95 – 102.
7. *Turk, G. Modelling with Implicit Surfaces that Interpolat [Text]* / G. Turk, J.O'. Brien // ACM Transactions on Graphics. – 2002. – № 21(4). – P. 855-873.
8. *Bajaj, C. Modeling with Cubic A-Patches [Text]* / C. Bajaj, J. Chen, G. Xu // ACM Trans. on Graphics. – 1995. – Vol. 14, No. 2. – P. 103-133.
9. *Вяткин, С.И. Моделирование сложных поверхностей с применением функций возмущения*

[Тест] / С.И. Вяткин // *Автометрия*. – 2007. – № 3. – С. 9-15.

10. Гусятин, В.М. Метод уменьшения итераций в алгоритмах синтеза изображений реального масштаба времени [Текст] / В.М. Гусятин // *Радиоэлектроника и информатика*. – 2001. – №1. – С. 99-100.

11. Гусятин, В.М. Метод сферической интерполяции триангулированных поверхностей [Текст] / В.М. Гусятин, А.Е. Громенко, Р.В. Сорокин // *Материалы второй международной научной конферен-*

ции «Современные информационные системы. Проблемы и тенденции развития: матер. второй международной научной конференции. – Харьков - Туапсе, 2007. – С. 495-496.

12. Гусятин, В.М. Векторное поле направляющих в задаче моделирования криволинейных поверхностей методом сферической интерполяции [Текст] / В.М. Гусятин, М.В. Гусятин // *Вимірювальна та обчислювальна техніка в технологічних процесах*. – 2012. – № 1. – С. 88 – 92.

Поступила в редакцию 3.09.2013, рассмотрена на редколлегии 11.09.2013

Рецензент: д-р техн. наук, проф., проф. каф. электронных вычислительных машин С.Г. Удовенко, Харьковский национальный университет радиоэлектроники «ХНУРЭ», Харьков, Украина.

ЗГЛАДЖУВАННЯ ТРИАНГУЛЬОВАНОЇ ПОВЕРХНІ МЕТОДОМ СФЕРИЧНОЇ ІНТЕРПОЛЯЦІЇ В ЗАДАЧАХ КОМП'ЮТЕРНОЇ ГРАФІКИ

В.М. Гусятін, М.В. Гусятін

Розглядається метод згладжування триангульованої поверхні з використанням сферичної інтерполяції. Початковими є дані для триангульованої поверхні. Метод дозволяє при заданих трьох точках і нормалях локально будувати гладку поверхню необхідної форми. У статті приведено основні співвідношення для побудови поверхні. Такий підхід до згладжування триангульованої поверхні дозволяє підвищити реалістичність синтезу її зображень методом зворотного трасування. Це особливо важливо при побудові систем візуалізації для тренажерів транспортних засобів різного призначення.

Ключові слова: моделювання поверхонь, квадрик, інтерполяція, метод зворотнього трасування.

SMOOTHING TRIANGULATED SURFACES BY SPHERICAL INTERPOLATION METHOD IN TASKS OF COMPUTER GRAPHICS

V.M. Gusiatin, M.V. Gusiatin

A method of smoothing triangulated surface using a spherical interpolation. The initial data are for the triangulated surface. The method allows for the set of three points and normals build locally smooth surface desired shape. The article presents the basic relations for the construction of the surface. Such an approach to smoothing triangulated surface can enhance the realism of synthesis its image by ray tracing. This is especially important when building imaging systems for simulators vehicles for different purposes.

Key words: modeling of surfaces, quadrics, interpolation, the ray tracing method

Гусятин Владимир Михайлович – канд. техн. наук, доцент, профессор каф. ЭВМ, Харьковский национальный университет радиоэлектроники "ХНУРЭ", Харьков, Украина, e-mail: vmgus@rambler.ru.

Гусятин Максим Владимирович – инженер каф. ЭВМ, Харьковский национальный университет радиоэлектроники "ХНУРЭ", Харьков, Украина.