

УДК 519.6+537.8+621.396.67

В.А. РВАЧЕВ, Т.В. РВАЧЕВА, Е.П. ТОМИЛОВА

*Национальный аэрокосмический университет им. Н.Е. Жуковского «ХАИ»,
Украина***ПРИМЕНЕНИЕ АТОМАРНЫХ ОБОБЩЕННЫХ РЯДОВ ТЕЙЛОРА
К РЕШЕНИЮ ИНТЕГРАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ
ЭЛЕКТРОДИНАМИКИ И ТЕОРИИ АНТЕНН**

Предложены методы приближенного решения интегральных уравнений, к которым сводятся многие задачи электродинамики, в том числе задачи теории антенн, с помощью разложения ядер этих уравнений по одной или обеим группам переменных в одномерные или кратные атомарные обобщенные ряды Тейлора – интерполяционные ряды биркгоффа типа, обладающие оптимальными свойствами с точки зрения аппроксимации гладких функций, построенные с помощью обобщенных многочленов по сдвигам атомарных функций – специальных решений с компактным носителем обыкновенных линейных функционально-дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами и линейными отклонениями независимой переменной.

Ключевые слова: интегральные уравнения, теория антенн, электродинамика, атомарная функция, атомарный обобщенный ряд Тейлора, базисные функции обобщенного ряда Тейлора, локальные ортогональные системы.

Введение

Многие задачи электродинамики, в частности теории антенн, сводятся к тем или иным интегральным уравнениям [1,2]. Широкое распространение получил, например, метод граничных интегральных уравнений. Так, в [3-7] отмечается, что в настоящее время метод интегральных уравнений стал одним из ведущих приемов численного исследования инженерных и научных проблем технической электродинамики; что этот метод играет центральную роль в изучении граничных задач, связанных с рассеянием электромагнитных волн ограниченными телами; кроме того, отмечено, что вышеуказанный метод является наиболее универсальным и точным методом решения внутренней задачи, применимым для проволочных антенн с любой формой проводников.

При решении интегральных уравнений электродинамики использовались сплайн-функции, атомарные функции (АФ), вейвлеты, в том числе нестационарные вейвлеты на основе АФ для представления неизвестных функций, т.е. искомого решения. Поскольку эти неизвестные функции могут и не обладать большой гладкостью, то целесообразность использования гладких функций для представления решения требует особого рассмотрения, если расположение особенностей решения заранее известно. Отметим, кстати, что гладкие функции хорошо приближают и негладкие функции, а использование негладких аппроксимаций вносит разрывы или уг-

ловые точки и там, где их у решения нет. Между тем в упомянутых выше интегральных уравнениях присутствуют известные функции многих переменных, зависящие к тому же от ряда параметров – ядра соответствующих интегральных операторов $K(x, t)$. Эти ядра являются аналитическими функциями (т.е., очень гладкими), за исключением возможных особенностей при равенстве аргументов $x = t$. Эти особенности, как правило, можно тем или иным способом выделить.

К числу уравнений, используемых в теории антенн, относятся интегральные или интегродифференциальные уравнения, такие как уравнения Полингтона и Халлена

$$\left(\frac{d^2}{dz^2} + \beta^2 \right) \int_{-L/2}^{L/2} I_z(z') \frac{e^{-j\beta R}}{R} dz' = -j4\pi\omega\epsilon_0 E_z^i(z),$$

где $R = \sqrt{(z - z')^2 + a^2}$.

Ядра в этих уравнениях являются аналитическими функциями для $a > 0$. Известным методом решения таких уравнений является использование разложения ядра уравнения $K(x, t)$ в ряд Тейлора по переменной интегрирования t в точке t_0 :

$$K(x, t) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\partial^n K(x, t_0)}{n! \partial t^n} (t - t_0)^n.$$

Однако для малых a (тонкой проволочной антенны) радиус сходимости этого ряда Тейлора будет малым и потребуется разбивать интервал $[-L, L]$ на

большое число участков ($\gg 2L/a$) для обеспечения сходимости рядов.

В этой работе предлагается использование атомарного обобщенного ряда Тейлора (АОРТ), который пригоден для разложения значительно более широких классов бесконечно дифференцируемых функций, чем вещественно аналитические функции, а для последних сходится очень быстро, что позволяет использовать подобный метод и для интегральных уравнений электродинамики и теории антенн.

АОРТ для функции $f(x)$ имеет вид

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k \in N_n} f^{(n)}(x_{n,k}) \varphi_{n,k}(x),$$

где $\varphi_{n,k}(x)$ – так называемые базисные функции АОРТ и являются линейными комбинациями сдвигов АФ $up(x)$, $Fup_n(x)$.

Различные применения АОРТ рассмотрены в [7-13]. Там же можно найти подробности относительно вычисления базисных функций этого ряда.

АОРТ является развитием классического ряда Тейлора. Классический ряд Тейлора в виде разложения по мультиполям используется в электродинамике с 19 века. Сравнение между этим классическим аппаратом и АОРТ можно продемонстрировать на следующем примере.

Пространственный потенциал, создаваемый электрическим зарядом, расположенным на кривой $l = \{(x^*(t), y^*(t), z^*(t)), 0 \leq t \leq 1\}$ с заданной плотностью $\rho(t)$ дается интегралом Кулона

$$P(x, y, z) = \int_0^1 \frac{\rho(t) dt}{\sqrt{(x - x^*(t))^2 + (y - y^*(t))^2 + (z - z^*(t))^2}}.$$

Для вычисления этого потенциала в большом количестве точек удобно представить подынтегральное выражение в виде суммы какого-то ряда, члены которого были бы произведениями функций от (x, y, z) на функции от t .

Функцию

$$K(x, y, z, t) = \frac{1}{\sqrt{(x - x^*(t))^2 + (y - y^*(t))^2 + (z - z^*(t))^2}}$$

можно разложить по переменной t как в обычный ряд Тейлора в какой-то точке t_0 , так и в АОРТ. Однако область сходимости этих разложений будет различной – классическое разложение будет сходиться только для точек (x, y, z) вне наименьшего шара с центром в точке $(x^*(t_0), y^*(t_0), z^*(t_0))$, содержащего кривую l , а атомарное разложение Тейлора будет сходящимся для всех (x, y, z) , не лежащих на кривой l .

Нахождение приближенного решения интегрального уравнения с использованием атомарного обобщенного ряда Тейлора

Большинство приближенных методов решения линейных интегральных уравнений тем или иным способом сводят эту задачу к задаче решения линейной алгебраической системы, а затем решают эту линейную алгебраическую систему либо прямыми методами типа метода Гаусса либо итерационными методами. Существенными вопросами при этом являются следующие [14-24]:

1. Трудоёмкость вычисления коэффициентов этой системы.

Если рассматривается трехмерная задача, то соответствующее интегральное уравнение является двумерным, т.е. неизвестная функция есть функция двух скалярных переменных, а ядро интегрального оператора – функцией четырех скалярных переменных. При этом каждый коэффициент линейной алгебраической системы имеет вид

$$a_{i,j,k,l} = \int_{S \times S} h_i(u_1) h_j(v_1) K(u_1, v_1, u_2, v_2) \times \\ \times h_k(u_2) h_l(v_2) du_1 dv_1 du_2 dv_2,$$

а число коэффициентов равно $n^2 m^2$, где n, m – число базисных функций в разложении неизвестного решения соответственно по первой и второй переменной по некоторым ортонормированным системам.

При значениях $n = 100, m = 100$, что по порядку характерно для реальных задач, число коэффициентов будет 100 миллионов, т.е. 10^8 , а необходимая оперативная память для их хранения порядка 1 Гб, что тоже вполне реально. Однако вычисление одного 4-кратного интеграла с достаточной точностью может потребовать порядка 10^{12} операций, поскольку при $n = 100, m = 100$ элементы ортонормированных систем с большими номерами будут иметь число перемен знака на отрезке интегрирования тоже порядка 100 и, соответственно, число узлов интегрирования по каждой переменной должно быть порядка 1000, а вычисление всех коэффициентов потребует 10^{20} операций, что уже неприемлемо.

Разложение ядра $K(u_1, v_1, u_2, v_2)$ в АОРТ позволяет значительно упростить эту задачу, сведя ее к вычислению частных производных ядра до заданного порядка в соответствующих точках, а вычисление каждого 4-х кратного интеграла в случае, когда в АОРТ учитываются производные до 4-й производной включительно, что обеспечивает достаточную точность представления ядра, к $3 \cdot 10^6$ опера-

ций перемножения четверок известных чисел (одно-кратных интегралов от произведений базисных функций атомарного обобщенного ряда Тейлора на элементы заданных ортонормированных систем, а эти интегралы известны заранее, причем точно), и к последующему их сложению, т.е. к $4 \cdot 10^6$ операций вместо 10^{12} операций. Если учитывать и пятые производные, то вместо $3 \cdot 10^6$ операций на один коэффициент потребуется $2 \cdot 10^7$. А именно, поскольку в этом случае

$$K(u_1, v_1, u_2, v_2) = \sum_{p,r,s,t} b_{p,r,s,t} \varphi_p(u_1) \times \varphi_r(v_1) \varphi_s(u_2) \varphi_t(v_2),$$

где для простоты записи базисные функции АОРТ записаны с одним индексом $p = (p_1, p_2)$ и т.д., то

$$a_{i,j,k,l} = \int_{S \times S} h_i(u_1) h_j(v_1) \sum_{p,r,s,t} b_{p,r,s,t} \varphi_p(u_1) \times \varphi_r(v_1) \varphi_s(u_2) \varphi_t(v_2) \times h_k(u_2) h_l(v_2) du_1 dv_1 du_2 dv_2 = \sum_{p,r,s,t} b_{p,r,s,t} \int_0^1 h_i(u_1) \varphi_p(u_1) du_1 \int_0^1 h_j(v_1) \varphi_r(v_1) dv_1 \times \int_0^1 h_k(u_2) \varphi_s(u_2) du_2 \int_0^1 h_l(v_2) \varphi_t(v_2) dv_2.$$

Выигрыш появился потому, что вместо кратного интегрирования произведений элементов ортонормированных систем на ядра, которое зависит от геометрии области, мы берем разложение этого ядра в АОРТ, для чего дифференцируем это ядро, что алгоритмически решается точно, и вычисляем значения частных производных в данных точках, после чего задача интегрирования становится тривиальной. Конечно, можно пытаться использовать аналогичным образом и классический ряд Тейлора, однако вопрос об области сходимости такого кратного ряда Тейлора является сложным, т.е. сколько точек разложения брать и где – не вполне понятно.

С теоретической точки зрения альтернатива выглядит так. Погрешность аппроксимации ядра частичными суммами АОРТ ядра интегрального оператора убывает очень быстро, поскольку это ядро очень гладкое для гладких поверхностей или для кусочно гладких поверхностей. В то же время непосредственное вычисление кратных интегралов с малой погрешностью требует применения кубатурных формул высокой точности типа Гаусса высокого порядка. Однако такие формулы являются неустойчивыми.

Кроме того, при необходимости более точного вычисления коэффициентов ЛАС методом непосредственного применения кубатурных формул все

расчеты нужно будет выполнять сначала. В то же время при применении атомарного обобщенного ряда Тейлора (как и всегда при вычислении сумм рядов) к ранее полученным величинам просто добавятся поправки, вычисление которых будет состоять в вычислении следующих производных ядра в данных точках и умножении их на известные интегралы – моменты соответствующих базисных функций. При этом не только объем дополнительных вычислений минимален, но и легко управлять увеличением точности вычислений.

2. Ограничения по объему памяти для хранения коэффициентов линейной алгебраической системы.

Для $n = m = 1000$, что для тел сложной геометрии вполне реально, число элементов матрицы становится равным 10^{12} и требует для хранения оперативной памяти 10 Тб, что пока является нереальным.

Одним из методов преодоления этой трудности является использование для представления решений таких ортонормированных систем (условно говоря, вейвлетоподобных), которые обеспечивают разреженность матрицы ЛАС.

Для ядер интегральных уравнений, которые убывают как минус первая степень расстояния между точками, производные порядка γ будут убывать как минус $\gamma + 1$ -ая степень расстояния между точками, что в сочетании с осцилляциями и малыми носителями ортонормированных систем типа вейвлетов, по которым разлагается неизвестное решение, обеспечит наличие большого числа элементов матрицы ЛАС достаточно малых, чтобы их можно было положить равным 0. Заметим, что поскольку эти элементы матриц вычисляются практически точно, то определение тех из них, которые можно положить равными 0, труда не представляет.

Действительно, для кулоновского ядра

$$K(x, y, z, a) = \frac{1}{\sqrt{(x-x_1)^2 + (y-y_1)^2 + (z-z_1)^2 + a^2}}$$

четвертая производная по переменной x имеет вид

$$\frac{\partial^4 K}{\partial x^4} = \frac{105(x-x_1)^4}{(a^2 + (x-x_1)^2 + (y-y_1)^2 + (z-z_1)^2)^{9/2}} - \frac{90(x-x_1)^2}{(a^2 + (x-x_1)^2 + (y-y_1)^2 + (z-z_1)^2)^{7/2}} + \frac{9}{(a^2 + (x-x_1)^2 + (y-y_1)^2 + (z-z_1)^2)^{5/2}}$$

и, как видно, убывает как $|r|^{-5}$. Это значит, что при использовании атомарного обобщенного разложения Тейлора, содержащего члены до 4-й производной включительно, члены с четвертой производной в точках, удаленных друг от друга, будут относительно очень малы. А члены с четвертой производ-

ной в таком разложении будут составлять половину в одномерном случае, $\frac{3}{4}$ всех членов в двумерном случае. Соответствующие члены матрицы ЛАС будут малыми и могут быть отброшены в случае необходимости.

Возможны и некоторые другие подходы к применению АОПТ к решению интегральных уравнений, возникающих в электродинамике.

Рассмотрим сначала интегральное уравнение первого рода

$$\int_{-L}^L K(x, t)y(t)dt = f(x).$$

Представив его ядро в виде АОПТ

$$K(x, t) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_k \frac{\partial^n K(x, t_{n,k})}{\partial t^n} \varphi_{n,k}(t),$$

получим

$$\sum_{n=0}^{\infty} \sum_k \frac{\partial^n K(x, t_{n,k})}{\partial t^n} \int_{-L}^L \varphi_{n,k}(t)y(t)dt = f(x).$$

Такое представление в случае, когда ядро является потенциалом соответствующего электромагнитного поля, в каком-то смысле напоминает широко используемые быстрые мультиполюсные разложения с той существенной разницей, что при использовании АОПТ выбор расположения мультиполей осуществляется вполне определенным методом, обеспечивающим очень хорошую аппроксимацию, в отличие от обычно используемых методов, относительно которых Санномия и Хафнер [25] отмечают, что «выбор и размещение этих решений, так называемых разложений, зависит от опыта пользователя, а автоматические алгоритмы размещения мультиполей могут быть неоптимальными и не работать в сложных ситуациях».

Обозначим

$$a_{n,k} = \int_{-L}^L \varphi_{n,k}(t)y(t)dt, \quad \chi_{n,k}(x) = \frac{\partial^n K(x, t_{n,k})}{\partial t^n}.$$

Пусть $\mu_{l,m}(x)$ – система функций, биортогональная к системе $\chi_{n,k}(x)$. Тогда имеем

$$a_{l,m} = \int_{-L}^L f(x)\mu_{l,m}(x)dx.$$

Осталось по найденным значениям моментов $a_{l,m}$ восстановить функцию $y(x)$. Для этого используем ортонормированную систему функций $\varphi_{n,k}^0(x)$, полученную ортогонализацией системы базисных функций АОПТ $\varphi_{n,k}(x)$.

Для интегральных уравнений второго рода

$$\int_{-L}^L K(x, t)y(t)dt + y(x) = f(x),$$

аналогичным образом приходим к уравнению

$$\sum_{n=0}^{\infty} \sum_k \chi_{n,k}(x) \int_{-L}^L \varphi_{n,k}(t)y(t)dt + y(x) = f(x). \quad (*)$$

Пусть

$$y(x) = \sum_{s=0}^{\infty} \sum_r c_{s,r} \chi_{s,r}(x),$$

где величины $c_{s,r}$ являются неизвестными и подлежат определению. Умножая обе стороны уравнения (*) на элементы $\mu_{l,m}(x)$ биортогональной к $\chi_{n,k}(x)$ системы и интегрируя, получим бесконечную ЛАС для нахождения коэффициентов $c_{s,r}$

$$c_{l,m} + \sum_{s=0}^{\infty} \sum_r c_{s,r} b_{l,m,s,r} = d_{l,m},$$

где

$$b_{l,m,s,r} = \int_{-L}^L \varphi_{l,m}(t)\chi_{s,r}(t)dt, \quad d_{l,m} = \int_{-L}^L \mu_{l,m}(x)f(x)dx.$$

В точном представлении ядра

$$K(x, t) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_k \frac{\partial^n K(x, t_{n,k})}{\partial t^n} \varphi_{n,k}(t)$$

ограничимся членами, содержащими производные до заданного порядка p включительно. Получим приближенное представление ядра

$$K_p(x, t) = \sum_{n=0}^p \sum_k \frac{\partial^n K(x, t_{n,k})}{\partial t^n} \varphi_{n,k}(t).$$

Соответственно приближенное решение интегрального уравнения будет иметь вид

$$y_p(x) = \sum_{s=0}^p \sum_r c_{s,r} \chi_{s,r}(x),$$

а конечная алгебраическая система для нахождения неизвестных коэффициентов $c_{s,r}$, $0 \leq s \leq p$ будет

$$c_{l,m} + \sum_{s=0}^p \sum_r c_{s,r} b_{l,m,s,r} = d_{l,m}, \quad 0 \leq l \leq p.$$

При этом общее число неизвестных и уравнений NN , т.е. размер ЛАС будет порядка $L2^p$, откуда $p = \log_2(NN/L)$.

Например, при $NN = 10000$, что вполне доступно для ПЭВМ с оперативной памятью 2 Гб для $L = 1$ можем взять $p = 13$, для

$$L = 2, \quad p = 12, \quad L = 10, \quad p = 9, \quad L = 50, \quad p = 7.$$

Для $NN = 200$ и $L = 10$ можем взять $p = 4$, т.е. использовать производные до четвертого порядка включительно, что обеспечит вполне хорошую аппроксимацию.

Функции

$$\chi_{n,k}(x) = \frac{\partial^n K(x, t_{n,k})}{\partial t^n}$$

при больших n имеют достаточно сложный вид и состоят из порядка n слагаемых. Но с использованием систем символьных вычислений вычисление этих функций не является большой проблемой. Для ядер вида

$$K(x, t) = \frac{1}{\sqrt{(x-t)^2 + a^2}}$$

и им подобных вследствие того, что точки $t_{n,k}$, в которых вычисляются производные, равномерно распределены на отрезке $[-L, L]$, функции $\chi_{n,k}(x)$ при малых a будут иметь ярко выраженные экстремумы (пики) при $x = t_{n,k} = k/2^{n-1}$, т.е. эти функции при неравных значениях $k_1 \neq k_2$ будут близки к ортогональности, что облегчит нахождение биортогональной системы $\mu_{l,m}(x)$. Базисные функции АОРТ $\varphi_{n,k}(x)$ не имеют такого свойства (как и базисные функции классического ряда Тейлора $x^n/n!$). Они, наоборот, обладают асимптотикой, т.е. при $n \rightarrow \infty$ эти базисные функции, отвечающие за одну и ту же точку, изменяются в основном по абсолютной величине, а не меняют форму. С одной стороны, это облегчает их вычисление – можно использовать асимптотические формулы, с другой стороны – усложняет ортогонализацию.

Однако с учетом специфики структуры этих базисных функций АОРТ можно построить локальные базисы в пространствах однородных полиномов по этим базисным функциям. Более того, эти локальные базисы можно выбрать так, чтобы биортогональные им обобщенные функции также имели локальные носители. У стандартного базиса в этих пространствах однородных полиномов биортогональные обобщенные функции – это сдвиги производных δ -функции Дирака, т.е. максимально локальны, однако сами функции $\varphi_{n,k}(x)$ не являются локальными. Использование такого модифицированного разложения в атомарный обобщенный локальный ряд Тейлора позволит сократить как объем вычислений, так и объем оперативной памяти. Кроме того, упростится ортогонализация этих обобщенных локальных базисных функций, которая нужна для восстановления решения уравнения по его моментам.

Остановимся теперь на том часто встречающемся случае, когда ядро интегрального уравнения $K(x, t)$ имеет особенность при $x = t$.

Такой вид имеет, например, следующее интегральное уравнение Филлипса для однородного диэлектрика, погруженного в потенциал ϕ^i .

$$\phi^i(\mathbf{r}) = \frac{\varepsilon_r + 1}{2} \phi(\mathbf{r}) + \frac{\varepsilon_r - 1}{4\pi} \oint_S \phi(\mathbf{r}') \frac{\partial}{\partial n'} \left(\frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \right) dS', \mathbf{r} \in S,$$

или интегральное уравнение Робена для плотности заряда на проводнике

$$\rho_S(\mathbf{r}) = \frac{1}{2\pi} \oint_S \rho_S(\mathbf{r}') \frac{\partial}{\partial n} \left(\frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \right) dS', \mathbf{r} \in S,$$

или уравнение Кулона

$$\frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \int_S \frac{\rho_S(\mathbf{r}') dS}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} = \phi_1, \mathbf{r} \in S.$$

Здесь особенность при $\mathbf{r} = \mathbf{r}'$ интегрируемая и можно использовать следующие соображения.

АОРТ пригоден для разложения бесконечно дифференцируемых функций при выполнении следующего условия на рост норм производных

$$\exists \rho \in [1, 2) : \|f^{(n)}\|_{C[-1,1]} \leq c(f) \rho^n 2^{\frac{n(n+1)}{2}}, k = 0, 1, 2, \dots$$

Для любого $\varepsilon > 0$ существует бесконечно дифференцируемая функция $\omega_\varepsilon(x)$, равная нулю вне отрезка $[-\varepsilon, \varepsilon]$ и равная 1 на $[-\varepsilon/2, \varepsilon/2]$, удовлетворяющая этому условию. Тогда ядро

$$K_\varepsilon(x, t) = K(x, t)(1 - \omega_\varepsilon(x - t))$$

не будет иметь особенности и при малых $\varepsilon > 0$ будет близким к исходному ядру. В качестве функции $\omega_\varepsilon(x)$ можно взять, например, функцию $g(x/\varepsilon)/g(0)$, где

$$g(x) = \int_{-\infty}^x (\Xi_7(4t+3) - \Xi_7(4t-3)) dt,$$

а $\Xi_7(x)$ – АФ, введенная В.А. Рвачевым в [26].

Интегральные уравнения Филлипса, Робена, Кулона содержат интегралы по поверхности. Соответствующие ядра интегральных операторов являются функциями 4-х скалярных переменных, по двум из которых производится интегрирование. Таким образом в этом случае будем использовать кратные (двойные) атомарные обобщенные ряды Тейлора.

Для p – старшего порядка частной производной по каждой переменной в случае двойного атомарного ряда Тейлора и общего числа неизвестных NN имеет место соотношение

$$p \approx \frac{1}{2} \log_2 NN,$$

что для $NN = 128 \times 128$ дает $p = 5$. Может быть целесообразным использовать разные старшие порядки производных p_1, p_2 по разным переменным. Тогда получим

$$p_1 + p_2 \approx \log_2 NN.$$

АОРТ может быть применен и для решения интегрального уравнения для определения емкостей пространственных проводников.

Для стандартной трехмерной задачи вычисления емкости плотность заряда вычисляется решением следующего интегрального уравнения первого рода

$$\phi(\mathbf{r}) = \iint_S G(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \rho(\mathbf{r}') d\mathbf{r}'$$

на S , где S обозначает поверхности проводника, $\rho(\mathbf{r})$ – плотность заряда на поверхностях проводника, $\phi(\mathbf{r})$ – потенциал и $G(\mathbf{r}, \mathbf{r}')$ – функция Грина для свободного пространства, которая дается формулой

$$G(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = \frac{1}{4\pi\epsilon_0 |\mathbf{r} - \mathbf{r}'|}.$$

Потенциал на поверхности проводника $\phi(\mathbf{r})$ полагается равным константе, например 1. После нахождения неизвестной плотности заряда $\rho(\mathbf{r})$ общий заряд q получается интегрированием ее по поверхности и емкость проводника $C = q$.

Стандартный подход для решения этого уравнения состоит в применении метода моментов. Разложение ядра этого интегрального уравнения первого рода в АОРТ позволяет описанным выше способом найти атомарные моменты плотности заряда, саму плотность, а затем и емкость.

В качестве ортонормированных систем для представления неизвестного решения предлагается использовать локальные ортогональные системы, построенные на основе ортогонализации сдвиговых локальных базисов в когерентной последовательности атомарных пространств (КПАП) $U P_n \subset U P_{n+1}$ или других КПАП, например, построенных с помощью АФ $\Xi_m(x)$. При этом эти локальные ортогональные базисы (ЛОБ) хорошо согласуются с системами базисных функций соответствующих атомарных обобщенных рядов Тейлора в том смысле, что любой элемент ЛОБ есть конечная линейная комбинация элементов СБФ и наоборот.

Для оценки точности разложений ядер интегральных операторов в АОРТ можно воспользоваться следующей теоремой Т.В.Рвачевой (теорема 1 из [9]):

Теорема. Пусть $f(x) \in H_\rho$, $\rho \in [1, 2)$, и

$$\exists C: |f^{(n)}(x_{n,k})| \leq C r^n n^{\alpha n} \quad \forall n \in \mathbb{N} \quad \forall k \in N_n$$

для некоторого $r > 0$, $\alpha \geq 1$. Тогда справедлива следующая оценка для скорости приближения $f(x)$ частичной суммой ряда (1):

$$\|R_m(x)\|_{C[-1,1]} \leq \frac{C(r, \alpha)}{2^{\frac{m(m+1)}{2} - \alpha m \log_2(m+1) - m \log_2 r}},$$

$$\text{где } R_m(x) = f(x) - \sum_{n=0}^m \sum_{k \in N_n} f^{(n)}(x_{n,k}) \varphi_{n,k}(x).$$

Заметим, что функция $f(x)$ – аналитическая при $\alpha = 1$.

Заключение

Предложены методы приближенного решения интегральных уравнений, возникающих в различных ветвях электродинамики, в частности в теории антенн, на основе использования атомарного обобщенного ряда Тейлора для представления ядер соответствующих операторов.

Литература

1. Говорун, Н.Н. Численное решение интегрального уравнения первого рода для плотности тока в антенне-теле вращения [Текст] / Н.Н. Говорун // ЖВМиМФ. – 1961. – Т. 1, №4. – С. 664-679.
2. Численное моделирование проволочных антенн [Текст] / О.А. Юрцев, А.В. Улановский, Д.В. Заневский, Ю.Ю. Бобков. – Минск: БГУИР. – 2002. – 85 с.
3. Колтон, Д. Методы интегральных уравнений в теории рассеяния [Текст] / Д. Колтон, Р. Кресс. – М.: Мир, 1987. – 312 с.
4. Harrington, R.F. Field Computation by Moment Methods [Text] / R.F. Harrington. – New York: Macmillan, 1968. – 229 p.
5. Harrington, R.F. Time-Harmonic Electromagnetic Fields [Text] / R.F. Harrington. – New York: McGraw-Hill, 1961. – 480 p.
6. Bladel, Van. Electromagnetic Fields [Text] / Van Bladel. – New York: McGraw-Hill, 1964. – 96 p.
7. Рвачев, В.А. О построении мультимодальных многопараметрических экспоненциальных семейств вероятностных законов [Текст] / В.А. Рвачев, Т.В. Рвачева // Радиоэлектронні і комп'ютерні системи. – 2011. – № 4(52). – С. 72–76.
8. Rvachova, T.V. On a relation between the coefficients and the sum of the generalized Taylor series [Text] / T.V. Rvachova // Matematicheskaya fizika, analiz, geometriya. – 2003. – Vol. 10, No. 2. – P. 262–268.
9. Рвачева, Т.В. О скорости приближения бесконечно дифференцируемых функций частичными суммами обобщенного ряда Тейлора [Текст] / Т.В. Рвачева // Вісник ХНУ, сер. «Математика, при-

кладна математика і механіка». – 2010. – № 931. – С. 93–98.

10. Рвачева, Т.В. Об асимптотике базисных функций обобщенного ряда Тейлора [Текст] / Т.В. Рвачева // Вісник ХНУ, сер. «Математика, прикладна математика і механіка». – 2003. – № 602. – С. 94–104.

11. Рвачев, В.А. Об эрмитовой интерполяции с помощью атомарных функций [Текст] / В.А. Рвачев, Т.В. Рвачева // Радіоелектронні і комп'ютерні системи. – 2010. – № 4(45). – С. 100–104.

12. Рвачев, В.А. Обобщенные ряды Тейлора для бесконечно дифференцируемых функций [Текст] / В.А. Рвачев // Мат. методы анализа динамических систем. – 1982. – Вып. 6. – С. 99–102.

13. Рвачев, В.А. Фinitные решения функционально-дифференциальных уравнений и их применение [Текст] / В.А. Рвачев // Успехи мат. наук. – 1990. – Т. 45. – Вып. 1(271). – С. 77–103.

14. Graglia, R.D. Moment method with isoparametric elements for three-dimensional anisotropic scatterers [Text] / R.D. Graglia, P.L.E. Uslenghi, R.S. Zich // Proc. IEEE. – 1989. – Vol. 77. – P. 750-760.

15. Harrington, R.F. Resonant behavior of a small aperture backed by a conducting body [Text] / R.F. Harrington // IEEE Trans. on Antennas and Propagation. – 1982. – Vol. AP-30. – P. 205-212.

16. Mei, K.K. On the integral equations of thin wire antennas [Text] / K.K. Mei // IEEE Trans. on Antennas and Propagation. – 1965. – Vol. AP-13. – P. 374-378.

17. Balanis, C. Advanced Engineering Electromagnetics [Text] / C. Balanis. – John Wiley & Sons, 1989. – 981 p.

18. Peterson, A. Computational Methods for Electromagnetics [Text] / A. Peterson, S. Ray, R. Mittra. – IEEE Press, 1998. – 564 p.

19. Glisson, A.W. An integral equation for electromagnetic scattering from homogeneous dielectric bodies [Text] / A.W. Glisson // IEEE Trans. Antennas Propagat. – 1984. – Vol. AP-32. – P. 173–175.

20. Rokhlin, V. Rapid solution of integral equations of scattering theory in two dimensions [Text] / V. Rokhlin // J. Comput. Phys. – 1990. – Vol. 36, No. 2. – P. 414–439.

21. Lu, C.C. A fast algorithm for solving hybrid integral equation [Text] / C.C. Lu, W.C. Chew // Inst. Elect. Eng. Proc. Pt. H. – 1993. – Vol. 140, No. 6. – P. 455–46.

22. Lu, N. Application of FMM to finite element-boundary integral solution of scattering problems [Text] / N. Lu, J.M. Jin // IEEE Trans. Antennas Propagat. – 1996. – Vol. 44. – P. 781–786.

23. Kim, H. On the application of fast wavelet transform to the integral-equation solution of electromagnetic scattering problems [Text] / H. Kim, H. Ling // Microwave Opt. Tech. Lett. – 1993. – Vol. 6, No. 3. – P. 168–173.

24. Wagner, R.L. A study of wavelets for the solution of electromagnetic integral equations [Text] / R.L. Wagner, W.C. Chew // IEEE Trans. Antennas Propagat. – 1995. – Vol. 43. – P. 802–810.

25. Sannomiya, T. Multiple Multipole Program Modelling for Nano Plasmonic Sensors [Text] / T. Sannomiya, C. Hafner // Journal of Computational and Theoretical Nanoscience. – 2010. – Vol. 7. – P. 1587–1595.

26. Рвачев, В.А. О функциях $\Xi_n(x)$ [Текст] / В.А. Рвачев // Краевые задачи для областей сложной формы. – К.: Ин-т кибернетики АН УССР. – 1973. – С. 42-44.

Поступила в редакцию 28.01.2013, рассмотрена на редколлегии 13.02.2013

Рецензент: д-р физ.-мат. наук, проф., проф. каф. высшей математики А.Г. Николаев, Национальный аэрокосмический университет им. Н.Е. Жуковского «ХАИ», Харьков.

ЗАСТОСУВАННЯ АТОМАРНИХ УЗАГАЛЬНЕНИХ РЯДІВ ТЕЙЛОРА ДО РОЗВ'ЯЗАННЯ ІНТЕГРАЛЬНИХ РІВНЯНЬ ЕЛЕКТРОДИНАМІКИ І ТЕОРІЇ АНТЕН

В.О. Рвачов, Т.В. Рвачова, Є.П. Томілова

Запропоновано методи наближеного розв'язання інтегральних рівнянь, до яких зводиться багато задач електродинаміки, в тому числі задачі теорії антен, за допомогою розкладення ядер цих рівнянь за однією або обома групами змінних в одновимірні чи кратні атомарні узагальнені ряди Тейлора – інтерполяційні ряди біркгофоваго типу, що мають оптимальні властивості з точки зору апроксимації гладких функцій, що побудовані з узагальнених многочленів за зсувами атомарних функцій – спеціальних розв'язків з компакт-

ним носієм звичайних функціонально-диференціальних рівнянь зі сталими коефіцієнтами і лінійними відхиленнями незалежної змінної.

Ключові слова: інтегральні рівняння, теорія антен, електродинаміка, атомарна функція, атомарний узагальнений ряд Тейлора, базисні функції узагальненого ряду Тейлора, локальні ортогональні системи.

APPLICATION OF ATOMIC GENERALIZED TAYLOR SERIES TO SOLVING OF INTEGRAL EQUATIONS OF ELECTRODYNAMICS AND ANTENNA THEORY

V.O. Rvachov, T.V. Rvachova, E.P. Tomilova

Methods are proposed of approximate solving of integral equations to which many problems of electrodynamics including problems of antenna theory are reduced with the help of expansion of kernels of the equations with respect to one or both groups of variables into one-dimensional or multidimensional atomic generalized Taylor series – interpolation series of Birkhoff type, which possess the optimal properties from the point of view of approximation of smooth functions that are constructed with generalized polynomials of shifts of atomic functions – special solutions with compact support of ordinary functional differential equations with constant coefficients and linear transformations of independent variable.

Key words: integral equations, antenna theory, electrodynamics, atomic function, atomic generalized Taylor series, basic functions of the generalized Taylor series, local orthogonal systems.

Рвачев Владимир Алексеевич – доктор физико-математических наук, профессор, главный научный сотрудник кафедры высшей математики, Национальный аэрокосмический университет им. Н.Е. Жуковского «Харьковский авиационный институт», Харьков, Украина, e-mail: rvachov@gmail.com.

Рвачева Татьяна Владимировна – кандидат физико-математических наук, доцент, доцент кафедры высшей математики, Национальный аэрокосмический университет им. Н.Е. Жуковского «Харьковский авиационный институт», Харьков, Украина, e-mail: rvachova@gmail.com.

Томилова Евгения Павловна – старший преподаватель кафедры высшей математики, Национальный аэрокосмический университет им. Н.Е. Жуковского «Харьковский авиационный институт», Харьков, Украина, e-mail: tomilova.evgenia@gmail.com.