

УДК 519.872:004.318

Р.В. АРТЮХ<sup>1</sup>, Д.Э. ЛЫСЕНКО<sup>2</sup><sup>1</sup>Харьковский национальный университет радиоэлектроники, Украина<sup>2</sup>Национальный аэрокосмический университет им. Н.Е. Жуковского "Харьковский авиационный институт", Украина

## МОДЕЛИРОВАНИЕ МАТЕРИАЛЬНЫХ ПОТОКОВ ВНУТРИПРОИЗВОДСТВЕННОЙ ЛОГИСТИКИ

*Работа посвящена математическому моделированию процессов внутрипроизводственной логистики. Построена модель технологического процесса в форме однофазной системы массового обслуживания с параллельными узлами. Получены расчётные формулы для определения ряда характеристик производственного процесса. Моделирование позволяет определить возможности существующего оснащения производственного процесса, оценить его эффективность, выявить "узкие места" и возможные проблемы, связанные с недостаточной производительностью применяемого оборудования или производственными потерями времени.*

**Ключевые слова:** логистика, материальный производственный поток, система массового обслуживания

### Постановка задачи

Упорядоченная последовательность процесса изготовления изделия определяется технологическим процессом и маршрутной документацией (маршрутными картами). Технологическая маршрутизация регламентирует движение материальных производственных потоков на межцеховом и внутрицеховом уровнях и является основой для формирования логистического управления материальными потоками внутренней (производственной) логистики.

Функционально перечень материальных производственных потоков состоит из самостоятельных по своим параметрам потоков и отражает динамику функционирования процессов производства. Так различают потоки заготовок, изделий, инструментов, производственных отходов (стружки) и т.п. В данной работе будут рассматриваться материальные потоки предметов труда с позиции моделирования динамических параметров процессов производства и получения информации для проведения логистического планирования и контроля процессов комплексного материально-технического обеспечения сборочного производства. Обычно используется две основные схемы организации технологических маршрутов – линейная и разветвлённая.

Путём моделирования характеристических свойств материальных потоков можно получить информацию о ходе производственного процесса по целому ряду характеристик технико-экономического характера, таких как:

- среднее время ожидания обработки;
- длина очереди на обработку (объём неза-

вершённого производства);

- коэффициент использования (загрузки) оборудования;

- коэффициент загрузки оборудования по видам работ и т.п.

Учитывая, что производственные процессы в силу ряда возмущающих воздействий внешней среды обладают некоторым уровнем неопределённости, искомые оценки будут носить вероятностный характер. Учитывая эти обстоятельства, моделирование рассматриваемых процессов возможно производить, используя аппарат теории систем массового обслуживания (СМО), интерпретируя общие положения теории в понятиях среды и объекта исследования.

Существуют различные типы задач, представленных различными производственными потоками и анализируемыми моделями СМО [1 – 3]. Все они соответствуют разным структурам, и для их решения применяются разные описания. При этом выполняется допущение, что анализируемый процесс в данный момент является устойчивым и неизменным.

Так, типовые структуры производственных потоков описываются такими моделями массового обслуживания (рис. 1): а) одноканальная многофазная система, представляет собой последовательный пооперационный технологический процесс; б) элемент комбинированной структуры с переходом многоканальной системы в одноканальную, представляет собой модель сборки (объединения); в) – многоканальная однофазная, представляет собой производственный поток контроля и отбраковки по классам.

Для представления технологического процесса

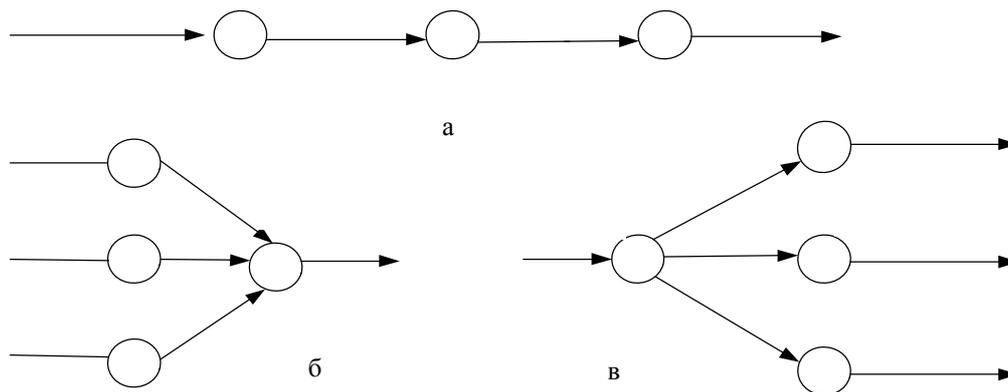


Рис. 1. Типовые структуры производственных потоков

в виде последовательности операций, которые могут выполняться как на одной единице оборудования, так и на нескольких параллельно работающих единицах, интерес представляют характеристики следующих типов СМО:

- однофазная модель одноканальная или многоканальная;
- многофазная одноканальная модель.

Последний тип модели является наиболее общим для представления технологического процесса с учетом того, что при необходимости поток можно распараллелить на однотипных параллельно работающих единицах оборудования при наличии резерва ресурса.

Задачей данной работы является построение модели производственного процесса в форме модели однофазной системы массового обслуживания для получения характеристик рассматриваемого процесса.

### Модель однофазной системы массового обслуживания с параллельными узлами

Конфигурация технологического маршрута определяется технологической документацией и маршрутными картами, регламентирующими последовательность выполнения работ. Конечной целью моделирования маршрутов технологических процессов является решение двух основных задач: оценить ресурсные возможности существующего оснащения и, если есть необходимость, разработать план дооснащения производства по конкретным "узким местам" планируемого производственного процесса и привлечения субконтрактёров по отдельным позициям номенклатуры компонент сборочного производства. Рассмотрим структуру, в которой параллельно функционирует с узлов (единиц оборудования), так что одновременно могут обрабатываться с деталей. При этом единицы оборудования, используемые параллельно для одной технологической операции предполагаются эквивалентными по про-

изводительности. Схематически такая производственная логистическая цепочка поставки компонент сборки изображена на рис. 2 в терминах СМО. Производственным аналогом системы такого типа могут служить технологический процесс штамповки или процедура контроля качества и разбиение входного потока изделий на классы.

На основе этой модели можно определить:

- суммарную производительность блока обслуживания, состоящего из  $n$  параллельных узлов, при которой очередь не превысит заданного значения при различных характеристиках входного потока;
- величину очереди (объём незавершённого производства) на имеющемся оборудовании при различных значениях интенсивности входного потока (объёмов запуска).

Рассмотрим производственную систему маршрутизации материального логистического потока материально-технического обеспечения поставок компонент сборочного процесса на примере модели класса структур  $(M/D/c):(GD/N/\infty)$ . В соответствии с принятыми обозначениями структура характеризует СМО с пуассоновским входным потоком ( $M$ ), фиксированным временем обслуживания ( $D$ ) и с параллельно функционирующими узлами обслуживания [4, 5]. Дисциплина очереди не регламентирована ( $GD$ ). Независимо от того, сколько требований поступает на вход обслуживающей системы, данная система (очередь + обслуживаемые заявки) не может вместить более  $N$  требований (изделий), т.е., заявки, не попавшие в блок ожидания, вынуждены обслуживаться в другом месте (это ограничение на планируемый объём производства).

Источник, порождающий заявки на обслуживание, имеет неограниченную емкость ( $\infty$ ), что соответствует отсутствию ограничения на собственные производственные ресурсы и привлекаемые при необходимости внешние ресурсы.

Будем рассматривать следующие операционные характеристики:

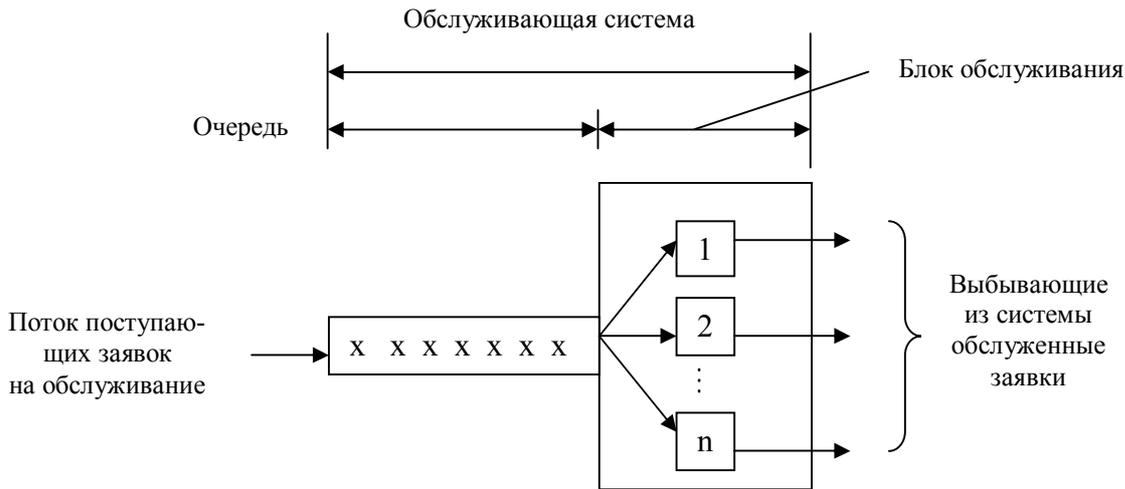


Рис. 2. Схема системы обслуживания с параллельными узлами

$P_n$  - вероятность того, что в процессе обработки находится  $n$  изделий;

$L_s$  - среднее число обрабатываемых изделий (ресурсная характеристика производительности);

$L_q$  - среднее число изделий на промежуточном складе (объем незавершенного производства);

$W_s$  - средняя продолжительность обработки изделия (временная характеристика производительности);

$W_q$  - средняя продолжительность пребывания изделия на промежуточном складе (суммарное непроизводственное время).

По определению

$$L_s = \sum_{n=0}^{\infty} n p_n, L_q = \sum_{n=c}^{\infty} (n - c) p_n. \quad (1)$$

Между  $L_s$  и  $W_s$  (как и между  $L_q$  и  $W_q$ ) существует функциональная зависимость. Если частота поступлений в систему заявок на обслуживание равняется  $\lambda$  (плановая производительность – ритм производства), то мы имеем

$$L_s = \lambda W_s, L_q = \lambda W_q. \quad (2)$$

В тех случаях, когда частота поступлений заявок на обслуживание равняется  $\lambda$ , но не все заявки имеют возможность попасть в обслуживающую систему (например, из-за ограничения на объем промежуточного склада), соотношения (2.7) необходимо видоизменить. Введем параметр  $\lambda_{эфф}$  - эффективная частота поступлений, т.е. количество требований, действительно допущенных в блок ожидания обслуживающей системы, в единицу времени. Будем иметь

$$\lambda_{эфф} = \beta \lambda, 0 < \beta < 1. \quad (3)$$

Можно установить зависимость  $\lambda_{эфф}$  от  $L_s$  и  $L_q$ . По определению, средняя продолжительность технологической операции равна сумме средней

продолжительности пребывания изделия в очереди (на промежуточном складе) и средней продолжительности обработки изделия (использования оборудования). Если средняя скорость обслуживания (количество обработанных изделий) равняется  $\mu$  и, следовательно, средняя продолжительность обслуживания (производительность оборудования) равняется  $1/\mu$ , то справедливо следующее соотношение:

$$W_s = W_q + 1 / \mu. \quad (4)$$

Умножая левую и правую части этого соотношения на  $\lambda$ , получаем

$$L_s = L_q + \lambda / \mu. \quad (5)$$

При этом если  $\lambda$  заменить на  $\lambda_{эфф}$ , можно записать

$$\lambda_{эфф} = \mu(L_s - L_q). \quad (6)$$

При анализе рассматриваемых ниже моделей основное внимание будет сосредоточено на получении формул для  $p_n$ , поскольку, зная  $p_n$ , можно определить значение всех основных операционных характеристик интересующего нас процесса массового обслуживания:

$$p_n \rightarrow L_s = \sum_{n=0}^{\infty} n p_n \rightarrow W_s = \frac{L_s}{\lambda} \rightarrow \\ \rightarrow W_q = W_s - \frac{1}{\mu} \rightarrow L_q = \lambda W_q. \quad (7)$$

Рассматриваемый материальный поток характеризуется интенсивностью  $\lambda$  и тем обстоятельством, что параллельно обрабатываться может не более  $c$  изделий. Средняя продолжительность обработки одного изделия равняется  $1/\mu$ . Входной и выходной потоки являются пуассоновскими. Конечная цель использования  $c$  единиц параллельно работающего оборудования заключается в повышении (по сравнению с одноканальной системой) скорости обработки потока изделий за счет одновременной

обработки с изделий. Таким образом, если  $n = c$ , то интенсивность входного (выходного) потока равняется  $c\mu$ . С другой стороны, если  $n < c$ , то интенсивность входного (выходного) потока составляет  $n\mu < c\mu$ , поскольку при этом занятым обработкой окажется не все оборудование, а лишь  $n (< c)$  единиц. По существу, использование нескольких единиц оборудования эквивалентно использованию одной единицы оборудования, производительность которого варьируется, увеличиваясь при наличии в производстве  $n$  изделий ровно в  $c$  раз.

Рассмотрим обобщенную одноканальную модель, в которой как интенсивность входного потока, так и скорость обслуживания зависят от  $n$ , при этом следует использовать величины  $\lambda_n$  и  $\mu_n$ . Получим формулу для вычисления стационарных значений  $p_n$ . Полагая

$$\mu_n = n\mu, \text{ при } n < c \text{ или } \mu_n = c\mu, \text{ при } n \geq c,$$

можно получить числовые оценки для функциональных характеристик системы. При заданных значениях  $\lambda_n$  и  $\mu_n$  после нахождения значения  $p_n$  можно получить результаты для маршрутных потоков других типов.

При наличии в системе  $n$  требований для одноканальной модели справедливы следующие утверждения:

а) если не происходит ни одного поступления,  $p_n = 1 - \lambda_n h$ ,

б) если не происходит ни одного выбытия,  $p_n = 1 - \mu_n h$ .

С учетом того, что в интервале  $h$  может произойти максимум одно событие (поступление или выбытие), находим

$$p_n(t+h) \approx p_n(t)(1 - \lambda_n h)(1 - \mu_n h) + p_{n-1}(t)\lambda_n h(1 - \mu_n h) + p_{n+1}(t)(1 - \lambda_n h)\mu_n h, \quad (8) \\ n > 0,$$

$$p_0(t+h) \approx p_0(t)(1 - \lambda_0 h)(1 - \mu_n h) + p_1(t)(1 - \lambda_1 h)\mu_n h, \quad n = 0. \quad (9)$$

Для стационарного режима получим следующие уравнения:

$$-(\lambda_n + \mu_n)p_n + \mu_{n+1}p_{n+1} + \mu_{n-1}p_{n-1} = 0, \quad n > 0, \\ -\lambda_0 + \mu_1 p_1 = 0, \quad n = 0. \quad (10)$$

Эти уравнения можно привести к виду:

$$p_1 = \lambda_0 p_0 / \mu_1, \\ p_{n+1} = \left( \frac{\lambda_n + \mu_n}{\mu_{n+1}} \right) p_n - \left( \frac{\lambda_{n-1}}{\mu_{n+1}} \right) p_{n-1}, \quad n > 0. \quad (11)$$

Рассматривая последовательно уравнения для  $p_1, p_2, p_3, \dots$  и рассуждая по схеме индукции, приходим к формулам:

$$p_n = \frac{\lambda_0 \lambda_1 \dots \lambda_{n-1}}{\mu_1 \mu_2 \dots \mu_n} p_0, \quad n \geq 1, \\ p_0 = \frac{1}{1 + \sum_{n=0}^{\infty} \prod_{i=1}^n \frac{\lambda_{i-1}}{\mu_i}}. \quad (12)$$

Выражение для  $p_0$  получено из условия  $\sum p_n = 1$ . Для оценки операционных характеристик многоканальной модели учтем, что

$$\lambda_n = \lambda, \text{ для всех } n \geq 0, \\ \mu_n = \begin{cases} n\mu, & \text{при } n \leq c, \\ c\mu, & \text{при } n \geq c. \end{cases} \quad (13)$$

Из выражения для  $p_n$ , выведенного для одноканальной модели при  $n \leq c$ :

$$p_n = \frac{\lambda^n}{\mu(2\mu)(3\mu)\dots(n\mu)} p_0 = \frac{\lambda^n}{n! \mu^n} p_0. \quad (14)$$

В случае, когда  $n \geq c$ , формула принимает следующий вид:

$$p_n = \frac{\lambda^n}{\mu(2\mu)\dots(c-1)\mu(c\mu)\underbrace{(c\mu)\dots(c\mu)}_{n-c}} p_0 = \\ = \frac{\lambda^n}{c! c^{n-c} \mu^n} p_0. \quad (15)$$

Полагая  $\rho = \lambda/\mu$ , находим

$$p_n = \begin{cases} \left( \frac{\rho^n}{n!} \right) p_0, & 0 \leq n \leq c, \\ \left( \frac{\rho^n}{c^{n-c} c!} \right) p_0, & n > c, \end{cases} \quad (16) \\ p_0 = \left\{ \frac{\rho^n}{n!} + \frac{\rho^c}{c!(1-\rho/c)} \right\}^{-1},$$

где  $\rho/c < 1$  (или  $\lambda/\mu c < 1$ ).

Теперь

$$L_q = \frac{\rho^{c+1}}{(c+1)!(c-\rho)^2} p_0 = \left( \frac{c\rho}{(c-\rho)^2} \right) p_c, \quad (17) \\ L_s = L_q + \rho, \quad W_q = \frac{L_q}{\lambda}, \quad W_s = W_q + \frac{1}{\mu}.$$

Для приближенного метода нахождения  $p_0$  и  $L_q$  (при  $\rho \ll 1$ ) можно записать

$$p_0 \approx 1 - \rho, \quad L_q \approx \rho^{c+1} / c^2. \quad (18)$$

Таким образом, получены расчётные формулы для определения операционных характеристик производственного процесса.

## Заключення

Статья посвящена задаче математического моделирования процессов внутрипроизводственной логистики. Показано, что для моделирования материальных логистических потоков целесообразно использовать модели теории систем массового обслуживания.

Построена модель технологического процесса в форме однофазной системы массового обслуживания с параллельными узлами. Приведена схема производственной логистической цепочки. Получены расчётные формулы для определения ряда характеристик производственного процесса.

Моделирование позволяет определить возможности существующего оснащения производственного процесса, оценить его эффективность, выявить "узкие места" и возможные проблемы в обработке изделий, связанные с недостаточной производительностью применяемого оборудования или непроизводственными потерями времени.

Результаты работы могут быть использованы при разработке систем планирования и управления логистическим обеспечением производства.

## Литература

1. Николайчук, В.Е. Теория и практика управления материальными потоками (логистическая концепция) [Текст] / В.Е. Николайчук, В.Г. Кузнецов. – Донецк: ДонГУ, КИТИС, 1999. – 413 с.
2. Плоткин, Б.К. Экономико-математические методы и модели в логистике [Текст] / Б.К. Плоткин, Л.А. Делюкин. – СПб.: Изд-во СПбГУЭФ, 2010. – 96 с.
3. Попов, А.В. Использование численных методов оптимизации и систем массового обслуживания при моделировании процессов логистики [Текст] / А. В. Попов, К. А. Аксенов, А. А. Бубеницкова // Имитационное моделирование. Теория и практика: Сборник докладов четвертой всероссийской научно-практической конференции ИММОД-2009. – Том 1. – СПб.: ОАО «ЦТСС», 2009. – С. 166-170.
4. Клейнрок, Л. Теория массового обслуживания [Текст] / Л. Клейнрок. – М.: Машиностроение, 1979. – 432 с., ил.
5. Лабскер, Л.Г. Теория массового обслуживания в экономической сфере [Текст] / Л.Г. Лабскер, Л.О. Бабешко. – М.: ЮНИТИ, 1998. – 319 с.

*Поступила в редакцию 20.02.2013, рассмотрена на редколлегии 27.02.2013*

**Рецензент:** д-р техн. наук, проф., заведующий кафедрой стратегического управления И.В. Кононенко, Национальный технический университет «Харьковский Политехнический Институт», г. Харьков

## МОДЕЛЮВАННЯ МАТЕРІАЛЬНИХ ПОТОКІВ ВНУТРІВИРОБНИЧОЇ ЛОГІСТИКИ

*Р.В. Артюх, Д.Е. Лысенко*

Робота присвячена математичному моделюванню процесів внутрівиробничої логістики. Побудовано модель технологічного процесу у формі однофазної системи масового обслуговування з паралельними вузлами. Отримано розрахункові формули для визначення ряду характеристик виробничого процесу. Моделювання дозволяє визначити можливості існуючого оснащення виробничого процесу, оцінити його ефективність, виявити "вузькі місця" і можливі проблеми, пов'язані з недостатньою продуктивністю застосовуваного устаткування або невиробничих втрат часу.

**Ключеві слова:** логістика, матеріальний виробничий потік, система масового обслуговування.

## MATERIAL FLOW SIMULATION IN INTRAPRODUCTIVE LOGISTICS SYSTEM

*R. V. Artyukh, D. E. Lysenko*

This work is dedicated to the mathematical modeling of the processes in intraproductive logistics. A model of the technological process in the form of a single-phase queuing system with parallel nodes is formed. Calculation formulas for determining the number of characteristics of the production process are obtained. Modeling allow to determine the potential of the existing equipment of the production process, to estimate its effectiveness, identify "bottlenecks" and potential problems associated with the lack of performance of the equipment, or non-productive loss time.

**Keywords:** logistics, material production flow, queuing system.

**Артюх Роман Владимирович** – младший научный сотрудник центра информационных систем и технологий, Харьковский национальный университет радиоэлектроники, Украина.

**Лысенко Дмитрий Эдуардович** – канд. техн. наук, доцент, доцент кафедры менеджмента, Национальный аэрокосмический университет им. Н.Е. Жуковского "Харьковский авиационный институт", Украина.