

УДК 621.391.1

А.Н. ДЕГТЯРЕВ

Севастопольский национальный технический университет, Украина

БЫСТРО СХОДЯЩИЕСЯ ОРТОГОНАЛЬНЫЕ РЯДЫ В ТЕОРИИ СВЯЗИ

В работе предлагается метод представления сигналов в базисе эквидистантных функций, спектральная плотность которых зависит от энергетического спектра сигнала. Рассмотрен метод ортогонализации базисных функций путем определения веса ортогональности. Предложенный метод позволяет улучшить сходимость ряда, описывающего сигнал, ввести понятие количества степеней свободы сигналов и получить выражение для пропускной способности физически реализуемого канала связи. Ортогонализация сигналов, с помощью которых передается информация, позволяет исключить межсимвольную интерференцию и межканальные помехи. Введение физически осуществимых базисных функций исключает противоречие, связанное с одновременным ограничением длительности сигнала и ширины его спектра.

Ключевые слова: сигнал, физически реализуемые функции, спектральная плотность, ортогонализация, базис, весовая функция, число степеней свободы, пропускная способность, канал связи, межсимвольная интерференция, межканальные помехи.

Введение

Многие задачи теории и техники связи связаны с представлениями функций в ортогональных координатных базисах. Скорости сходимости рядов уделяется особое внимание. Известно, что быструю сходимость рядов обеспечивает разложение Карунена-Лоева-Пугачева (К-Л-П-разложение) [1]. Однако практическое вычисление базисных функций К-Л-П-разложения затруднительно [2].

В настоящее время широкое распространение получают разложения временных рядов с помощью вейвлет-преобразований, координатные функции которых «похожи» на исследуемый процесс. Недостатком вейвлетов является то, что из них в большинстве случаев нельзя построить ортогональные базисы.

Известная процедура ортогонализации Грамма-Шмидта, позволяя получить ортогональный базис из системы линейно-независимых функций, искажает форму исходных функций, что во многих практических задачах недопустимо.

В основе теории связи К. Шеннона лежит известная теорема дискретизации, которая позволяет разложить функцию с ограниченным спектром в ортогональный ряд по функциям отсчетов. Однако функции отсчетов физически не реализуемы, что в ряде случаев приводит к существенным систематическим погрешностям, которые воспринимаются как межканальные помехи и межсимвольная интерференция.

Невозможность физически реализовать функции отсчетов также привела к противоречивости

современной теории связи, в которой рассматриваются сигналы с ограниченной спектральной плотностью и длительностью.

Целью настоящей работы является разработка метода представления сигналов в виде ортогональных рядов по физически реализуемым функциям, который не приводит к противоречивости теории связи и устраняет указанные систематические погрешности.

Для достижения поставленной цели сформулированы и решены следующие задачи:

1. выбор линейно независимых функций для формирования ортогонального базиса и его обоснование;
2. разработка метода ортогонализации линейно независимых функций путем определения веса их ортогональности;
3. проверка непротиворечивости метода известным математическим положениям;
4. получение новых систем ортогональных функций;
5. определение числа слагаемых в усеченной сумме ряда, достаточного для описания исследуемого процесса с помощью полученного базиса;
6. выработка рекомендаций по применению предложенного математического аппарата в теории передачи информации.

1. Выбор базисных функций

Пусть реализация случайного сигнала $x(t)$ длительностью T представляется в виде суммы

$$x(t) = \sum_{k=1}^N y_k \phi_k(t), \quad (1)$$

где y_k – случайные коэффициенты разложения $x(t)$ по функциям $\phi_k(t)$, ортогональным с весом $h(t)$:

$$y_k = \int_0^T x(t)\phi_k(t)h(t)dt \quad (2)$$

Определим $\phi_k(t)$, которые минимизируют среднюю квадратическую ошибку (СКО) представления случайного сигнала суммой (1) [3].

Иными словами, найдем $\phi_k(t)$, которые минимизируют функционал

$$I = M \left\{ \int_0^T \left[x(t) - \sum_{k=1}^N y_k \phi_k(t) \right]^2 h(t) dt \right\}, \quad (3)$$

где $M\{\dots\}$ – математическое ожидание.

Поскольку $\phi_k(t)$ и $h(t)$ являются детерминированными функциями, а $x(t)$ и y_k – соответственно случайная функция и случайные величины, то функционал (3) можно представить в виде

$$I = \int_0^T \left[M\{x^2(t)\}h(t) - 2h(t)M\left\{x(t)\sum_{k=1}^N \phi_k(t)y_k\right\} + M\left\{\left[\sum_{k=1}^N y_k \phi_k(t)\right]^2\right\}h(t) \right] dt.$$

С учетом выражения (2), а также того, что $D_x(t) = M\{x(t)x(t)\}$ и $M\{x(t)x(\tau)\} = R_x(t, \tau)$ – дисперсия и корреляционная функция сигнала соответственно, $M\{y_k y_n\} = \sigma_{nk}^2$ – взаимные дисперсии величин y_k и y_n , а $\phi_k(t)$ ортогональны с весовой функцией $h(t)$, запишем функцию Лагранжа, соответствующую функционалу (3):

$$L = D_x(t)h(t) - 2h(t)\sum_{k=1}^N \phi_k(t) \int_0^T R_x(t, \tau)\phi_k(\tau)h(\tau) d\tau + h(t)\sum_{k=1}^N \sigma_{kk}^2 \phi_k^2(t).$$

Приравняем производную L по $\phi_k(t)$ к нулю

$$\frac{dL}{d\phi_k(t)} = -2h(t) \int_0^T R_x(t, \tau)\phi_k(\tau)h(\tau) d\tau + 2h(t)\sigma_{kk}^2 \phi_k(t) = 0,$$

и получим равенство, которому должны удовлетворять функции $\phi_k(t)$:

$$\int_0^T R_x(t, \tau)\phi_k(\tau)h(\tau) d\tau = \sigma_{kk}^2 \phi_k(t), \quad (4)$$

где $\sigma_{kk}^2 = \sigma_k^2$ – дисперсии коэффициентов разложения y_k реализации сигнала $x(t)$ по функциям $\phi_k(t)$.

Таким образом, дисперсии коэффициентов разложения σ_k^2 должны быть обратны собственным числам, а базисные функции $\phi_k(t)$ должны являться собственными функциями ядра $R_x(t, \tau)h(t)$ интегрального уравнения

$$\lambda \int_0^T R_x(t, \tau)\phi_k(\tau)h(\tau) d\tau = \phi_k(t).$$

Дисперсия ε_a^2 аппроксимации случайного сигнала конечной суммой ряда, состоящего из N слагаемых, определяется как:

$$\varepsilon_a^2 = M \left\{ \int_0^T \left[x(t) - \sum_{k=0}^N y_k \phi_k(t) \right]^2 h(t) dt \right\} = \sum_{k=N+1}^{\infty} \sigma_k^2.$$

Предположим, что $x(t)$ является реализацией эргодического случайного сигнала, которую можно представить в виде ряда $x(t) = \sum_{k=0}^{\infty} y_k \phi_k(t)$.

Определим корреляционную функцию сигнала

$$\begin{aligned} R_x(\tau) &= \int_{-\infty}^{\infty} x(t)x(\tau-t) dt = \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} y_k \phi_k(t) \sum_{n=0}^{\infty} y_n \phi_n(\tau-t) dt = \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} y_k y_n R_{kn}(\tau) = \\ &= R_x(\tau) \sum_{k=0}^{\infty} y_k^2 + \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{\substack{n=0 \\ k \neq n}}^{\infty} y_k y_n R_{kn}(\tau), \end{aligned} \quad (5)$$

где $R_{kn}(\tau)$ – взаимные корреляционные функции базисных функций.

Сформируем из функций $\phi_k(t)$ ортогональный с весом $h(\tau)$ базис следующим образом. Пусть $\phi_0(t)$ имеет изображение по Лапласу, которое представляет собой минимально-фазовую функцию $\Phi_0(p)$, то есть $\Phi_0(p)$ является аналитической и не имеет нулей и полюсов в правой половине комплексной плоскости.

Остальные функции базиса получим путем смещения $\phi_0(t)$ на величину $k\alpha$, т.е. $\phi_k(t) = \phi_0(t - k\alpha)$. Сформированную таким образом

систему функций будем называть базисом с минимально-фазовым спектром (МФС-базисом) [3].

Покажем, что функции МФС-базиса удовлетворяют равенству (5).

Спектральная плотность функций $\phi_k(t)$, составляющих МФС-базис, имеет вид:

$$\Phi_k(j\omega) = \Phi_0(j\omega) e^{j[\theta_0(\omega) - \alpha k \omega]}, \quad (6)$$

где $\theta_0(\omega)$ – аргумент спектральной плотности функции $\phi_0(t)$.

С учетом (6) получим прямое преобразование Фурье от выражения (5)

$$W_x(\omega) = \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} y_k y_n \Phi_0^2(\omega) e^{j\alpha[n-k]\omega}, \quad (7)$$

где $W_x(\omega)$ – энергетический спектр рассматриваемого сигнала, $\Phi_0(\omega)$ – модуль спектральной плотности функции $\phi_0(t)$.

Положим

$$\Phi_0(\omega) = \sqrt{W_x(\omega)}, \quad (8)$$

тогда из выражения (7) будем иметь

$$1 = \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} y_k y_n e^{j\alpha[n-k]\omega}. \quad (9)$$

Произведем в (9) группировку слагаемых:

$$\begin{aligned} 1 = & (y_0^2 + y_1^2 + y_2^2 + \dots) + \\ & + e^{j\alpha\omega} (y_0 y_1 + y_1 y_2 + y_2 y_3 + \dots) + \\ & + e^{j2\alpha\omega} (y_0 y_2 + y_1 y_3 + y_2 y_4 + \dots) + \dots + \\ & + e^{j(n-m)\alpha\omega} \times \end{aligned} \quad (10)$$

$$\times (y_n y_m + y_{n+1} y_{m+1} + y_{n+2} y_{m+2} + \dots) + \dots$$

Из (10) следует, что коэффициенты при экспонентах и единице представляют собой значения корреляционной функции дискретного случайного процесса

$$Y = (y_0, y_1, y_2, y_3, \dots, y_n, \dots). \quad (11)$$

Поскольку единица и комплексные экспоненты с кратными частотами представляют собой систему ортогональных функций, то равенство (9) выполняется только тогда, когда в выражении (10) все коэффициенты при экспонентах равны нулю, а

$$\sum_{k=0}^{\infty} y_k^2 = 1.$$

Таким образом, если принять $\Phi_0(\omega) = \sqrt{W_x(\omega)}$, то будет выполняться равенство (5), базисные функции будут решениями уравнения (4), а коэффициенты y_k получаются не коррелированными между собой [3].

2. Метод ортогонализации линейно независимых функций путем определения веса ортогональности

Определим вес ортогональности МФС-базиса.

Теорема 1 [4]. Пусть заданы системы линейно независимых функций $\phi_1(t), \phi_2(t), \dots, \phi_N(t)$ и

$l_1(t), l_2(t), \dots, l_k(t)$, тогда, если $k = \frac{N(N+1)}{2}$ и систе-

ма уравнений

$$\left\{ \begin{aligned} & b_1 \int_0^T \phi_1^2(t) l_1(t) dt + b_2 \int_0^T \phi_1^2(t) l_2(t) dt + \dots + \\ & + b_k \int_0^T \phi_1^2(t) l_k(t) dt = 1, \\ & b_1 \int_0^T \phi_1(t) \phi_2(t) l_1(t) dt + b_2 \int_0^T \phi_1(t) \phi_2(t) l_2(t) dt + \dots + \\ & + b_k \int_0^T \phi_1(t) \phi_2(t) l_k(t) dt = 0, \\ & \dots \\ & b_1 \int_0^T \phi_N^2(t) l_1(t) dt + b_2 \int_0^T \phi_N^2(t) l_2(t) dt + \dots + \\ & + b_k \int_0^T \phi_N^2(t) l_k(t) dt = 1. \end{aligned} \right.$$

имеет решение относительно b_i , то функция

$$h(t) = \sum_{i=1}^k b_i l_i(t),$$

является весом ортогональности функций $\phi_1(t), \phi_2(t), \dots, \phi_N(t)$.

Теорема 2 [4]. Вес, оптимальный по условию минимума своей энергии $I[h(t)] = \int_0^T h^2(t) dt$, пред-

ставляет собой квадратичную форму от ортогонализуемых функций:

$$\begin{aligned} h(t) = & \lambda_{00} \phi_0^2(t) + \lambda_{01} \phi_0(t) \phi_{01}(t) + \dots + \\ & + \lambda_{11} \phi_1^2(t) + \lambda_{12} \phi_1(t) \phi_2(t) + \dots + \\ & + \lambda_{nm} \phi_n(t) \phi_m(t) + \dots \end{aligned} \quad (12)$$

Для того чтобы определить множители λ_{nm} , достаточно подставить выражение (12) в условия ортогональности функций $\phi_i(t)$

$$\int_0^T \phi_n(t) \phi_m(t) h(t) dt = \begin{cases} 1, n = m, \\ 0, n \neq m. \end{cases} \quad (13)$$

Теорема 3 [4]. Энергия веса, равна сумме множителей λ_{nm} , стоящих в выражении (12) при квадратах функций

$$\int_0^T h^2(t)dt = \sum_{i=0}^{\infty} \lambda_{ii}. \quad (14)$$

Можно показать, что если система линейно независимых функций, состоит из бесконечного числа функций вида $\phi_i(t) = \phi(t + \alpha_i)$ и $\alpha_i = \alpha \cdot i$ ($i = 0, 1, 2, \dots$), т.е. все функции системы эквидистантны, то весовая функция имеет вид периодической функции с периодом α [4]:

$$\begin{aligned} h(t) = & \dots + \lambda_0 \phi_0^2(t) + \lambda_1 \phi_0(t)\phi_1(t) + \dots + \lambda_0 \phi_1^2(t) + \\ & + \lambda_1 \phi_1(t)\phi_2(t) + \dots + \lambda_0 \phi_2^2(t) + \dots = \lambda_0 \sum_{n=-\infty}^{\infty} \phi_n^2(t) + \\ & + \lambda_1 \sum_{n=-\infty}^{\infty} \phi_n(t)\phi_{n+1}(t) + \lambda_2 \sum_{n=-\infty}^{\infty} \phi_n(t)\phi_{n+2}(t) + \dots + \\ & + \lambda_m \sum_{n=-\infty}^{\infty} \phi_n(t)\phi_{n+m}(t) + \dots \end{aligned}$$

3. Проверка непротиворечивости метода ортогонализации

Покажем, что предложенный метод ортогонализации распространяется на все виды линейно независимых функций на примере полиномов Чебышева [5]. Согласно предложенному методу оптимальный по условию минимума энергии вес ортогональности функций $T_n(x)$ должен иметь вид

$$h(x) = \sum_{i=j=0}^{\infty} \lambda_{ij} T_i(x) T_j(x). \quad (15)$$

Принимая во внимание свойства произведения данных полиномов, получаем

$$h(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \beta_n T_n(x), \quad (16)$$

где β_n – некоторые постоянные коэффициенты.

С учетом области определения функции $\arccos(x)$ и свойств произведения полиномов $T_n(x)$, условия ортогональности полиномов Чебышева с весом $h(x)$ можно переписать в виде

$$\begin{cases} \beta_0 \int_{-1}^1 T_0(x) dx + \sum_{n=1}^{\infty} \beta_n \int_{-1}^1 T_n(x) dx = c_0, \\ \frac{1}{2} \sum_{n=0}^{\infty} \beta_n \int_{-1}^1 T_{n-k}(x) dx + \frac{1}{2} \sum_{n=0}^{\infty} \beta_n \int_{-1}^1 T_{n+k}(x) dx = 0, \quad k \neq 0. \end{cases}$$

Поскольку $\int_{-1}^1 \cos(n \arccos x) dx = -\frac{1+(-1)^n}{n^2-1}$,

и n – четное число, получаем

$$\sum_{n=0}^{\infty} \beta_n \left[\frac{1}{4(n-k)^2-1} + \frac{1}{4(n+k)^2-1} \right] = \begin{cases} c_0, & k=0, \\ 0, & k \neq 0. \end{cases} \quad (17)$$

Используя признаки существования решений бесконечных систем алгебраических уравнений, заключаем, что система уравнений (17) имеет сходящееся решение.

На рис. 1 изображены графики весовых функций, полученные для первых десяти и двадцати полиномов $T_n(x)$, и представлен график функции

$\frac{1}{\pi\sqrt{1-x^2}}$. Как видно из данного рисунка, можно говорить о том, что полученные весовые функции при увеличении количества полиномов $T_n(x)$ сходятся к функции

$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$, которая в таком случае является весом, оптимальным по условию минимума энергии.

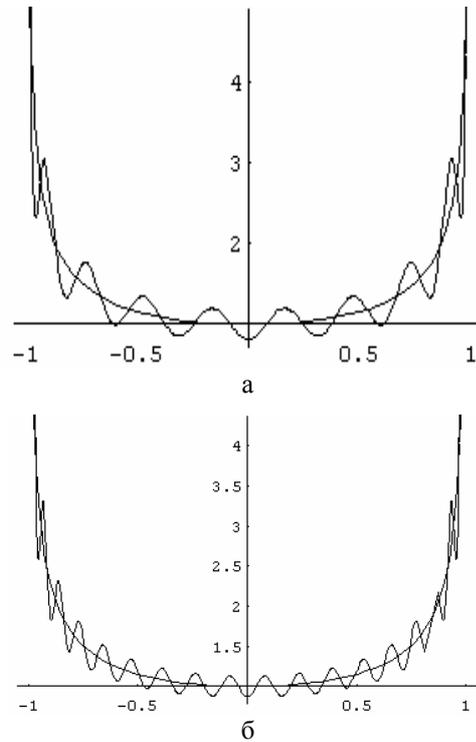


Рис. 1. Графики функции $\frac{1}{\pi\sqrt{1-x^2}}$ и весовых функций, вычисленных для:

- а) первых 10-ти полиномов $T_n(x)$,
- б) первых 20-ти полиномов $T_n(x)$

В работе [5] получена система бесконечных алгебраических уравнений для определения веса ортогональности полиномов Эрмита. Как и в случае с полиномами Чебышева, вес ортогональности полиномов Эрмита сходится к известному для данных функций весу.

4. Новые системы ортогональных функций

Используя представленный метод ортогональности можно доказать следующие теоремы.

Теорема 4 [5]. Бесконечномерный базис, с координатными функциями вида

$$\phi_n(t) = \frac{\sin \pi(t - \alpha n)}{\pi(t - \alpha n)},$$

которые ортогональны с весом, имеющим минимальную энергию, существует при целых α (что совпадает с теоремой отсчетов В.А. Котельникова), нецелых $\alpha > 1$ и не существует при $\alpha < 1$.

Теорема 5 [5]. Функции вида

$$\phi_m(t) = \frac{\sin^n \pi(t - m)}{\pi^n(t - m)^n},$$

где n – целое число, ортогональны на бесконечном интервале изменения аргумента с весом

$$h(t) = \frac{n - 1 + (-1)^{n-1}}{2} \sum_{i=1}^4 a_i (\sin \pi t)^{i - \frac{1 + (-1)^{i-1}}{2}},$$

где a_i – коэффициенты тригонометрического полинома.

Теорема 6 [5]. Моменты весовой функции определяют не только систему ортогональных полиномов, но и саму эту весовую функцию.

В работе [5] показано, что для функций Бесселя можно получить условия ортогональности в виде

$$\int_{x_1}^{x_2} J_{\nu(n)}(x) J_{\mu(m)}(x) h(x) dx = \begin{cases} 0, \nu(n) \neq \mu(m), \\ q_\nu, \nu(n) = \mu(m), \end{cases} \quad (18)$$

где $\nu(n)$ и $\mu(n)$ – порядок функций Бесселя (такое обозначение введено для того, чтобы показать, что порядок может быть как полуцелым, так целым числом), x_1 и x_2 – пределы интегрирования, которые могут быть приняты для функций Бесселя полуцелых порядков как $x_1 = 0$, $x_2 = \infty$, а для функций Бесселя целых порядков $x_1 = -\infty$, $x_2 = \infty$.

Вес ортогональности, входящий в условия (18), может быть представлен в виде ряда

$$h(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{x^{2n}}.$$

5. Дискретизация сигналов с ограниченным спектром

Предложенный метод ортогонализации функций позволяет доказать ряд теорем о дискретизации идеальных сигналов, т.е. сигналов с ограниченным спектром.

Лемма 1 [6]. Если функции отсчетов $\phi_n(t) = \frac{\sin(\omega_m t - n\pi)}{(\omega_m t - n\pi)}$ можно разложить в ряд по эквидистантным функциям $s_k(t)$, причем

$$\phi_n(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \phi_n(k\beta) s_k(t), \quad (19)$$

где β – некоторый параметр, $n=0,1,2,\dots$, то тогда для любой функции с ограниченным спектром существует ряд по выборкам $f(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} f(k\beta) s_k(t)$.

Теорема 7 [6]. Любую функцию $f(t)$ с ограниченным спектром, который определен на интервале $(-\omega_m, \omega_m)$, можно представить в пространстве, определяемом базисными функциями

$$u_k(t) = \frac{\sin^2(\frac{\omega_m}{2} t - k\pi)}{(\frac{\omega_m}{2} t - k\pi)^2},$$

$$f(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} f(k \frac{2\pi}{\omega_m}) \frac{\sin^2(\frac{\omega_m}{2} t - k\pi)}{(\frac{\omega_m}{2} t - k\pi)^2} =$$

$$= 2 \sum_{k=-\infty}^{\infty} f(\frac{k}{F_m}) \frac{1 - \cos \omega_m(t - \frac{k}{F_m})}{\omega_m^2(t - \frac{k}{F_m})^2}. \quad (20)$$

Теорема 8 [10]. Функции

$$u_k(t) = \frac{\sin 2\pi(\alpha t - k)}{2\pi(\alpha t - k)} + \frac{\sin^2 \pi(\alpha t - k)}{\pi^2(\alpha t - k)},$$

где α – некоторый параметр, ортогональны на бесконечном интервале с единичным весом.

Теорема 9 [6]. Функцию, имеющую спектр, ограниченный интервалом $(-\omega_m, \omega_m)$, можно представить в виде ряда

$$f(t) = \frac{\sqrt{\pi^2 + 1}}{\omega_m} e^{\text{j arctg} \frac{1}{\pi}} \sum_{k=-\infty}^{\infty} f(\frac{2\pi k}{\omega_m}) \times \left[\frac{\sin(\omega_m t - 2\pi k)}{\omega_m t - 2\pi k} + \frac{\sin^2(\frac{\omega_m}{2} t - \pi k)}{\pi(\frac{\omega_m}{2} t - \pi k)} \right]. \quad (21)$$

Как следует из теорем 7 и 9 частота дискретизации может быть снижена в 2 раза по сравнению с частотой, предлагаемой теоремой отсчетов.

Ошибка аппроксимации сигналов с ограниченным спектром конечными суммами рядов (20) и (21) определяется выражением (3).

6. Сходимость рядов, составленных из МФС-базиса, и число степеней свободы сигнала

Рассмотрим физически реализуемый случайный сигнал. Пусть реализация сигнала $x(t)$ раскладывается в ряд по функциям МФС-базиса

$$x(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} y_n \phi_n(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} y_n \phi_0(t - n\alpha). \quad (22)$$

Прямое преобразование Фурье от выражения (22) имеет вид

$$X(\omega) e^{j\vartheta(\omega)} = \Phi_0(\omega) e^{j\theta_0(\omega)} \sum_{n=-\infty}^{\infty} y_n e^{-j\omega n \alpha}, \quad (23)$$

где $X(\omega)$ и $\vartheta(\omega)$ – случайные функции, которые можно считать модулем и аргументом спектральной плотности реализации сигнала $x(t)$.

Тогда, если $X(\omega) = \Phi_0(\omega) = \sqrt{W_x(\omega)}$, то

$$e^{j[\vartheta(\omega) - \theta(\omega)]} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} y_n e^{-j\omega n \alpha}. \quad (24)$$

Определение. Числом степеней свободы сигнала будем называть эффективное количество коэффициентов ряда (22) [7]

$$N = \frac{\sqrt{\sum_{n=-\infty}^{\infty} n^2 y_n^2}}{\sqrt{\sum_{n=-\infty}^{\infty} y_n^2}} = \sqrt{\sum_{n=-\infty}^{\infty} n^2 y_n^2}. \quad (25)$$

Известно, что если функция имеет непрерывную вторую производную, то коэффициенты ее ряда Фурье y_n таковы, что

$$|y_n| \leq \frac{C}{n^2},$$

где C – максимальное значение модуля второй производной данной функции [8].

Выражение (24) является разложением в ряд Фурье функции $e^{j[\vartheta(\omega) - \theta(\omega)]}$. Примем $\Delta\theta(\omega) = \vartheta(\omega) - \theta(\omega)$ и найдем условия, при которых модуль второй производной функции $e^{j\Delta\theta(\omega)}$ максимален [7].

$$\left| \frac{d^2}{d\omega^2} e^{j\Delta\theta(\omega)} \right| = \sqrt{[\Delta\theta'(\omega)]^4 + [\Delta\theta''(\omega)]^2}. \quad (26)$$

Выражение (26) имеет экстремум, если $\Delta\theta''(\omega) = 0$, (27)

или

$$[\Delta\theta'(\omega)]^4 + [\Delta\theta''(\omega)]^2 = 0, \quad (28)$$

или

$$2[\Delta\theta'(\omega)]^3 + \Delta\theta'''(\omega) = 0. \quad (29)$$

Решения дифференциального уравнения (27) имеют вид $\Delta\theta(\omega) = A_1\omega + A_2$, где A_i – постоянные интегрирования. Поскольку функция $\Delta\theta(\omega)$ является аргументом функции $e^{j\Delta\theta(\omega)}$, то она должна быть нечетной, и

$$-\frac{\pi}{2} < \Delta\theta(\omega) < \frac{\pi}{2}.$$

Следовательно, $A_2 = 0$, и решение дифференциального уравнения (27) имеет вид

$$\Delta\theta(\omega) = A_1\omega. \quad (30)$$

Построив график функции $\Delta\theta(\omega) = \arctg[\tg\{A_1\omega\}]$ для различных значений A_1 , можно убедиться, что A_1 равно числу точек разрыва функции $\Delta\theta(\omega)$ на интервале $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$.

Формула (30) соответствует сигналу $x(t)$, имеющему спектральную плотность вида

$$X(j\omega) = F_0(j\omega) \sum_{n=-\infty}^{\infty} y_n e^{-j\omega n \alpha} = F_0(j\omega) e^{jA_1\omega},$$

т.е. $\sum_{n=-\infty}^{\infty} y_n e^{-j\omega n \alpha} = e^{j(A_1\omega + A_2)} = e^{jA_1\omega}$ и ряд (24)

состоит из одного слагаемого, причем $A_1 = -\alpha k$, где k – целое число, коэффициент $y_k = 1$.

Дифференциальное уравнение (28) имеет решение, если одновременно $\Delta\theta'(\omega) = 0$ и $\Delta\theta''(\omega) = 0$, но это означает, что $\Delta\theta(\omega) = A$, где A – некоторая постоянная. Учитывая, что аргумент спектральной плотности является функцией нечетной, получаем $A = 0$, $X(j\omega) = F_0(j\omega)$. Данный случай аналогичен предыдущему. Ряд (24) состоит из одного слагаемого – самой функции $X(j\omega)$. Дифференциальное уравнение (29) имеет 4 решения, среди которых только два вещественных:

$$\Delta\theta(\omega) = A, \quad (31)$$

$$\Delta\theta(\omega) = C_1 + C_2 \sin\left(\frac{1}{2^6}\omega\right) + C_3 \cos\left(\frac{1}{2^6}\omega\right), \quad (32)$$

Формула (31) аналогична решению уравнения (27) ($A = 0$). Рассмотрим выражение (32). Поскольку $\Delta\theta(\omega)$ является нечетной функцией, то $C_1 = C_3 = 0$, и функция

$$\Delta\theta(\omega) = C_2^2 \sin\left(\frac{1}{2^6}\omega\right) \quad (33)$$

обеспечивает максимальное значение выражения (26), которое принимает вид

$$\left| \frac{d^2}{d\omega^2} e^{j\Delta\theta(\omega)} \right| = 2^{\frac{1}{3}} \sqrt{C_2^4 \cos^4 \frac{1}{2^6}\omega + C_2^2 \sin^2 \frac{1}{2^6}\omega}.$$

Данное выражение представляет собой периодическую функцию, максимальное значение которой равно

$$\max \left| \frac{d^2}{d\omega^2} e^{j\Delta\theta(\omega)} \right| = 2^{\frac{1}{3}} C_2^2.$$

Следовательно, $|y_n| \leq 2^{\frac{1}{3}} \frac{C_2^2}{n^2}$.

Найдем сумму $\sum_{n=-\infty}^{\infty} n^2 y_n^2$, стоящую под знаком корня в выражении (25), и определим зависимость числа степеней свободы сигнала от параметра C_2 .

Подставив (33) в (24), получим

$$e^{jC_2 \sin(2^{\frac{1}{6}} \omega)} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} y_n e^{-j\omega n \alpha}. \quad (34)$$

Как известно [9], для функций Бесселя первого рода справедливы соотношения:

$$e^{jC_2 \sin(\alpha\omega)} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} J_n(C_2) e^{j\omega n \alpha},$$

$$J_{-n}(C_2) = (-1)^n J_n(C_2),$$

используя которые, из равенства (34) получаем:

$$e^{jC_2 \sin(2^{\frac{1}{6}} \omega)} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} (-1)^n J_n(C_2) e^{-j\omega n 2^{\frac{1}{6}}}. \quad (35)$$

Сравнивая правые части (34) и (35), находим, что $\alpha = 2^{\frac{1}{6}}$ и $y_n = (-1)^n J_n(C_2)$.

Известно [9], что общий член асимптотического разложения функции Бесселя первого рода при больших значениях порядка ($n \rightarrow \infty$) имеет вид

$$J_n(C_2) \sim \frac{1}{\sqrt{2\pi n}} \left(\frac{eC_2}{2n} \right)^n.$$

Следовательно, описание сигнала в МФС-базисе обеспечивает более высокую скорость сходимости ряда (22), чем разложение в ряд по другим функциям (скорость сходимости таких рядов обратно пропорциональна целой степени n).

Определим число степеней свободы сигнала

$$N = \sqrt{\sum_{n=-\infty}^{\infty} n^2 y_n^2} = \sqrt{\sum_{n=-\infty}^{\infty} n^2 [(-1)^n J_n(C_2)]^2} = \sqrt{\sum_{n=-\infty}^{\infty} n^2 J_n(C_2)^2}. \quad (36)$$

Просуммировав ряд, стоящий под знаком квадратного корня, получим [7]:

$$N = \frac{C_2}{2} \sqrt{2 + J_1^2(C_2)}. \quad (37)$$

Следовательно, число степеней свободы сигнала зависит от постоянной интегрирования C_2 .

Построив график функции $\Delta\theta(\omega) = \arctg\{\operatorname{tg}\Delta\theta(\omega)\}$, можно убедиться, что

$C_2 = \frac{\pi}{2} A$, где A – целое число, связанное с числом

R точек разрыва функции $\Delta\theta(\omega)$ соотношением

$$R = A - \frac{1 + (-1)^{A-1}}{2}.$$

При большом значении R можно принять $R = A$.

Таким образом, число слагаемых в сумме ряда (число степеней свободы), достаточных для описания сигнала зависит от числа точек разрыва функции $\Delta\theta(\omega) = \arctg\{\operatorname{tg}\Delta\theta(\omega)\}$ на интервале $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$.

7. Пропускная способность физически реализуемого канала связи

Пусть $x(t)$ – принимаемый сигнал, раскладываемый по функциям МФС-базиса в соответствии с формулой (1), в которой величина N понимается в смысле (37). Для вывода формулы пропускной способности канала связи повторим последовательность рассуждений К. Шеннона, описанную в работе [10].

Энергия сигнала $x(t)$ описывается формулой

$$E_x = \int_0^T x^2(t) h(t) dt = q \sum_{n=1}^N y_n^2, \quad (38)$$

где $q = \int_0^T \phi_n^2(t) h(t) dt$, T – длительность сигнала

$x(t)$. Все передаваемые сигналы имеют одинаковую энергию. В N -мерном базисе расстояние от начала координат до данной точки равно

$$d = \sqrt{\sum_{n=1}^N y_n^2}. \quad \text{Тогда из (38) имеем } d^2 = \frac{E_x}{q} = \frac{P_x T}{q},$$

где $P_x = \frac{E_x}{T}$ – мощность сигнала.

Принятые сигналы имеют среднюю мощность

$$P_x + P_n \quad (P_n = \frac{1}{T} \int_{-\infty}^{\infty} K^2(f) N_0 df \text{ – мощность шума,}$$

$K(f)$ – амплитудно-частотная характеристика канала связи, N_0 – спектральная плотность мощности

белого шума) или среднюю энергию $(P_x + P_n) \frac{T}{q}$

и должны лежать на поверхности сферы радиуса

$\sqrt{\frac{T}{q}(P_x + P_n)}$. Различимых сигналов будет не больше, чем объем N -мерной сферы радиуса $\sqrt{\frac{T}{q}(P_x + P_n)}$, деленной на объем сферы радиуса $\sqrt{\frac{T}{q}P_n}$. Т.е. количество различимых сигналов равно $\left(\sqrt{\frac{P_x + P_n}{P_n}}\right)^N$. Отсюда следует, что максимальная

скорость передачи информации равна

$$C = \frac{\log_2 \left(\sqrt{\frac{P_x + P_n}{P_n}} \right)^N}{T} = \frac{N}{2T} \log_2 \left(\frac{P_x + P_n}{P_n} \right).$$

С учетом выражения для мощности шума в канале связи имеем [11]:

$$C = \frac{N}{2T} \log_2 \left(1 + \frac{\int_{t_1}^{t_2} x^2(t)h(t)dt}{\int_{t_1}^{t_2} K^2(f)N_0df} \right). \quad (39)$$

8. Исключение межканальных помех

Пусть в трех соседних каналах связи передаются сигналы $x_1(t)$, $x_2(t)$ и $x_3(t)$ соответственно. Эти сигналы с помощью соответствующих систем линейно-независимых функций $\psi_n(t)$, $\phi_n(t)$ и $\xi_n(t)$ могут быть представлены в виде рядов [12]:

$$\begin{cases} x_1(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} b_n \psi_n(t), \\ x_2(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n \phi_n(t), \\ x_3(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n \xi_n(t). \end{cases} \quad (40)$$

Системы функций $\psi_n(t)$, $\phi_n(t)$ и $\xi_n(t)$ получим как МФС-базисы сигналов $x_1(t)$, $x_2(t)$ и $x_3(t)$, и потребуем выполнения условий

$$\begin{cases} \int_{-\infty}^{\infty} \phi_n(t)\phi_k(t)h(t)dt = \begin{cases} 1, n = k, \\ 0, n \neq k, \end{cases} \\ \int_{-\infty}^{\infty} \phi_n(t)\psi_k(t)h(t)dt = 0, \text{ при любых } n \text{ и } k, \\ \int_{-\infty}^{\infty} \phi_n(t)\xi_k(t)h(t)dt = 0, \text{ при любых } n \text{ и } k, \end{cases} \quad (41)$$

где

$$\begin{aligned} h(t) = & \sum_{n=-\infty}^{\infty} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \lambda_{nk} \phi_n(t)\phi_k(t) + \\ & + \sum_{n=-\infty}^{\infty} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \mu_{nk} \phi_n(t)\psi_k(t) + \\ & + \sum_{n=-\infty}^{\infty} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \eta_{nk} \phi_n(t)\xi_k(t). \end{aligned} \quad (42)$$

Коэффициенты λ_{nk} , μ_{nk} , η_{nk} определяются после подстановки (42) в (41).

Поскольку $\psi_n(t)$, $\phi_n(t)$ и $\xi_n(t)$ являются эквидистантными функциями, то $h(t)$ представляет собой периодическую функцию.

Выделим сигнал $x_2(t)$ из аддитивной смеси $y(t) = x_1(t) + x_2(t) + x_3(t)$. Для этого умножим $y(t)$ на произведение $\phi_n(t)h(t)$, проинтегрируем результат и, используя условия (41), получим

$$\int_{-\infty}^{\infty} y(t)\phi_n(t)h(t)dt = a_n.$$

Таким путем можно получить все коэффициенты разложения $x_2(t)$ в ряд по $\phi_n(t)$. Увеличив $\phi_n(t)$ в a_n раз, и сложив все произведения $a_n\phi_n(t)$, получим сигнал $x_2(t)$.

9. Исключение межсимвольной интерференции

Межсимвольную интерференцию в каждом из каналов связи можно устранить, ортогонализовав сигналы, соответствующие символам сообщения [12]

$$\begin{aligned} & \int_{-\infty}^{\infty} x_2(t)\phi_k(t)h(t)dt = \\ & = \int_{-\infty}^{\infty} \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n \phi_n(t)\phi_k(t)h(t)dt = a_k. \end{aligned}$$

Заключение

Предложенный метод ортогонализации функций, основанный на определении веса ортогональности позволяет сохранить форму ортогонализуемых функций. Применение МФС-базиса, связанного с исследуемой функцией, позволяет обеспечить высокую скорость сходимости ортогонального ряда. Приведенные вычисления позволяют заключить, что предложенный метод полностью согласуется с классическим аппаратом теории специальных функций.

На основании разработанного метода ортогонализации можно построить физически реализуе-

мые системы передачи информации, в которых существенно снижаются межканальные помехи и межсимвольная интерференция, а также уточнить некоторые положения существующей теории связи.

Литература

1. Пугачев В.С. Теория случайных функций и ее применение к задачам автоматического управления / В.С. Пугачев. – М.: Гос. изд. физ.-мат. лит., 1960. – 883 с.
2. Свириденко В.А. Анализ систем со сжатием данных / В.А. Свириденко. – М.: Связь, 1977. – 184 с.
3. Дегтярев А.Н. Быстро сходящиеся ортогональные ряды / А.Н. Дегтярев // Прикладные задачи математики и механики: Матер. XVII международной научн. конф., Севастополь 14 – 18 сент. 2009 г. – Севастополь, 2009. – С. 244-251.
4. Агаханянц Р.Е. Об одном методе ортогонализации функций / Р.Е. Агаханянц, А.Н. Дегтярев // Вестник СевГТУ (Физика и математика). – 2005. – №70. – С. 158-167.
5. Дегтярев А.Н. Дополнительные свойства специальных функций / А.Н. Дегтярев // Вестник СевГТУ (Физика и математика). – 2007. – №85. – С. 105 – 114.
6. Дегтярев А.Н. Дискретизация сигналов с ограниченным спектром / А.Н. Дегтярев // Проблемы повышения эффективности электромеханических

преобразователей в электроэнергетических системах: Матер. Междунар. науч.-техн. конф. Севастополь, 24-28 сент. 2007 г. – Севастополь, 2007. – С. 124-129.

7. Дегтярев А.Н. Количество степеней свободы физически реализуемого сигнала / А.Н. Дегтярев, Р.Е. Агаханянц // Зв'язок. – 2008. – № 2(70). – С. 64-68.
8. Джексон Д. Ряды Фурье и ортогональные полиномы / Д. Джексон. – М.: Гос. изд. иностр. лит., 1948. – 260 с.
9. Бейтмен Г. Высшие трансцендентные функции. Функции Бесселя, функции параболического цилиндра, ортогональные многочлены / Г. Бейтмен, А. Эрдейи. – М. Наука, 1974. – 296 с.
10. Шеннон К.Э. Математическая теория связи / в кн.: Работы по теории информации и кибернетике / К.Э. Шеннон. – М.: ИЛ, 1963. – С. 243-332.
11. Дегтярев А.Н. Пропускная способность физически реализуемого канала связи / А.Н. Дегтярев // Праці УНДІРТ. – 2005. – №2 (42). – С. 32-37.
12. Дегтярев А.Н. Об одном методе фильтрации сигналов / А.Н. Дегтярев, А.А. Дегтярев // Проблемы повышения эффективности электромеханических преобразователей в электроэнергетических системах: Матер. Междунар. науч.-техн. конф. Севастополь, 21-25 сент. 2009 г. – Севастополь, 2009. – С. 89-92.

Поступила в редакцию 25.02.2010

Рецензент: д-р техн. наук, проф. Э.Ф. Бабуров, проф. кафедры радиотехники Севастопольского национального технического университета, Украина.

ОРТОГОНАЛЬНІ ЛАВИ, ЩО ШВИДКО СХОДЯТЬСЯ, В ТЕОРІЇ ЗВ'ЯЗКУ

А.М. Дегтярьов

У роботі пропонується метод представлення сигналів у базисі еквідистантних функцій, спектральна щільність яких залежить від енергетичного спектру сигналу. Розглянут метод ортогоналізації базисних функцій шляхом визначення ваги ортогональності. Запропонований метод дозволяє поліпшити збіжність лави, що описує сигнал, ввести поняття кількості мір свободи сигналів і отримати вираження для пропускну спроможності каналу зв'язку, що фізично реалізується. Ортогоналізація сигналів, за допомогою яких передається інформація, дозволяє виключити міжсимвольну інтерференцію і міжканальні перешкоди. Введення фізично здійснених базисних функцій виключає суперечність, що пов'язана з одночасним обмеженням тривалості сигналу і ширини його спектру.

Ключові слова: сигнал, функції, що фізично реалізуються, спектральна щільність, ортогоналізація, базис, вагова функція, число мір свободи, пропускна спроможність, канал зв'язку, міжсимвольна інтерференція, міжканальні перешкоди.

QUICKLY CONVERGING ORTOGONAL ROWS IN COMMUNICATION THEORY

A.M. Degtyarev

The method of signals description by physically implemented functions which depends on the power spectrum of signal is offered. The orthogonalizing base functions method by determination of weight is described. This method allows to enter the concept of amount degrees freedom signals and to get expression for the communication channel capacity. Signals orthogonalizing eliminates intercharacter interference and interchannel hindrances. Introduction of feasible base functions is eliminated by contradiction, which related to limitation of duration signal and width spectrum.

Keywords: signal, physically implemented functions, spectral concentrations, orthogonalization, basic, weight function, quantity of freedom, throughput of communication channel, intersymbol interference, interchannel interference.

Дегтярев Андрей Николаевич – канд. техн. наук, доцент кафедры Судовых и промышленных электромеханических систем Севастопольского национального технического университета, Севастополь, Украина, e-mail: sevlana2008@yandex.ru.