

УДК 621.396

А.Д. АБРАМОВ, Т.И. МОСКАЛЕНКО, Т.А. ПЕТРУНИНА, А.М. ВЕТОШКО

Национальный аэрокосмический университет им. Н.Е. Жуковского «ХАИ», Украина

ИСПОЛЬЗОВАНИЕ ИНВАРИАНТНЫХ СТАТИСТИК ДЛЯ ОЦЕНКИ ЧАСТОТЫ ИСКАЖЕННОЙ ГАРМОНИКИ

В работе решение задачи по оцениванию частоты комплексной гармоники проведено посредством сжатия размерности вектора входных данных при использовании методологии максимального правдоподобия. Синтезирован квазиоптимальный тест оценивания частоты комплексной гармоники, наблюдаемой на фоне гауссовских шумов, инвариантный к мультипликативным изменениям в пределах интервала наблюдения интенсивности сигнала. Эффективность разработанного теста и предложенной методологии решения подобного типа задач подтверждена результатами экспериментальных исследований, проведенных на уровне цифрового моделирования при различных законах искажения амплитуды гармоники, энергетических соотношениях сигнал/помеха и при различном числе временных отсчетов информационного сигнала.

Ключевые слова: оценивание, комплексная гармоника, сжатие размерности, инвариантная статистика, методология максимального правдоподобия, мультипликативные изменения.

Введение

Синтез алгоритмов для эффективного оценивания частоты сигнала является одной из актуальных задач радиотехнической и диагностической практики [1].

Ограничения и трудности использования известных тестов оценивания указанного параметра комплексных гармоник, базирующихся на традиционных принципах, хорошо известны практикам: концепция постоянной в пределах интервала наблюдения интенсивности не всегда может быть обоснована [2].

В настоящей работе решение задачи по оцениванию частоты комплексной гармоники проведено посредством сжатия размерности вектора входных данных при использовании методологии максимального правдоподобия. Синтезирован квазиоптимальный тест оценивания частоты комплексной гармоники, наблюдаемой на фоне гауссовских шумов, инвариантный к мультипликативным изменениям в пределах интервала наблюдения интенсивности сигнала.

Пусть наблюдаемый в дискретные моменты времени $i\Delta t$ ($i = 0, 1, \dots, L - 1$) процесс

$$U_i = \hat{A}e^{j2\pi f i \Delta t} + \hat{n}_i, U_i (i = \overline{0, L-1}), \quad (1)$$

содержит аддитивную смесь сигнальной (первое слагаемое) и помеховой \hat{n}_i составляющих. Здесь \hat{A} – комплексная амплитуда сигнала, связанная с интенсивностью $|\hat{A}|$ и начальной фазой φ гармоники соотношением $\hat{A} = |A| \exp(j\varphi)$, f – неизвестная частота

сигнала из диапазона $f \in (-F, F)$, \hat{n}_i – i -й отсчет узкополосного гауссовского комплексного случайного процесса с нулевым средним и постоянной в пределах полосы $f \in (-F, F)$ спектральной интенсивностью $N_0/2$, $\Delta t = 1/(2F)$ – интервал дискретизации.

Требуется, используя вектор наблюдения $U^T = (\hat{U}_0, U_1, \dots, U_{L-1})$ (“T” – знак транспонирования) получить максимально правдоподобную оценку частоты f при неизвестных $|\hat{A}|$, φ и дисперсии $\sigma^2 = F \cdot N_0$ помех.

При указанных исходных данных логарифм функции правдоподобия $\ln W(U|\hat{A}, \varphi)$ определится равенством

$$\ln W(U|\hat{A}, \varphi) = -L \ln(2\pi\sigma^2) - \frac{1}{2\sigma^2} \sum_{i=0}^{L-1} |U_i - \hat{A}e^{j2\pi f i \Delta t}|^2. \quad (2)$$

Ведем в рассмотрение вектор ϑ , составленный по правилу

$$\vartheta^T = (U_0, U_1, \dots, U_{L-1}, U_0^*, U_1^*, \dots, U_{L-1}^*). \quad (3)$$

Пусть $\hat{\lambda} = \exp(j2\pi f \Delta t)$ является корнем характеристического полинома $g(\hat{\lambda}^p)$

$$g(\hat{\lambda}^p) = \hat{C}_{0p} + C_{1p} \hat{\lambda}^p = 0, (p = \overline{1; 0,5L}). \quad (4)$$

Из условия (4) вытекает, что линейное преобразование $\tilde{T}U$ над вектором U равно

$$\tilde{T}_p U = \varepsilon. \quad (5)$$

Здесь блочная матрица \tilde{T}_p размерности $\dim \tilde{T}_p = (L \times 2L)$ связана с диагональной

$$\tilde{C}_{np} = \text{diag}(\hat{C}_{np}, \hat{C}_{np}, \dots, \hat{C}_{np}), (n = 0, 1),$$

и нулевой $\tilde{\theta}$ матрицами размерностью $(L \times L)$ соотношением

$$\tilde{T}_p = \begin{bmatrix} \tilde{c}_{0p} \cdots \tilde{c}_{1p} \cdots \tilde{\theta} \cdots \tilde{\theta} \\ \tilde{\theta} \cdots \tilde{\theta} \cdots \tilde{c}_{1p} \cdots \tilde{c}_{0p} \end{bmatrix}. \quad (6)$$

Случайный комплексный L -мерный гауссов вектор ε имеет следующие статистические характеристики:

$$\langle \varepsilon \rangle = 0, \quad \langle \varepsilon \varepsilon^+ \rangle = 2\sigma^2 T_p T_p^+ \quad (7)$$

(“+” – знак эрмитового сопряжения).

С учетом линейного преобразования (5) функцию правдоподобия $W(\vartheta/C_p)$ вектора ϑ , относительно вектора $C_p^T = (\tilde{c}_{0p}, \tilde{c}_{1p})$ определим так:

$$W(\vartheta/C_p) = \frac{1}{(2\pi\sigma^2)^L} \exp \left\{ -\frac{1}{2\sigma^2} C_p^+ \tilde{\Psi}_p^+ \tilde{\Psi}_p C_p \right\}. \quad (8)$$

При записи (8) использовано тождество

$$\tilde{T}_p U = \tilde{\Psi}_p C_p, \quad (9)$$

где

$$\tilde{\Psi}_p = \begin{bmatrix} \dot{U}_0 & \dot{U}_{0,5L} \\ \dot{U}_1 & \dot{U}_{0,5L+1} \\ \dots & \dots \\ \dot{U}_{0,5L-1} & \dot{U}_{L-1} \\ \dots & \dots \\ \dot{U}_{0,5L}^* & \dot{U}_0^* \\ \dot{U}_{0,5L+1}^* & \dot{U}_1^* \\ \dots & \dots \\ \dot{U}_{L-1}^* & \dot{U}_{0,5L-1}^* \end{bmatrix}. \quad (10)$$

Условие максимизации (8) при $\|C_p\|^2 = 1$ сводится к минимизации по C_p формы $C_p^+ \tilde{\Psi}_p^+ \tilde{\Psi}_p C_p$.

Минимум указанной формы достигается, когда $C_p = u$, где u – собственный вектор, соответствующий минимальному собственному числу θ эрмитовой матрицы $\tilde{\Psi}_p^+ \tilde{\Psi}_p = R$.

$$R = \begin{bmatrix} \sum_{i=0}^{L-1} |\dot{U}_i|^2 & 2 \sum_{i=0}^{0,5L-1} \dot{U}_i^* \dot{U}_{i+0,5L} \\ 2 \sum_{i=0}^{0,5L-1} \dot{U}_i \dot{U}_{i+0,5L}^* & \sum_{i=0}^{L-1} |\dot{U}_i|^2 \end{bmatrix}. \quad (11)$$

Таким образом, технология максимального правдоподобия для оценивания \hat{f} частоты f сводится к вычислению минимального собственного числа θ и соответствующего ему собственного вектора u матрицы (11), элементы \tilde{c}_{0p} и \tilde{c}_{1p} которой являются максимально правдоподобными оценками (МП-оценками) коэффициентов полинома (4) [3]. Корень полинома $g(\hat{\lambda}^p)$ определяет оценку $\hat{\lambda}^p$, которая, в свою очередь, при $p = 0,5L$ позволяет из соотношения

$$\hat{f} = \frac{1}{2\pi \cdot 0,5L \Delta t} \left\{ \arctg \frac{\text{Im} \hat{\lambda}^{0,5L}}{\text{Re} \hat{\lambda}^{0,5L}} + \pi n \right\}, \quad (12)$$

$$n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$$

вычислить значение \hat{f} частоты наблюдаемого процесса.

Из (12) следует, что МП-оценка \hat{f} определяется неоднозначно. Для исключения указанного факта можно использовать «итерационный» подход, получая последовательно оценки $\hat{\lambda}^p$ для $p = 1, 2, \dots$ – грубые, но однозначные оценки, позволяющие при формировании значения \hat{f} из (12) разрешить неоднозначность.

Особенности образования (5), связанные с формированием МП-оценок коэффициентов квалификационного полинома (4), указывают на робастность синтезированного алгоритма (12) к изменениям интенсивности сигнальной компоненты процесса (1).

Для подтверждения теоретических выводов приведем результаты исследований, полученные на уровне цифрового статистического эксперимента. Моделирование проводилось для различных L и отношениях сигнал/шум $g = |\dot{A}|^2 / 2\sigma_0^2$. Процедура моделирования повторялась при 100 независимых реализациях шума. Последовательность данных наблюдений содержала $L = 16, 32, 64$ эквидистантных отсчетов суммы комплексной синусоиды с $\dot{A} = 1$, $f = 10$ Гц при $\Delta t = 0,0125$ с и комплексного некоррелированного гауссовского шума с нулевым математическим ожиданием и соответствующей дисперсией.

По 100 реализациям вектора помех были получены выборочные математические ожидания $\langle \hat{f} \rangle$ и дисперсии σ^2 оценок частоты синусоиды при различных значениях $g = |\dot{A}|^2 / 2\sigma_0^2$. Результаты представлены в табл. 1.

На рис. 1 – 3 показан характер зависимости математического ожидания $\langle \hat{f} \rangle$ от отношения сигнал/шум g при $L = 16, 32, 64$ соответственно.

Кривые рис. 4 иллюстрируют проигрыш дисперсии оценок \hat{f} (кривая 1) по отношению к дисперсии эффективных оценок (кривая 2) для $L = 16$.

Рис. 5 иллюстрирует изменение качества оценивания при $L = 16$ без мультипликативных помех (кривая 1) и с мультипликативными помехами (кривая 2).

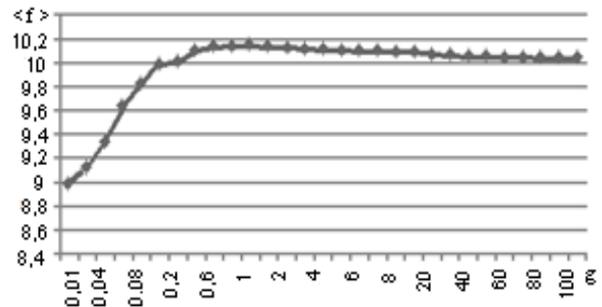


Рис. 1. Зависимость математического ожидания $\langle \hat{f} \rangle$ от отношения сигнал/шум g при $L=16$

Таблица 1

Оценки параметров синусоиды при различных значениях отношения сигнал/шум g

L	16		32		64	
	g					
0,01	8,9887	1,0227	9,4176	0,3392	9,7216	0,0775
0,02	9,1193	0,7756	9,4926	0,2574	9,7625	0,0564
0,04	9,3269	0,4530	9,6299	0,1369	9,7995	0,0402
0,06	9,6278	0,1385	9,73	0,073	9,8197	0,0325
0,08	9,8176	0,033	9,7809	0,0480	9,8697	0,0169
0,1	9,9852	0,0002	9,8321	0,0282	9,8899	0,0121
0,2	10,002	5,8E-0	9,8886	0,0124	9,9181	0,0067
0,4	10,100	0,010	9,8977	0,0105	9,9317	0,0046
0,6	10,125	0,0158	9,9136	0,0075	9,9499	0,0025
0,8	10,134	0,0180	9,9278	0,0052	9,96	0,0016
1	10,137	0,0187	9,931	0,0048	9,9664	0,0012
2	10,130	0,0171	9,9501	0,0025	9,9804	0,0004
4	10,112	0,0127	9,9776	0,0005	9,9885	0,0001
6	10,100	0,0101	9,9813	0,0004	9,9914	7,4E-05
8	10,092	0,0083	9,9836	0,0003	9,993	4,9E-05
10	10,085	0,0071	9,9852	0,0002	9,9941	3,5E-05
20	10,065	0,0042	9,9893	0,0001	9,9963	1,4E-05
30	10,055	0,003	9,9911	8E-05	9,9972	7,9E-06
40	10,049	0,0024	9,9923	6E-05	9,9976	5,8E-06
50	10,045	0,0019	9,9931	5E-05	9,9979	4,4E-06
60	10,041	0,0016	9,9937	4E-05	9,9982	3,2E-06
80	10,036	0,0013	9,9945	3E-05	9,9985	2,3E-06
100	10,033	0,0010	9,9951	2E-05	9,9987	1,7E-06

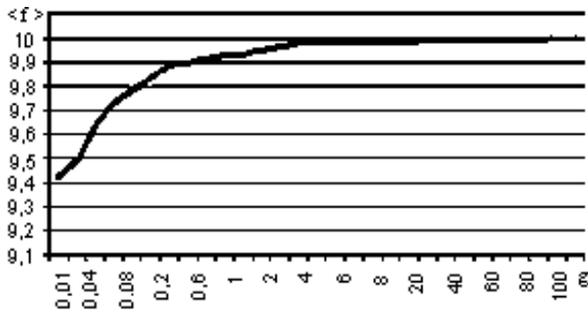


Рис. 2. Зависимость математического ожидания от отношения сигнал/шум g при $L = 32$

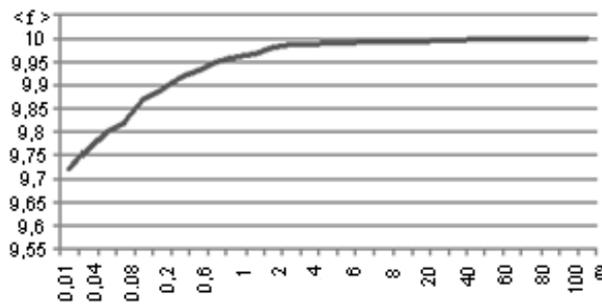


Рис. 3. Зависимость математического ожидания от отношения сигнал/шум g при $L = 64$

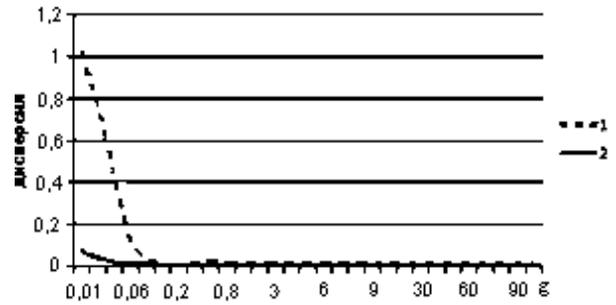


Рис. 4. Зависимость выборочной σ^2 (1) и предельной дисперсии (2) от отношения сигнал/шум, для $L = 16$

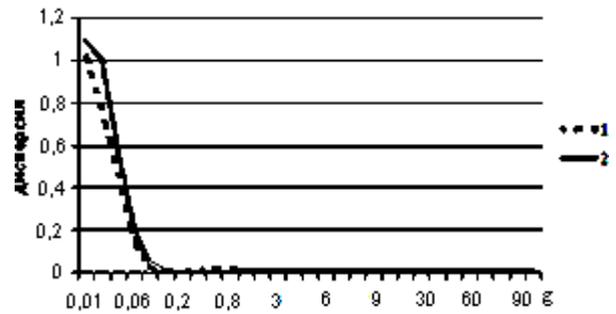


Рис. 5. Графики выборочных дисперсий сигнала при различных отношения сигнал/шум g , при $L = 16$ без мультипликативных помех (1) и с мультипликативными помехами (2)

В качестве мультипликативной помехи использована синусоида с частотой и амплитудой

Для сопоставления на рис.6 приведен характер изменения спектральной плотности мощности (СПМ) наблюдаемой последовательности при наличии в сигнале указанной мультипликативной помехи. Результаты получены при и $L = 16$.

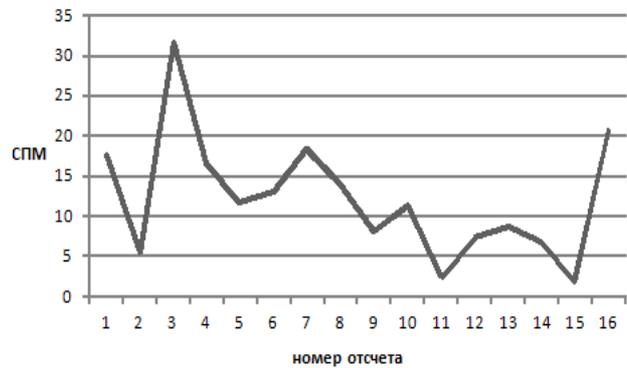


Рис. 6. Оценка СПМ наблюдаемой последовательности при отношении сигнал/шум $g = 0,1$; $L = 16$

Заключення

Полученные теоретические и экспериментальные результаты позволяют констатировать:

- рассмотренный МП-тест оценивания частоты комплексной синусоиды практически робастен к незначительным мультипликативным изменениям;
- синтезированная технология оперирует с сжатием исходных данных и проста в вычислительном отношении;
- предложенное преобразование обеспечивает формирование инвариантных статистик.

Литература

1. Марпл-мл. С.Л. Цифровой спектральный анализ и его приложения: пер. с англ. / С.Л. Марпл-мл. – М.: Мир, 1990. – 584 с.
2. Богданович В.А. Теория устойчивого обнаружения и оценивания сигналов / В.А. Богданович, А.Г. Вострецов. – М.: ФИЗМАТЛИТ, 2004. – 320 с.
3. Корн Г.П. Справочник по математике / Г.П. Корн, Т.Г. Корн. – М.: Наука, 1973. – 832 с.

Поступила в редакцию 1.09.2010

Рецензент: д-р техн. наук, проф., проф. каф. «Проектирование радиоэлектронных систем летательных аппаратов» В.К. Волосюк, Национальный аэрокосмический университет им. Н.Е. Жуковского «ХАИ», Харьков.

ВИКОРИСТАННЯ ІНВАРІАНТНИХ СТАТИСТИК ДЛЯ ОЦІНКИ ЧАСТОТИ СПОТВОРЕНОЇ ГАРМОНІКИ

О.Д. Абрамов, Т.І. Москаленко, Т.О. Петруніна, О.М. Ветошко

У роботі рішення задачі по оцінюванню частоти комплексної гармоніки проведено за допомогою стискування розмірності вектору вхідних даних при використанні методології максимальної правдоподібності. Синтезовано квазіоптимальний тест оцінювання частоти комплексної гармоніки, спостережуваної на тлі гаусівських шумів, інваріантний до мультиплікативних змін в межах інтервалу спостереження інтенсивності сигналу. Ефективність розробленого тесту і запропонованої методології вирішення подібного типу завдань підтверджена результатами експериментальних досліджень, проведених на рівні цифрового моделювання при різних законах спотворення амплітуди гармоніки, енергетичних співвідношеннях сигнал/перешкода і при різному числі тимчасових відліків інформаційного сигналу.

Ключові слова: оцінювання, комплексна гармоніка, стискування розмірності, інваріантна статистика, методологія максимальної правдоподібності, мультиплікативні зміни.

USE INVARIANT STATISTICIAN FOR ESTIMATION OF FREQUENCY OF THE DISTORTED HARMONIC

A.D. Abramov, T.I. Moskalenko, T.A. Petrunina, A.M. Vetoshko

In job the task decision on the frequency evaluation of complex harmonic is conducted by means of dimension data vector compression by the use of methodology of maximal verisimilitude. Looked after on a background gaussian noises the quasioptimal test of frequency evaluation of complex harmonic invariant to the multiplicative changes within the limits of interval of supervision of intensity of signal synthesized. Efficiency of the developed test and the offered methodology of this kind problems decision is confirmed by results of the experimental researches spent at level of digital modelling at various laws of harmonic amplitude distortion, a power parities a signal/hindrance and at various number of time readout of an information signal.

Key words: evaluation, complex harmonic, compression of dimension, invariant statistics, methodology of maximal verisimilitude, multiplicative changes.

Абрамов Александр Дмитриевич – канд. техн. наук, старший научный сотрудник, доцент каф. «Проектирование радиоэлектронных систем летательных аппаратов», Национальный аэрокосмический университет им. Н.Е. Жуковского «Харьковский авиационный институт», Харьков, Украина.

Москаленко Татьяна Игоревна – аспирант каф. «Проектирование радиоэлектронных систем летательных аппаратов», Национальный аэрокосмический университет им. Н.Е. Жуковского «Харьковский авиационный институт», Харьков, Украина.

Петрунина Татьяна Александровна – аспирант каф. «Проектирование радиоэлектронных систем летательных аппаратов», Национальный аэрокосмический университет им. Н.Е. Жуковского «Харьковский авиационный институт», Харьков, Украина.

Ветошко Алексей Михайлович – бакалавр каф. «Проектирование радиоэлектронных систем летательных аппаратов», Национальный аэрокосмический университет им. Н.Е. Жуковского «Харьковский авиационный институт», Харьков, Украина.