УДК 519.86:347.464

В.Ю. ДУБНИЦКИЙ[1], А.М. КОБЫЛИН[1], О.А. КОБЫЛИН[2]

[1]*Харьковский институт банковского дела Университета банковского дела НБ Украины*
[2]*Харьковский национальный университет радиоэлектроники, Украина*

ДИСТАНЦИОННОЕ ОПРЕДЕЛЕНИЕ ПАРАМЕТРОВ ФУНКЦИИ КОББА-ДУГЛАСА В МНОГОВЕРСИОННОМ РЕЖИМЕ С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ СПЕЦИАЛИЗИРОВАННОГО ИНТЕРВАЛЬНОГО КАЛЬКУЛЯТОРА

Выполнено исследование точности определения параметров производственной функции Кобба-Дугласа специально созданными программами и средствами, встроенными в программные продукты STATISTICA 6.1 и STATGRAPHICS V.15. Оценивание параметров проводили градиентным методом, методом Гаусса-Ньютона и Левенберга - Марквардта. Полученные результаты сравнивали по величинам среднего абсолютного и относительного отклонений. Установлено, что точность результата зависит не только от выбранного метода определения параметров, но и от статистической зависимости между переменными. Установлено также, что самую малую точность имели оценки, полученные в результате логарифмической линеаризации. Показано, что полученные при этом интервалы выходной величины велики и требуют создания новых способов их определения.

Ключевые слова: *производственная функция, функция Кобба-Дугласа, нелинейная регрессия, интервальные вычисления.*

Введение

Производственная функция широко используется в макро- и микроэкономических исследованиях [1] для анализа связей между объемом производства и факторами, которые на него влияют. В современном понятии [2] производственная функция – это функция действительных аргументов

$$X=x_1, \ldots, x_m,$$

которая удовлетворяет определенным условиям, представленным в [3].

Производственная функция обязательно должна быть явной функцией

$$F(A,X) = Y, \qquad (1)$$

где Y – объем выпуска продукции, X – m-мерный вектор затрат ресурсов, A – вектор оцениваемых параметров.

В рамках данной работы будем рассматривать разновидность ПФ, известную как функция Кобба-Дугласа (ФКД). В общем случае ФКД имеет вид [2, 3, 4, 6]:

$$Y = A\left(\prod_{j=1}^{m} X_j^{\alpha_j}\right)\exp(\gamma\tau) \qquad (2)$$

с ограничениями на параметры

$$\phi(\alpha_1,\alpha_2,\ldots\alpha_j,\ldots\alpha_m)Ro. \qquad (3)$$

Символ R означает, что левая и правая часть условия (3) находятся в одном из возможных строгих (нестрогих) отношений упорядочения на множестве действительных чисел.

Пусть матрица

$$S=\begin{pmatrix} Y & X_1 & X_2 & \ldots & X_j & \ldots & X_m & \tau \end{pmatrix} \qquad (4)$$

известна.

В (4) принято, что $Y, X_1, X_2, \ldots, X_j, \ldots X_m, \tau$ – вектор-столбцы размерности $1\times m$.

Исходя из содержательного смысла задачи, считаем, что величины $Y, X_j (j=\overline{1,m})$ положительны, величина τ неотрицательна. Параметры $\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_m$, γ – действительные.

Необходимо по результатам наблюдений, используя критерий минимума наименьших квадратов, найти величины A, α_j $(j=1,2,\ldots m), \gamma$.

В наиболее известных пособиях по эконометрии, например в [7], эту задачу предлагают решать методом линейного регрессионного анализа (РА). Это возможно, если условие (2) примет вид:

$$Y = A\left(\prod_{j=1}^{m} X_{j_t}^{\alpha_s}\right)\exp(\mu\tau_t)\ \ \mu_t, t=1,2\ldots n. \qquad (5)$$

В условии (5) принято, что μ_t - ошибка t-го изменения кортежа величин $< Y_t, X_{1t}, X_{2t} \ldots X_{jt} \ldots, X_{mt}, \tau_t >$, полученных при условии $\tau = \tau_t$, t = 1,2,…,n.

Таким образом, в условии (5) принято, что ошибка измерений мультипликативна по отношению к измеряемым величинам.

Если ошибка аддитивна (более распространенный случай, согласно работе [5]), то условие (5) примет вид:

$$Y = A(\prod_{j=1}^{m} X_{j_t}^{\alpha_s})\exp(\mu\tau_t) + \xi_t, t = 1, 2...n. \quad (6)$$

В этом случае логарифмирование (5) приводит к замене модели ошибки измерения, что, в свою очередь, приводит к неверным профессиональным выводам. Это обстоятельство отмечено в работе [8].

Для получения несмещённых оценок $\overline{A}, \overline{\alpha}_j, \overline{\gamma}$ параметров A, α, γ в работе[5] рекомендовано использовать нелинейный регрессионный анализ (РА).

Для расчета использованы классические данные, полученные Коббом и Дугласом в 1927 году и приведенные в работе [7].

Примем, что в условии (2) $\alpha_1 = \alpha,\ \alpha_2 = \beta,\ x_1 = K,\ x_2 = L$ и получим, что

$$Y = A \cdot K^{\alpha} \cdot L^{\beta}. \quad (7)$$

В одном из вариантов производственной функции [8] принято ограничение

$$\alpha + \beta = 1, \quad (8)$$

нарушение которого имеет серьезные профессиональные последствия [8].

С учетом (7) представим (8) в виде (9)

$$\frac{Y}{L} = A\left(\frac{K}{L}\right)^{\alpha}. \quad (9)$$

Логарифмируя (9) и используя стандартный метод наименьших квадратов, получим, что

$$\ln\left(\frac{Y}{L}\right) = 0,01155 + \ 0,2592\ \ln\left(\frac{K}{L}\right). \quad (10)$$

Применив встроенную в систему STATGRAFPHIC V.15 процедуру выбора наилучшей линейной зависимости получим, что

$$\ln\left(\frac{Y}{L}\right) = -0,054 + 0,2914\sqrt{\ln\frac{K}{L}}. \quad (11)$$

Отсюда следует, что линеаризованная оценка (10) имеет меньшую точность, чем оценка (11).

Так, как оценки коэффициентов производственной функции известны с точностью до ширины доверительного интервала, то задачу определения интервала величины Y, которую получают как результат произведения интервальных величин $A,\ K^{\alpha},\ L^{\alpha}$ следует рассматривать в рамках интервальной арифметики [13, 14].

В наиболее распространенных пакетах статистического анализа, таких как STATISTICA 6.1 и STATGRAPHICS V.15 представлены методы нелинейного РА. Однако, будучи жестко встроенными в программные системы, они не дают информации о способе реализации конкретного метода. Поэтому проверка качества этих методов невозможна.

1. Анализ литературы

Рассмотрим задачу определения параметров ПФ $Y = F(X; P)$ вида (6) более подробно. Используя метод наименьших квадратов для поиска оценок $\overline{P}$ вектора параметров P и схему аддитивной ошибки, условие метода наименьших квадратов (НМК) представим в виде

$$Q(P) = \sum_{t=1}^{n}\left(y_t - F_t(X; P)\right)^2 \to \min. \quad (12)$$

Для минимизации условия (12) будем использовать методы Гаусса-Ньютона и Марквардта (Marquardt).

Реализация метода Гаусса-Ньютона соответствует алгоритму, описанному в работе [9]. Обозначим оценки вектора параметров P на к-ой и (к+1) итерации как $P^{(\kappa)}$ и $P^{\kappa+1}$. Тогда

$$P^{(k+1)} = P^{(k)} - \left[H^{(k)}(Q(P)\right]^{-1} \nabla Q^{(k)}(P), \quad k = 0, 1, 2.... \quad (13)$$

В (13) принято, что $H^{(k)}(Q(P))$ – гессиан функции Q(P) на к-ой итерации; $\nabla Q^{(k)}$ – градиент функции Q (P).

Цель работы – разработка и программная реализация методов нелинейного РА, установление области применения алгоритмов, реализованных в указанных выше системах для оценивания параметров ФКД путем сравнения их результатов с результатами полученными «подконтрольными» программами и определение интервалов возможного изменения результата.

2. Изложение результатов

Пусть в условии (6) $m = 2; \gamma = 0$. Примем, что $x_1 = k;\ \alpha_1 = \alpha;\ x_2 = L;\ \alpha_2 = \beta$. Тогда оно примет вид:

$$Y = AK^{\alpha}L^{\beta}. \quad (14)$$

В выражении (14) переменные имеют следующий смысл: Y – объем выпуска продукции, K – величина капитальных затрат, L – величина трудозатрат. Добавим к (21) ограничение

$$\alpha + \beta = 1. \quad (15)$$

Равенства (14) и (15) совместно определяют функцию Кобба-Дугласа первого вида (ФКД1), только равенство (14) определяет функцию Кобба-Дугласа II вида (ФКД2).

Заменой переменных

$$Y / L = U;\ K / L = W$$

получим ФКД1 в виде:

$$U = AW^{\alpha}. \tag{16}$$

Для уравнения (16) условие (12) примет вид

$$Q = \sum_{t=1}^{n}\left(U_t - AW_t^{\alpha}\right)^2 \to \min; \tag{17}$$

для ФКД2 условие (12) примет вид

$$G = \sum_{t=1}^{n}\left(U_t - AK_t^{\alpha}L_t^{\beta}\right)^2 \to \min . \tag{18}$$

Из уравнений (12) – (18) следует, что основные элементы описанных алгоритмов следующие: градиент функции (12), матрица Гессе для функции (12) и матрица Якоби для функции (14) и (16). Общий вид этих элементов соответствует условиям (13), (14).

Ниже приведены частные выражения, соответствующие градиенту, матрице Гессе и матрице Якоби для функций ФКД1 и ФКД2.

Вычислим указанные элементы для алгоритмов, определяющих параметры функции ФКД1. Пусть

$$q_t = (U_t - AW_t^{\alpha}). \tag{19}$$

Тогда (25) примет вид:

$$Q = \sum_{t=1}^{n} q_t^2 . \tag{20}$$

Градиент функции, соответствующей условию (24), примет вид:

$$\nabla Q = \left(\frac{\partial Q}{\partial A};\frac{\partial Q}{\partial \alpha}\right)^T. \tag{21}$$

Выражение, определяющее $\frac{\partial Q}{\partial A}$, примет вид:

$$\frac{\partial Q}{\partial A} = -2\sum_{t=1}^{n} q_t W_t^{\alpha}; \tag{22}$$

выражение, определяющее $\frac{\partial Q}{\partial \alpha}$, примет вид:

$$\frac{\partial Q}{\partial \alpha} == -2\sum_{t=1}^{n} q_t AW_t^{\alpha} \ln W. \tag{23}$$

В общем виде матрица Гессе для функции (24) примет вид:

$$H(Q) = \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 Q}{\partial A^2} & \frac{\partial^2 Q}{\partial A \partial \alpha} \\ \frac{\partial^2 Q}{\partial A \partial \alpha} & \frac{\partial^2 Q}{\partial \alpha^2} \end{bmatrix}. \tag{25}$$

Элементы этой матрицы примут вид:

$$\frac{\partial^2 Q}{\partial A^2} = 2\sum_{t=1}^{n} W_t^{2\alpha}; \tag{26}$$

$$\frac{\partial^2 Q}{\partial A \partial \alpha} = 2\left(A^2\sum_{t=1}^{n} W_t^{2\alpha}\ln W_t - \sum_{t=1}^{n} q_t W_t^{\alpha}\ln W_t \right); \tag{27}$$

$$\frac{\partial^2 Q}{\partial \alpha^2} = 2A\left(A\sum_{t=1}^{n} (\ln W_t)^2 W_t^{2\alpha} - \sum_{t=1}^{n} q_t (\ln W_t)^2 W_t \right). \tag{28}$$

Элементы матрицы Якоби размерности $(n \times 2)$ для функции

$$F_t(A,\alpha) = AW_t^{\alpha} \tag{29}$$

примут вид:

$$\frac{\partial F_t}{\partial A} = W_t^{\alpha};\ \frac{\partial F_t}{\partial \alpha} = AW_t^{\alpha}\ln W_t. \tag{30}$$

Вычислим указанные элементы для алгоритмов, определяющих параметры функции ФКД2. Рассмотрим функцию (14) и соответствующее ей условие наименьших квадратов (18).

Пусть

$$y_t - AK_t^{\alpha}L_t^{\beta} = g_t . \tag{31}$$

Тогда условие (18) представим в виде:

$$G = \sum_{t=1}^{n} g_t^2 \to \min. \tag{32}$$

Градиент условия (32) будет естественным обобщением (20). Следовательно,

$$\nabla G = \left(\frac{\partial G}{\partial A};\frac{\partial G}{\partial \alpha};\frac{\partial G}{\partial \beta}\right)^T . \tag{33}$$

Соответственно, его компоненты примут вид

$$\frac{\partial G}{\partial A} = -2\sum_{t=1}^{n} g_t \lambda_t , \tag{34}$$

где

$$\Omega_t = K_t^{\alpha}L_t^{\beta}; \tag{35}$$

$$\frac{\partial G}{\partial \alpha} = -2\sum_{t=1}^{n} g_t A\Omega_t \ln K_t ; \tag{36}$$

$$\frac{\partial G}{\partial \beta} = -2\sum_{t=1}^{n} g_t A\Omega_t \ln L_t. \tag{37}$$

В общем виде матрица Гессе для условия (18) примет вид:

$$H(G) = \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 G}{\partial A^2} & \frac{\partial^2 G}{\partial A \partial \alpha} & \frac{\partial^2 G}{\partial A \partial \beta} \\ \frac{\partial^2 G}{\partial \alpha \partial A} & \frac{\partial^2 G}{\partial \alpha^2} & \frac{\partial^2 G}{\partial \alpha \partial \beta} \\ \frac{\partial^2 G}{\partial A \partial \beta} & \frac{\partial^2 G}{\partial \alpha \partial \beta} & \frac{\partial^2 G}{\partial \beta^2} \end{bmatrix}. \tag{38}$$

Элементы матрицы Гессе можно записать таким образом:

$$\frac{\partial^2 Q}{\partial A^2} = 2\sum_{t=1}^{n} \Omega_t^2 \; ; \qquad (39)$$

$$\frac{\partial^2 G}{\partial A \partial \alpha} = 2\left(A\sum_{t=1}^{n} \Omega_t^2 \ln K_t - \sum_{t=1}^{n} g_t \Omega_t \ln K_t \right); \qquad (40)$$

$$\frac{\partial^2 G}{\partial A \partial \beta} = 2\left(A\sum_{t=1}^{n} \Omega_t^2 \ln L_t - \sum_{t=1}^{n} g_t \Omega_t \ln L_t \right); \qquad (41)$$

$$\frac{\partial^2 G}{\partial \alpha^2} = 2A\left(A\sum_{t=1}^{n} \Omega_t^2 (\ln K_t)^2 - \sum_{t=1}^{n} g_t \Omega_t^2 (\ln K_t)^2 \right); \qquad (42)$$

$$\frac{\partial^2 G}{\partial \alpha \partial \beta} = 2A\begin{pmatrix} A\sum_{t=1}^{n} \Omega_t^2 \ln L_t \ln K_t - \\ -\sum_{t=1}^{n} g_t \Omega_t \ln K_t \ln L_t \end{pmatrix}; \qquad (43)$$

$$\frac{\partial^2 G}{\partial \beta^2} = 2A\begin{pmatrix} A\sum_{t=1}^{n} \Omega_t^2 (\ln L_t)^2 - \\ -\sum_{t=1}^{n} g_t \Omega_t^2 (\ln L_t)^2 \end{pmatrix}. \qquad (44)$$

Примем, что $Y_t(A, \alpha, \beta)$ есть значение ФКД2 в точке t, где ФКД2 определено условиями (18, 35). Тогда элементы матрицы Якоби будут следующие:

$$\frac{\partial Y_t}{\partial A} = \Omega_t \; ; \qquad (45)$$

$$\frac{\partial Y_t}{\partial \alpha} = A\Omega_t \ln K_t \; ; \qquad (46)$$

$$\frac{\partial Y_t}{\partial \beta} = A\Omega_t \ln L_t . \qquad (47)$$

В выражениях (45) – (47) принято, что $t = 1, 2, ...n$.

2.1. Результаты численного эксперимента

Для проверки изложенных методов был проведен численный эксперимент, суть которого в том, что описанные методы получения оценок были использованы для анализа данных, полученных в классическом исследовании Кобба и Дугласа и приведенных в [7].

Для получения оценок параметров производственных функций использовали следующие методы: метод логарифмической линеаризации (М1), получение производственной функции в результате потенцирования (М2), методом Гаусса – Ньютона, реализованном в системе STATISTICA 6.1, (М3), методом Гаусса –Ньютона, реализованном в системе STATGRAPHICS V.15 (М4), методом Левенберга-Марквардта (М5), реализованном в системе STATISTICA 6.1, методом Гаусса –Ньютона, реализованном в системе STATGRAPHICS V.15 (М 6), методом Гаусса-Ньютона, реализованном условием (8); этому методу присвоен индекс (М7) и методом Левенберга-Марквардта (М8), соответствующему условиям (10)-(13). При использовании методов нелинейного РА в качестве начального приближения (точек $P^{(0)}$) использовали оценки, полученные методом М1. Качество использованных методов определяли по величине среднего абсолютного отклонения

$$MAE = \frac{1}{n}\sum_{t=1}^{n}\left(y_t - \hat{y}\right); \qquad (48)$$

и по величине среднего относительного отклонения

$$\delta = \frac{1}{n}\sum_{t=1}^{n}\frac{y_t - \hat{y}_t}{\hat{y}}; \qquad (49)$$

где y_t – фактическое значение переменной y в t-ой точке, $\hat{y}_t$ – её оценка, полученная по регрессионному уравнению.

Результаты проведенного анализа приведены в табл. 1.

Таблица 1

Показатели качества
полученных регрессионных уравнений

Метод получения оценок	Тип оценки			
	MAE		δ	
	Вид производственной функции		Вид производственной функции	
	ФКБ1	ФКБ2	ФКБ1	ФКБ2
М1	0,04563	0,04894	0,00393	0,00406
М2	8,4227	8,5337	0,0584	0,0670
М3	7,1550	7,6992	0,0471	0,0547
М4	7,1016	7,2824	0,0493	0,0468
М5	7,4563	8,4106	0,0505	0,0411
М6	8,1933	7,8539	0,0471	0,0552
М7	7,6091	7,9775	0,0496	0,0580
М8	7,5048	7,3025	0,0503	0,0603

При анализе таблицы следует учесть, что в строке для метода М1 приведены данные, относящиеся к логарифмам величины Y .

Из приведенных данных следует, что применение нелинейного РА повышает точность полученных результатов.

Результаты определения параметров производственной функции вида (7) выполненные в системе STATISTICA 6.1 методом Левенберга-Марквардта приведены в табл. 2.

Таблица 2

Результаты определения параметров производственной функции

Оценка и доверительные границы ($\alpha = 0,05$)	A	α	β
Нижняя граница, (b)	0,046	0,1409	0,3812
Оцениваемая величина	$\dfrac{1,2739}{0,042}$	$\dfrac{0,2739}{3\cdot 10^{-4}}$	$\dfrac{0,6786}{12\cdot 10^{-3}}$
Верхняя граница (n)	2,510	0,407	0,9759

В табл. 3 для оцениваемой величины под чертой указано ее расчетное значение, под чертой – величина P-значения. Все найденные величины менее 0,05, таким образом полученное уравнение значимо.

Используя правила интервальных вычислений [13, 14] для K=366, L=300, получим

$$[Y] = [A]\cdot[K,K]^{[\alpha_н,\alpha_в]}\cdot[L,L]^{[\beta_н,\beta_в]} =$$

$$= [0,046;2,510]\cdot 366^{[0,1409;0,407]}\cdot 200^{[0,3812;0,9759]} =$$

$$= [0,7955;4881,7].$$

Таким образом получен очень большой интервал возможных значений величины Y.

Заключение

1. На примере оценивания параметров производственной функции показано, что линеаризация нелинейных регрессионных уравнений приводит к потере точности предсказываемых результатов.
2. Методы получения оценок параметров нелинейных уравнений, встроенные в системы STATISTICA 6.1. и STATGRAPHICS V.15, примерно равноценны по точности получаемых оценок.
3. Использование интервальных вычислений для получения возможных значений величины Y приводит к неоправданно широким границам величины Y.
4. Для уменьшения возможной величины интервала следует использовать треугольные числа.

Литература

1. Дубницький В.Ю. Визначення параметрів виробничої функції із сталого еластичністю / В.Ю. Дубницький, Б.В. Самородов // Системи обробки інформації. – Х.: ХУПС, 2008. – Вип. 7 (74). – С.169-172.

2. Клейнер Г.Б. Производственные функции: теория, методы, применение / Г.Б. Клейнер.– М.: Финансы и статистика, 1986. – 239 с.

3. Лотов В.А. Математические методы в экономике / В.А. Лотов, Е.П. Иванилов. - М.: Наука, 1979. – 304 с.

4. Математика и кибернетика в экономике. Словарь-справочник / Под ред. Н.П. Федоренко. – М.: Экономика, 1975. – 699 с.

5. Демиденко Е.З. Линейная и нелинейная регрессия / Е.З. Демиденко. - М.: Финансы и статистика, 1981. – 302 с.

6. Лукашин Ю. Производственные функции в анализе мировой экономики / Ю. Лукашин, Л. Рахліна // Мировая экономика и международные отношения. – 2004. – № 1. – С.17-27.

7. Доугерти К. Введение в економетрику / К. Доугерти. – М.: ИНФРА-М, 2001. – 402 с.

8. Долгих В.Н. Оценка параметров производственной функции Кобба-Дугласа нелинейным методом наименьших квадратов / В.Н. Долгих, В.Я. Долгих // Зб. тез доповідей XI Всеукраїнської науково-практичної конференції «Проблеми і перспективи розвитку банківської системи України». – Суми: ДВНЗ «УАБС НБУ». - 2008. – Т. 1. – С. 40-42.

9. Толбатов Ю.Ю. Математичне програмування. / Ю.Ю. Толбатов, Є.Ю. Толбатов. – Тернопіль: Підручники і посібники, 2008. – 429 с.

10. Химмельблау Д. Прикладное нелинейное программирование.– М.: Мир, 1975. – 534 с.

11. Marquardt D.W. An algorithm for Least Square Estimation of Nonlinear Parameters / D.W. Marquardt, J. Siam. - 1963. – V. 11, №2. – P. 431-437.

12. Дубницкий В.Ю. Регуляризация расчета уравнений регрессии при моделировании свойств бетонов / В.Ю. Дубницкий, В.Л. Чернявский // Сб. трудов Всесоюзного симпозиума по обобщению задачи идентификации сложных систем. – Х., 1979. – С. 148-150.

13. Дубницкий В.Ю. Визначення ефективності банківських операцій в умовах не стохастичної невизначеності / В.Ю. Дубницкий, А.М. Кобилін // Щомісячний науково-практичний журнал Національного банку України «Вісник Національного банку України». - 2006. - № 4 (122). – С. 23-29.

14. Дубницький В.Ю. Система дистанционного оценивания интервальной надежности программного обеспечения, предназначенного для выполнения финансовых расчетов / В.Ю. Дубницкий, А.М. Кобылин, О.А. Кобылин // Радіоелектронні і комп'ютерні системи. - № 6 (34). - 2008, – С. 186-192.

Поступила в редакцию 21.01.2009

Рецензент: д-р техн. наук, проф., зав. кафедрой информатики Е.П. Путятин, Харьковский национальный университет радиоэлектроники, Харьков, Украина.

ДИСТАНЦІЙНЕ ВИЗНАЧЕННЯ ПАРАМЕТРІВ ФУНКЦІЇ КОББА-ДУГЛАСА В МНОГОВЕРСІЙНОМУ РЕЖИМІ З ВИКОРИСТАННЯМ СПЕЦІАЛІЗОВАНОГО ІНТЕРВАЛЬНОГО КАЛЬКУЛЯТОРА

В.Ю. Дубницький, А.М. Кобилин, О.А. Кобилин

Виконано дослідження точності визначення параметрів виробничої функції Кобба-Дугласа спеціально створеними програмами й засобами, убудованими в програмні продукти STATISTICA 6.1 і STATGRAPHICS V.15. Оцінювання параметрів проводили градієнтним методом, методом Гаусса-Ньютона і Левенберга-Марквардта. Отримані результати порівнювали по величинах середнього абсолютного і відносного відхилень. Установлено, що точність результату залежить не тільки від обраного методу визначення параметрів, але і від статистичної залежності між змінними. Установлено також, що найменшу точність мали оцінки, отримані в результаті логарифмічної лінеаризації. Показано, що отримані при цьому інтервали вихідної величини великі й вимагають створення нових способів їхнього визначення.

Ключові слова: виробнича функція, функція Кобба-Дугласа, нелінійна регресія, інтервальні обчислення

REMOTE DETERMINATION OF COBB-DOUGLAS FUNCTION PARAMETERS IN MILTIVERSIONAL MODE USING A SPECIAL INTERVAL CALCULATOR

V.Y.Dubnitsky, A.M.Kobylin, O.A.Kobylin

The accuracy of determination of Cobb-Douglas production function parameters studied using specially developed programs and means built into STATISTICA 6.1 and STATGRAPHICS V.15 products. Parameters were evaluated by gradient method, Gauss-Newton and Loewenberg-Marquardt methods. The results obtained were compared by the values of mean absolute and relative deviation. The accuracy of result was shown to depend not only on the selected parameter determination method but also on statistical relation between variables. It was also stated that the least accurate were evaluations obtained by logarithmic linearization. The output value intervals obtained in this way were shown to be too large and requiring development of novel methods of their determination.

Key words: production function, function of Cobb-Douglas, regression nonlinear, calculate interval.

Дубницкий Валерий Юрьевич – канд. техн. наук, ст. научн. сотр., доцент, доцент кафедры высшей математики Харьковского института банковского дела Университета банковского дела, Харьков, Украина, e-mail: valeriy_dubn@mail.ru.

Кобылин Анатолий Михайлович – канд. техн. наук, доцент, доцент кафедры информационных технологий Харьковского института банковского дела Университета банковского дела, Харьков, Украина, e-mail: kobilin@khibs.edu.ua.

Кобылин Олег Анатольевич – канд. техн. наук, доцент кафедры информатики Харьковского национального университета радиоэлектроники, Харьков, Украина, e-mail: kblin@mail.ru.