

УДК 517.95

В.С. СЕЛИЩЕВ

*Национальный аэрокосмический университет им. Н.Е. Жуковского «ХАИ», Украина*

## ОСОБЕННОСТИ ПРОЦЕДУРЫ ВЫЧИСЛЕНИЯ АТОМАРНОЙ РАДИАЛЬНОЙ БАЗИСНОЙ ФУНКЦИИ $P_{\text{lor}}(x_1, x_2)$

В работе производится анализ вычислительных погрешностей при реализации алгоритма построения атомарной радиально базисной функции (АРБФ)  $P_{\text{lor}}(x_1, x_2)$ , применяемой в численных методах решения краевой задачи по бессеточной схеме на основе использования АРБФ. Описываются этапы построения функции  $P_{\text{lor}}(x_1, x_2)$ . Производится оценка диапазона изменения аргумента обратного преобразования Фурье  $U(z)$ , где  $z = \sqrt{x_1^2 + x_2^2}$ , для функции  $P_{\text{lor}}(x_1, x_2)$ . Предлагается два способа вычисления  $U(z)$ : по степенному разложению данной функции в окрестности нуля и с помощью асимптотического приближения Ханкеля функции  $J_0(z)$ , являющейся составной частью функции  $U(z)$ , при больших значениях  $z$ . Производится оценка погрешности вычислений  $U(z)$ . С помощью  $U(z)$  вычисляется  $P_{\text{lor}}(x_1, x_2)$  и производится оценка точности вычислений. Приводится алгоритм быстрого вычисления функции  $P_{\text{lor}}(x_1, x_2)$  с использованием процедуры интерполяции, производится оценка его точности.

**Ключевые слова:** бессеточный метод, метод коллокации, атомарная радиально базисная функция, точность вычислений, преобразование Фурье, интерполяция по схеме Эйткена.

### Введение

В последние годы большую популярность при решении краевых задач математической физики для дифференциальных уравнений в частных производных (ДУЧП) получили так называемые бессеточные (meshless или meshfree) методы. Они могут быть классифицированы как такие, для которых аппроксимация решений ДУЧП выполняется в слабой форме, так и такие, чья непосредственная аппроксимация решений ДУЧП выполняется в сильной форме. В последнем случае, ДУЧП обычно дискретизируются посредством коллокации. Сильная форма решения (метод коллокации) представляет особый интерес, потому что приводит к реально бессеточным методам.

Концепция решения ДУЧП на основе использования радиальных базисных функций (РБФ) была предложена E.J. Kansa в 1990 [1]. Он применил этот подход, используя кратноквадратические (multiquadrics) радиальные базисные функции (КК-схемы для РБФ). КК-метод E.J. Kansa для решения ДУЧП является бессеточным методом коллокации при использовании глобальных базисных функций. Численные эксперименты для параболических и эллиптических ДУЧП продемонстрировали высокую точность и эффективность КК-схем.

Недостатком слабых форм решения является большая предварительная вычислительная работа, связанная с организацией процесса интегрирования,

проведением процессов ортогонализации (для методов Галеркина) и т.д.

Сильная форма решения (метод коллокации) не требует предварительной подготовки перед решением ДУЧП.

Вместе с тем методы коллокации, в частности методы с применением атомарных радиально базисных функций (АРБФ) очень чувствительны к погрешности вычислений базисных функций, что при расчете результатов решения ДУЧП приводит к существенной потере точности [2].

В связи с этим проблема качественного вычисления атомарной радиальной базисной функции  $P_{\text{lor}}(x_1, x_2)$  является очень важной. В статье производится оценка погрешности методов вычисления функции  $P_{\text{lor}}(x_1, x_2)$ , применяемых вычислительных операций.

Функция  $P_{\text{lor}}(x_1, x_2)$  применяется при решении 2-D краевой задачи Дирихле в постановках Пуассона, Неймана, при смешанных краевых условиях, применяемой в механике твердого тела (задачи расчета прочностных характеристик, задачи упругости), при расчете стационарных тепловых и диффузионных процессов.

### 1. Понятие об АРБФ $P_{\text{lor}}(x_1, x_2)$

Данная атомарная функция является финитным решением функционально-дифференциального уравнения вида:

$$\Delta u(x_1, x_2) = \lambda \oint_{\partial\Omega} u[3(x_1 - \xi_1), 3(x_2 - \xi_2)] d\omega + \mu u(3x_1, 3x_2), \quad (1)$$

где  $\partial\Omega$  – окружность:  $\xi_1^2 + \xi_2^2 = \frac{4}{9}$ ;  $\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_2^2}$  –

оператор Лапласа [3].

При следующих значениях коэффициентов:

$\mu = -\frac{4\pi}{3}\lambda$  и  $\lambda = \frac{3^5}{4\pi}$  существует единственное решение уравнения (1), нормированное ограничением

$$\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} u(x_1, x_2) dx_1 dx_2 = 1.$$

Функция  $P_{\text{lor}}(x_1, x_2)$  является бесконечно дифференцируемой с компактным носителем в виде круга радиуса 1 и инвариантной относительно операции вращения:  $P_{\text{lor}}(x_1, x_2) \equiv P_{\text{lor}}(r)$ , где  $r = \sqrt{x_1^2 + x_2^2}$ .

Функция  $P_{\text{lor}}(x_1, x_2)$  изображается в квадрате  $[-1, 1] \times [-1, 1]$  рядом Фурье

$$u(x_1, x_2) = \sum_{p=0}^{\infty} \sum_{q=0}^{\infty} a_{pq} \cos(p\pi x_1) \cos(q\pi x_2), \quad (2)$$

и коэффициенты Фурье этого ряда имеют вид

$$a_{00} = \frac{1}{4^2}; \quad a_{p0} = \frac{1}{2} U(p\pi, 0); \quad a_{0q} = \frac{1}{2} U(0, q\pi);$$

$a_{pq} = U(p\pi, q\pi)$ ,  $t_1 = p\pi$ ,  $t_2 = q\pi$ , где  $U(t_1, t_2)$  – функция обратного преобразования Фурье.

Обратное преобразование Фурье функции  $P_{\text{lor}}(x_1, x_2)$  имеет следующий вид:

$$U(t_1, t_2) = \prod_{h=0}^{\infty} \frac{1 - J_0\left(\frac{2}{3^{h+1}} \sqrt{t_1^2 + t_2^2}\right)}{\left[\frac{1}{3^{h+1}} \sqrt{t_1^2 + t_2^2}\right]^2}. \quad (3)$$

## 2. Этапы построения функции $P_{\text{lor}}(x_1, x_2)$

Алгоритм построения/вычисления решений функции  $P_{\text{lor}}(x_1, x_2)$  реализуется в три этапа:

1) построение обратного преобразования Фурье  $U(t_1, t_2)$  по формуле (3);

2) расчет искомой функции  $P_{\text{lor}}(x_1, x_2)$  по конечному представлению формулы (2) в виде ряда Фурье при фиксированном  $x_2 = 0,0$  и  $x_1$ , изменяющимся от 0,0 до 1,0 с шагами  $h_1 = 1/16384$  и  $h_2 = 1/32384$ . Шаги берутся равными степени двойки с целью уменьшения ошибок округления при вычислительных операциях, применяемых в схеме Эйткена [4];

3) аппроксимация результатов вычислений для произвольных  $x_1$  и  $x_2$  по методу Эйткена (вариант интерполяционной формулы Лагранжа, оптимизированный для машинных вычислений).

## 3. Аналитическая оценка обратного преобразования Фурье $U(z)$ в окрестности нуля, определение пределов вычислений

Функция обратного преобразования Фурье  $U(t_1, t_2)$  является радиальной, т.к.

$$U(t_1, t_2) = U(r) = \prod_{h=0}^{\infty} \frac{1 - J_0\left(\frac{2}{3^{h+1}} r\right)}{\left[\frac{1}{3^{h+1}} r\right]^2}, \quad \text{где } r = \sqrt{t_1^2 + t_2^2}.$$

Замена  $z_h = \frac{1}{3^{h+1}} r$  позволяет представить данную функцию в виде

$$U(z) = \prod_{h=0}^{\infty} U(z_h), \quad (4)$$

где  $U(z_h) = \frac{1 - J_0(2 \cdot z_h)}{z_h^2}$  ( $J_0(\dots)$  – функция Бесселя нулевого порядка).

Оценим поведение данного сомножителя при  $z_h \rightarrow 0$ . Представим  $J_0(\psi)$  в виде степенного ряда

$$J_0(\psi) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{(\psi/2)^{2n}}{(n!)^2} \quad [5] \text{ и получим}$$

$$U(z_h) = 1 - \frac{z_h^2}{(2!)^2} + \frac{z_h^4}{(3!)^2} - \frac{z_h^6}{(4!)^2} + \dots + (-1)^n \frac{z_h^{2n}}{(n!)^2} + \dots \quad (5)$$

Из (5) вытекает удобная рекуррентная формула расчета  $n$ -го члена ряда в окрестности нуля:

$$y_n = y_{n-1} \cdot (-1) \cdot \left(\frac{z}{n}\right)^2.$$

Очевидно, что  $U(z_h) \rightarrow 1$  при  $z_h \rightarrow 0$ . Оценим степень приближения величины  $z_h$  к 0. Будем производить расчеты с повышенной точностью, используя тип данных “long double” для C или “extended” для Delphi. При значении  $U(z_h) = 1$  минимальная погрешность вычисления равна машинному эpsilon указанного типа данных:

$$\varepsilon_0 = 2^{-64} = 5,42 \cdot 10^{-20}. \quad (6)$$

Для практических расчетов будем использовать

$$\varepsilon_1 = \varepsilon_0 / 2 = 2,71 \cdot 10^{-20}. \quad (7)$$

В окрестности нуля величина  $U(z_h)$  будет вычисляться с точностью, определяемой неравенством

$|U(z_h) - 1| \geq \varepsilon_1$  Минимальное значение аргумента  $z_h$  вблизи нуля определяется из равенства

$$1 - \varepsilon_1 \approx 1 - \frac{z_h^2}{(2!)^2}. \text{ Отсюда } z_h \geq z_{\min} = 3,29 \cdot 10^{-10}.$$

Данная величина  $z_{\min}$  является нижней границей изменения  $z_h$  при вычислении коэффициентов обратного преобразования Фурье.

#### 4. Исследование поведения обратного преобразования Фурье $U(z)$ при больших значениях $z$

Оценим величину сомножителя  $U(z_h)$  при  $z_h \rightarrow +\infty$ . При больших значениях  $z_h$  функцию Бесселя  $J_0$  можно заменить асимптотическим приближением Ханкеля [5]:

$$J_0 \approx \sqrt{2/(\pi z)} \cdot \cos(z - \frac{\pi}{4}).$$

Отсюда при  $z_h \rightarrow +\infty$   $U(z_h) \approx \frac{1 - 2\sqrt{1/\pi z_h}}{z_h^2} \approx \frac{1}{z_h^2}.$

Поскольку  $U(z)$  является произведением сомножителей вида  $U(z_h)$ , получаем, что при  $z \rightarrow \infty$   $U(z) \rightarrow 0$  примерно как функция  $e^{-x}$ . Рассчитаем  $U(z_h)$  при больших значениях  $z_h$ , используя асимптотическое приближение Ханкеля [5]:

$$J_0(z) = \sqrt{2/(\pi z)} \{P(z) \cos \chi - Q(z) \sin \chi\}, \quad (8)$$

где  $\chi = z - \frac{\pi}{4}$ , а

$$P(z) = 1 - \frac{1^2 \cdot 3^2}{2!(8z)^2} + \frac{1^2 \cdot 3^2 \cdot 5^2 \cdot 7^2}{4!(8z)^4} - \dots, \quad (9)$$

$$Q(z) = -\frac{1^2}{8z} + \frac{1^2 \cdot 3^2 \cdot 5^2}{3!(8z)^3} - \frac{1^2 \cdot 3^2 \cdot 5^2 \cdot 7^2 \cdot 9^2}{5!(8z)^5} + \dots \quad (10)$$

Замену  $J_0$  на асимптотическое приближение Ханкеля рекомендуется использовать при  $z \geq 8$  [5, 6].

Проведем расчеты величин сомножителей  $U(z_h)$  при  $z_h \in [7,0 \div 10,0]$  с использованием степенного разложения (5), вычисляемого до тех пор, пока последний сомножитель будет больше либо равен  $\varepsilon_1$  (6). Обозначим результат вычисления

$U(z_h)$  как  $U_h^D$ . Также проведем расчеты сомножителя  $U(z_h)$  при  $z_h \in [7,0 \div 10,0]$  с использованием асимптотического приближения Ханкеля. Количество взятых множителей функции  $P(z)$  (8) обозначим через  $p$ , а количество взятых множителей функции  $Q(z)$  (9) обозначим через  $q$ . Результат вычисления сомножителя  $U(z_h)$  обозначим через  $U_h^H(p, q)$ . Зависимость

$$W_h(p, q) = U_h^D - U_h^H(p, q)$$

от значений  $z_h$  и количества множителей в функциях  $P(z)$  и  $Q(z)$  приведена в табл. 1 (с шагом 0,5). Реальные расчеты производились с шагом 0,01. Для всех вариантов расчетов выберем точку минимальной разности результатов (т.е. точку «потери гармоничности» разности результатов, см. строку 1 табл. 2), рассчитаем максимальное различие десяти последовательных соседних результатов ( $\pm 5$  точек относительно выбранной точки) в этой точке (практическую погрешность расчетов – см. строку 2 табл. 2).

Рассчитаем погрешность вычисления асимптотического приближения Ханкеля по остаточным членам рядов  $P(z)$  и  $Q(z)$  в выбранных точках, обозначим эту величину как  $U_{\text{err}}^H$  (см. строку 3 табл. 2), вычислим максимальное значение члена

Таблица 1

Различия результатов вычислений  $U(z_h)$ :  $W_h(p, q) = U_h^D - U_h^H(p, q)$

$z_k$	$W_k(5,4)$	$W_k(6,5)$	$W_k(7,6)$	$W_k(8,7)$	$W_k(9,8)$	$W_k(10,9)$
7,0	1,5188E-13	-1,9953E-14	3,3881E-15	-7,1915E-16	1,3408E-16	-4,0507E-17
7,5	2,0975E-13	-2,9633E-14	5,3881E-15	-1,4391E-15	4,9815E-16	-1,6481E-16
8,0	6,6871E-14	-9,0170E-15	1,4941E-15	-5,0265E-16	-4,6587E-18	-1,6241E-16
8,5	-8,2849E-15	4,0198E-16	-3,3189E-16	-2,5467E-16	-2,6240E-16	-2,6256E-16
9,0	-1,7333E-14	2,1527E-15	1,6838E-16	4,4675E-16	3,9529E-16	4,0741E-16
9,5	-7,0195E-15	9,1569E-16	1,5052E-16	2,5192E-16	2,3425E-16	2,3816E-16
10,0	4,6240E-15	4,1455E-15	4,1666E-15	4,1663E-15	4,1660E-15	4,1661E-15

Таблица 2

Точки минимальных совпадений расчетов результатов вычислений  $U(z_h)$ 

	$U_k^H(5,4)$	$U_k^H(6,5)$	$U_k^H(7,6)$	$U_k^H(8,7)$	$U_k^H(9,8)$	$U_k^H(10,9)$
Точка миним. совп.	9,80	9,36	8,38	8,19	7,90	7,70
Максим. практическая погрешность	7,628E-15	1,869E-15	4,320E-16	3,152E-16	2,266E-16	1,019E-16
Макс. погр. $U_{err}^H$	1,9931E-15	1,1135E-15	6,9526E-16	2,10471E-16	2,2851E-16	4,21774E-16
Макс. знач. члена степ. разлож. $U_k^D$	5,4966E+4	2,6356E+4	5,1805E+3	3,7578E+3	2,3263E+3	1,7101E+3
Погрешность члена степ. разлож. $U_k^D$	2,9797E-15	1,4288E-15	2,8084E-16	2,0371E-16	1,2611E-16	9,2706E-17
Макс. погр. $U_{err}^D$	1,6650E-14	7,7493E-15	1,4404E-15	1,0436E-15	6,3946E-16	4,5712E-16

степенного разложения ( $\max \frac{z^{2n}}{((n+1)!)^2}$ ) указанного сомножителя и погрешности вычисления указанного члена и максимальной погрешности степенного разложения по формуле  $U_{err}^D = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^{2n}}{((n+1)!)^2} \cdot \varepsilon_0$ , где вычисления производились до тех пор, пока член ряда не стал меньше  $\varepsilon_1$  (см. строки 4 – 6 табл. 2).

Проведенные оценки показывают, что наиболее точным будет расчет элементов функции  $U(z)$ , когда  $U(z_h)$  при  $z_h \in [0 \div 7,70]$  вычисляются по степенному разложению, а при  $z_h \in [7,70 \div \infty)$  по методу Ханкеля с десятью коэффициентами полинома  $P(z)$  и девятью коэффициентами полинома  $Q(z)$ . При этом максимальная теоретическая погрешность вычислений  $U_h$  не превышает 4,5712E-16, практическая погрешность – 1,019E-16.

График функции  $U(z)$  в диапазоне изменения  $z$  от 0 до 8, показывающий характер поведения функции в районе нуля, приводятся на рис. 1, а, а график, показывающий характер поведения функции при больших значениях  $z$  в диапазоне от 20 до 48 – на рис. 1, б.

Оценим поведение функции  $U(z)$  при больших значениях  $z$ . Результаты вычислений показывают, что  $U(z) \leq \varepsilon_1$  при  $z \geq 640 \cdot \pi$ , или  $U(z) \leq \varepsilon_2$  при  $z \geq 665 \cdot \pi$ , где  $\varepsilon_2 = \frac{1}{4} \varepsilon_0$ . Величина  $z_{max} = 665 \cdot \pi$  является верхней границей изменения аргумента  $z_h$  функции  $U(z_h)$ . Чтобы вычислить  $U(z)$  при любых значениях  $z$  в диапазоне изменения  $z_h$  от  $z_{max} = 665 \cdot \pi$  до  $z_{min} = 3,29 \cdot 10^{-10}$ , нужно не более 27 элементов общего произведения. Наибольшая

погрешность элементов  $U(z_h)$  достигается в диапазоне  $[7,0 \div 8,5]$ , куда не всегда попадает всего лишь один из  $U(z_h)$ . Большая часть сомножителей  $U(z_h)$  имеет аргумент, находящийся вблизи нуля, где погрешность вычислений эквивалентна машинному эпсилон  $\varepsilon_0$  (6), а сами сомножители  $U(z_h)$  близки к 1. Поэтому можно говорить, что реальная погрешность вычисления  $U(z)$  указанным способом не превышает 2,04E-16.

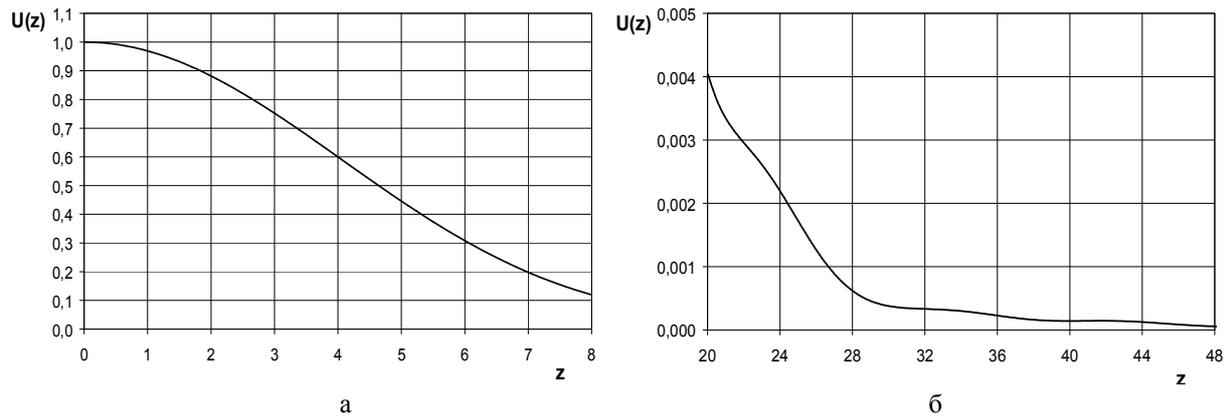
## 5. Алгоритм и оценка точности вычислений функции $P_{pq}(x_1, x_2)$

Для более точного вычисления функции  $P_{pq}(x_1, x_2)$  применим модернизированную по сравнению с (2) формулу:

$$P_{pq}(x_1, x_2) = \sum_{p=0}^m \sum_{q=0}^{\sqrt{m^2-p^2}} U_{pq} \cos\left(p \frac{\pi}{k} x_1\right) \cos\left(q \frac{\pi}{k} x_2\right) / k^2, \quad (11)$$

где  $k$  может быть равно 3, 4, 6, 8, 10, 12, 16, ...

Анализ расчетов с различными значениями  $k$  показал, что точность вычисления преобразования Фурье выше, когда  $k=16$ . Так как коэффициенты  $U_{pq}$ , являющиеся обратным преобразованием Фурье данной функции, нецелесообразно вычислять при значениях  $z = \sqrt{x_1^2 + x_2^2} \geq 640 \cdot \pi$ , в качестве ограничений вычислений суммы по  $z$  можно принять  $m=m_1=16 \times 640=10240$ , а в качестве ограничений суммы по  $q$  –  $\sqrt{m_1^2 - r^2}$ . Применяем для расчетов горнероподобную схему [7], когда вычисления начинаются с минимальных значений элементов, что приводит к уменьшению абсолютных

Рис. 1. График функции  $U(z)$ : а – в районе нуля; б – при больших значениях  $z$ 

погрешностей вычислений. Так, приняв  $m = m_2 = 16 \times 665 = 10640$ , и произведя расчеты  $P_{\text{lor}}(x_1, x_2)$ , получим максимальное расхождение результатов расчетов по первому и второму вариантам  $4,15E-16$ . Можно считать, что практическая погрешность вычислений функции  $P_{\text{lor}}(x_1, x_2)$  не превышает  $8,3E-16$ .

График функции  $P_{\text{lor}}(x_1, x_2)$  представлен на рис. 2.

## 6. Сокращение объема операций при вычислении функции $P_{\text{lor}}(x_1, x_2)$

Так как функция  $P_{\text{lor}}(x_1, x_2)$  является радиальной, то для любой точки  $(x_1, x_2)$  из круга единичного радиуса  $P_{\text{lor}}(x_1, x_2) = P_{\text{lor}}(x_r, 0)$ , где  $x_r = \sqrt{x_1^2 + x_2^2}$ . Поэтому вычисления функции для двух переменных можно свести к вычислению функции для одной переменной  $x_r \in [0; 1]$ . Алгоритм вычислений будет следующий: разобьем единичный отрезок  $[0; 1]$  на равномерное количество узлов, вычислим в них значения функции и расположим их в виде массива (файла). Произвольное значение  $P_{\text{lor}}(x_r, 0)$  будем вычислять с помощью аппроксимации.

С целью уменьшения погрешностей, возникающих при аппроксимации (в операциях деления), зададим количество узлов, равное степени двойки. Рассмотрим два случая,  $n_1 = 16385$ ;  $n_2 = 32768$ .

Для определения значения функции  $P_{\text{lor}}(x_r, 0)$  в произвольной точке  $x_r$  из отрезка  $[0; 1]$  выберем несколько (3, 4, 5, ...) узлов, соседних с точкой  $x_r$  и решим с помощью значений функции  $P_{\text{lor}}$  в этих точках задачу интерполяции. Обозначим эти узлы как  $x_0, x_1, x_2, x_3, \dots$ . Обозначим как  $x_0$  узел,

наиболее близко расположенный к  $x_r$ ,  $x_1$  – находящийся по противоположную сторону от  $x_0$  относительно  $x_r$ ,  $x_2$  – узел, находящийся рядом с узлом  $x_0$  и т.д. [8]. Варианты расстановки узлов приведены на рис. 3. Пусть  $y = P_{\text{lor}}(x_r, 0)$ ,  $y_0 = P_{\text{lor}}(x_0, 0)$ ,  $y_1 = P_{\text{lor}}(x_1, 0)$  и т.д.

Интерполяционный многочлен Лагранжа для  $P_{\text{lor}}(x_r, 0)$  строим по схеме Эйткена [6, 7]. Введем

выражение  $L_{01}(x) = \frac{1}{x_1 - x_0} \begin{vmatrix} y_0 & x_0 - x \\ y_1 & x_1 - x \end{vmatrix}$ . Так как

$L_{01}(x_i) = y_i$ ,  $i = 1, 2$ , то  $L_{01}(x)$  решает задачу многочленного интерполирования по двум узлам. Точно также образуются  $L_{12}(x)$ ,  $L_{23}(x)$  и т.д. Интерполяционный многочлен, принимающий в точках  $x_0, x_1, x_2$  значения  $y_0, y_1, y_2$ , получается из выражения

$L_{012}(x) = \frac{1}{x_2 - x_0} \begin{vmatrix} L_{01} & x_0 - x \\ L_{12} & x_2 - x \end{vmatrix}$ . Интерполяционный многочлен, принимающий в точках  $x_0, x_1, \dots, x_n$  значения  $y_0, y_1, \dots, y_n$ , принимая во внимание, что порядок точек и их нумерация не имеют значения, получается из выражения

$L_{012\dots n}(x) = \frac{1}{x_n - x_0} \begin{vmatrix} L_{012\dots(n-1)} & x_0 - x \\ L_{12\dots(n)} & x_n - x \end{vmatrix}$ . Вычислительная схема для построения интерполяционного

многочлена представлена в табл. 3. Данная схема позволяет подключать все новые значения  $x_i$  до тех пор, пока наблюдается улучшение точности результата. Найдем максимальные расхождения для 3-х, 4-х, 5-и и 6-и точечных схем Эйткена. Результаты максимальных различий между прямым и интерполяционными вариантами вычислений функции  $P_{\text{lor}}$  приведены в табл. 4.

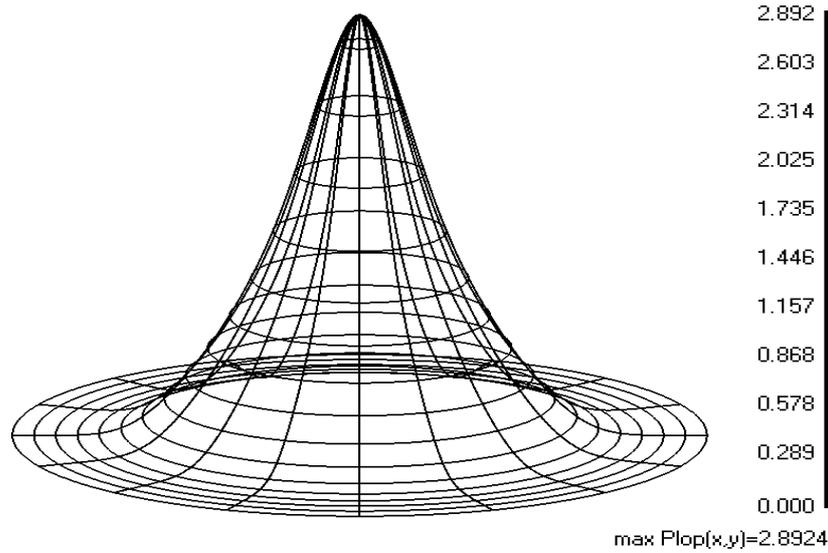


Рис. 2. График функции  $P_{lor}(x_1, x_2)$



Рис. 3. Варианты нумерации узлов интерполяции:

а – текущее значение  $x_r$  ближе к левому узлу; б – текущее значение  $x_r$  ближе к правому узлу

Таблица 3

Схема Эйткена построения интерполяционного полинома Лагранжа

$x_i$	$y_i$	$x_i - x$	$L_{i-1,i}(x)$	$L_{i-2,i-1,i}(x)$	$L_{i-3,i-2,i-1,i}(x)$	$L_{i-4,i-3,i-2,i-1,i}(x)$
$x_0$	$y_0$	$x_0 - x$				
$x_1$	$y_1$	$x_1 - x$	$L_{01}(x)$			
$x_2$	$y_2$	$x_2 - x$	$L_{12}(x)$	$L_{012}(x)$		
$x_3$	$y_3$	$x_3 - x$	$L_{23}(x)$	$L_{123}(x)$	$L_{0123}(x)$	
$x_4$	$y_4$	$x_4 - x$	$L_{34}(x)$	$L_{234}(x)$	$L_{1234}(x)$	$L_{01234}(x)$

Таблица 4

Максимальные погрешности интерполяционных схем Эйткена при интерполяции функции  $P_{lor}(x_r, 0)$

Количество узлов в диапазоне $[0;1]$	3-х точечная схема Эйткена	4-х точечная схема Эйткена	5-ти точечная схема Эйткена	6-ти точечная схема Эйткена
$N=16384$	$1,385E-11$	$4,648E-15$	$6,939E-18$	$1,41E-18$
$N=32768$	$2,21E-12$	$4,50E-16$	$1,41E-18$	$1,41E-18$

Как видим, существенного повышения точности интерполяции при переходе от пятиточечной схемы Эйткена к шеститочечной не происходит.

В связи с этим для практических расчетов выбираем 5-и точечную схему Эйткена при количестве узлов в диапазоне  $[0;1]$ , равном 32768.

### Заключение

Так как точность вычисления опорных функций очень важна для методов коллокации, вычисление функции  $P_{lor}(x_1, x_2)$  с точностью  $8,3E-16$  окажет существенное влияние на повышение точности решения 2D-краевой задачи для оператора Лапласа.

## Литература

1. Kansa E.J. Motivation for using radial basis functions to solve PDEs [Электронный ресурс]: RBF-PDE Web page / E.J. Kansa // Lawrence Livermore National Laboratory and Embry-Riddle Aeronautical University, Livermore, CA 94551, 1999. – P. 1-8. Режим доступа к журн.: <http://uahtitan.uah.edu/alex>.

2. Fries T.-P. Classification and Overview of Meshfree Methods / T.-P. Fries, H.-G. Matthies // Institute of Scientific Computing Technical University Braunschweig Brunswick, Germany. Informatik-berricht Nr.: 2003-3, July, 2004. – P. 32-47.

3. Колодяжний В.М. Фінітні функції, що породжені оператором Лапласа / В.М. Колодяж-

ний, В.О. Рвачов // Доповіді НАН України. – 2004. – № 4. – С. 17-22.

4. Абрамовиц М. Справочник по специальным функциям с формулами, графиками и математическими таблицами: пер. с англ. / М. Абрамовиц, И. Стиган. – М.: Наука, 1979. – 832 с.

5. GNU Scientific Library Reference Manual Edition 1.6, for GSL Version 1.6. – 27 December 2004. P. 47-56. [Электронный ресурс]. – Режим доступа к справ. рук.: <http://www.gnu.org>.

6. Ляшко И.И. Методы вычислений (Численный анализ. Методы решения задач математической физики) / И.И. Ляшко, В.Л. Макаров, А.А. Скоробогатько. – К.: Вища школа, 1977. – 400 с.

7. Амосов А.А. Вычислительные методы для инженеров / А.А. Амосов, Ю.А. Дубинский, Н.В. Копченова. – М.: Высшая школа, 1994. – 544 с.

Поступила в редакцию 16.11.2009

**Рецензент:** д-р техн. наук, проф., проф. кафедры 605 В.М. Вартачан, Харьковский национальный аэрокосмический университет им. Н.Е. Жуковского «ХАИ», Харьков, Украина.

### ОСОБЛИВОСТІ ПРОЦЕДУРИ ОБЧИСЛЕННЯ АТОМАРНОЇ РАДІАЛЬНОЇ БАЗИСНОЇ ФУНКЦІЇ PLOP(X<sub>1</sub>, X<sub>2</sub>)

*В.С. Селищев*

У роботі проводиться аналіз обчислювальних погрешностей при реалізації алгоритму побудови атомарної радіальної базисної функції (АРБФ) Plop(x<sub>1</sub>, x<sub>2</sub>), застосовуваної в чисельних методах рішення крайового завдання за безсітковою схемі на основі використання АРБФ. Описуються етапи побудови функції Plop(x<sub>1</sub>, x<sub>2</sub>). Проводиться оцінка діапазону зміни аргументу зворотного перетворення Фур'є U(z), де  $z = \sqrt{x_1^2 + x_2^2}$ , для функції Plop(x<sub>1</sub>, x<sub>2</sub>). Пропонується два способи обчислення U(z): по ступіневому розкладанню даної функції в околиці нуля й за допомогою асимптотичного наближення Ханкеля функції J<sub>0</sub>(z), що є складовою частиною функції U(z), при великих значеннях z. Проводиться оцінка погрешності обчислень U(z). За допомогою U(z) обчислюється Plop(x<sub>1</sub>, x<sub>2</sub>) і проводиться оцінка точності обчислень. Приводиться алгоритм швидкого обчислення функції Plop(x<sub>1</sub>, x<sub>2</sub>) з використанням процедури інтерполяції, проводиться оцінка його точності.

**Ключові слова:** безсітковий метод, метод коллокації, атомарна радіально базисна функція, точність обчислень, перетворення Фур'є, інтерполяція за схемою Ейткена.

### FEATURES OF PROCEDURE CALCULATION ATOMIC RADIAL BASIS FUNCTION PLOP(X<sub>1</sub>, X<sub>2</sub>)

*V.S. Selishev*

The analysis of calculable errors is in-process made during realization of algorithm of construction atomic radially to the base function (ARBF) of Plop(x<sub>1</sub>, x<sub>2</sub>), applied in the numeral methods of decision of regional task on a gridless chart on the basis of the use of ARBF. The stages of construction of function of Plop(x<sub>1</sub>, x<sub>2</sub>) are described. The estimation of reverse transformation of Fur'e U(z), where  $z = \sqrt{x_1^2 + x_2^2}$ , is made for function Plop(x<sub>1</sub>, x<sub>2</sub>). Two method of calculation of U(z) is offered: on sedate decomposition of this function in the vicinity of zero and by the asymptotic approaching of Hankel of function of J<sub>0</sub>(z), by being component part of function of U(z). The estimation of exactness of calculations of U(z) is made. By U(z) the Plop(x<sub>1</sub>, x<sub>2</sub>) is calculated and the estimation of exactness of calculations is made. An algorithm over of rapid calculation of function of Plop(x<sub>1</sub>, x<sub>2</sub>) is brought with the use of procedure of interpolation, the estimation of its exactness is made.

**Key words:** meshless method, method of collocation, atomic radially base function, exactness of calculations, transformation of Fourier, interpolation on the chart of Eytken.

**Селищев Владимир Сергеевич** – ст. преп. кафедри економіки і маркетингу Національного аэрокосмического университета им. Н.Е. Жуковского «ХАИ», Харьков, Украина, e-mail: sel\_vol@d6.khai.edu.